Total number of pages—16

27T MATH

2017

MATHEMATICS

Full Marks : 100

Pass Marks : 30

Time : Three hours

The figures in the margin indicate full marks for the questions.

Q. No. ***1*** *(a–j) carries* ***1*** *mark each*	$1 \times 10 = 10$
Q. Nos. ***2–12*** *carry* ***4*** *marks each* [*Q. No.* ***7*** *has two parts, 7 (i), (ii)*]	$4 \times 12 = 48$
Q. Nos. ***13–19*** *carry* ***6*** *marks each*	$6 \times 7 = 42$
	Total = 100

1. Answer the following questions : $1\times10=10$

তলৰ প্ৰশ্নবোৰৰ উত্তৰ দিয়াঁ :

(a) If the function $f=\{(1,5),(2,6),(3,4)\}$ from the set $A=\{1,2,3\}$ to the set B is invertible, find the set B.

সংহতি $A=\{1,2,3\}$ ৰ পৰা সংহতি B লৈ এটা ফলন $f=\{(1,5),(2,6),(3,4)\}$ প্ৰতিলোমনীয় হ'লে, B সংহতিটো উলিওৱাঁ।

(b) Find the value of x such that $\cos\left(\sin^{-1}x\right)=\frac{1}{2}$.

x অৰ মান উলিওৱাঁ যাতে $\cos\left(\sin^{-1}x\right)=\frac{1}{2}$ হয়।

(c) If $A=\begin{pmatrix}\cos\alpha & -\sin\alpha\\ \sin\alpha & \cos\alpha\end{pmatrix}$ and $A+A^T=I$, write down the general values of α.

যদি $A=\begin{pmatrix}\cos\alpha & -\sin\alpha\\ \sin\alpha & \cos\alpha\end{pmatrix}$ আৰু $A+A^T=I$, তেন্তে α ৰ সাধাৰণ মান লিখাঁ।

(d) If A is a matrix of order 3×4 and B is a matrix of order 4×5, what is the order of the matrix $(AB)^T$?

যদি মৌলকক্ষ A ৰ মাত্ৰা 3×4 আৰু মৌলকক্ষ Bৰ মাত্ৰা 4×5 হয়, তেন্তে মৌলকক্ষ $(AB)^T$ৰ মাত্ৰা কিমান?

(e) Let A be a 3×3 determinant and $|A|=7$. Find the value of $|2A|$.

ধৰাঁ A এটা 3×3 নিৰ্ণায়ক আৰু $|A|=7$ । $|2A|$ ৰ মান উলিওৱাঁ।

(f) Write down the range of $f(x)=cosec^{-1}x$.

$f(x)=cosec^{-1}x$ ফলনৰ পৰিসৰ লিখাঁ।

(g) Find the order and the degree of the differential equation

$$xy\frac{d^2y}{dx^2}+x\left(\frac{dy}{dx}\right)^2-y\frac{dy}{dx}=0.$$

$xy\frac{d^2y}{dx^2}+x\left(\frac{dy}{dx}\right)^2-y\frac{dy}{dx}=0$ অৱকল সমীকৰণটোৰ ক্ৰম আৰু ঘাত লিখাঁ।

(h) If $\vec{a}=2\hat{i}+4\hat{j}-\hat{k}$ and $\vec{b}=3\hat{i}-2\hat{j}+\lambda\hat{k}$ are such that $\vec{a}\perp\vec{b}$, what is the value of λ ?

যদি $\vec{a}=2\hat{i}+4\hat{j}-\hat{k}$ আৰু $\vec{b}=3\hat{i}-2\hat{j}+\lambda\hat{k}$ ভেক্টৰ দুটা এনেকুৱা যাতে $\vec{a}\perp\vec{b}$, তেন্তে λ ৰ মান কিমান?

(i) What is the equation of the plane passing through (α, β, γ) and parallel to the plane $x+y+z=0$?

(α, β, γ) বিন্দুৰ মাজেৰে যোৱা আৰু $x+y+z=0$ সমতলৰ সমান্তৰাল হোৱা সমতলখনৰ সমীকৰণ লিখাঁ।

(j) If the planes $2x-4y+3z=5$ and $x+2y+\lambda z=12$ are perpendicular to each other, what is the value of λ ?

যদি সমতল $2x-4y+3z=5$ আৰু $x+2y+\lambda z=12$ পৰস্পৰ লম্ব হয়, তেন্তে λ ৰ মান কিমান?

2. Let $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ and $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ be two functions defined by $f(x)=|x|$ and $g(x)=[x]$, where $[x]$ denotes the greatest integer less than or equal to x.

Find $(f\circ g)(5\cdot 75)$ and $(g\circ f)(-\sqrt{5})$. 2+2=4

$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ আৰু $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ ফলন দুটাৰ সংজ্ঞা এনেদৰে দিয়া আছে, $f(x)=|x|$ আৰু $g(x)=[x]$, য'ত $[x]$ য়ে, x অতকৈ সৰু অথবা সমান বৃহত্তম অখণ্ড সংখ্যাক বুজায়। $(f\circ g)(5\cdot 75)$ আৰু $(g\circ f)(-\sqrt{5})$ অৰ মান উলিওৱাঁ।

OR / *অথবা*

Show that the relation R in $\mathbb{R}$, defined by $R=\{(a,b):a\le b\}$, is reflexive and transitive, but not symmetric. 4

দেখুওৱাঁ যে বাস্তৱ সংখ্যাৰ সংহতি $\mathbb{R}$ অত, $R=\{(a,b):a\le b\}$ এটা প্ৰতিফলনীয় আৰু সংক্ৰামক সম্বন্ধ, কিন্তু প্ৰতিসম নহয়।

3. Prove that 4

প্ৰমাণ কৰাঁ যে

$$cot^{-1}\left(\frac{\sqrt{1+\alpha}+\sqrt{1-\alpha}}{\sqrt{1+\alpha}-\sqrt{1-\alpha}}\right)=\frac{x}{2}$$

where (য'ত) $\alpha=sin x$, $x\in\left(0,\frac{\pi}{4}\right)$.

OR / অথবা

Prove that

প্ৰমাণ কৰাঁ যে

$$2\tan^{-1}\left[\sqrt{\left(\frac{a-b}{a+b}\right)}\tan\frac{\theta}{2}\right]=\cos^{-1}\left(\frac{a\cos\theta+b}{a+b\cos\theta}\right).$$ 4

4. Show that 4

দেখুওৱাঁ যে

$$\begin{vmatrix} x & x^2 & 1+px^3 \\ y & y^2 & 1+py^3 \\ z & z^2 & 1+pz^3 \end{vmatrix}=(1+pxyz)(x-y)(y-z)(z-x).$$

OR / অথবা

Without expanding the determinant at any stage, show that

$$\begin{vmatrix} x^2+x & x+1 & x-2 \\ 2x^2+3x-1 & 3x & 3x-3 \\ x^2+2x+3 & 2x-1 & 2x-1 \end{vmatrix}=xA+B$$ 4

where A and B are determinants of order 3 not involving x.

কোনো অৱস্থাতে নিৰ্ণায়কটো সম্প্ৰসাৰণ নকৰাকৈ, দেখুওৱাঁ যে

$$\begin{vmatrix} x^2+x & x+1 & x-2 \\ 2x^2+3x-1 & 3x & 3x-3 \\ x^2+2x+3 & 2x-1 & 2x-1 \end{vmatrix}=xA+B$$

য'ত A আৰু B 3-মাত্ৰাৰ x নথকা নিৰ্ণায়ক।

5. Show that the function defined by $f(x) = x - [x]$ is discontinuous at all integral points, where $[x]$ denotes the greatest integer less than or equal to x. 4

দেখুওৱাঁ যে ফলন $f(x) = x - [x]$, সকলো অখণ্ড বিন্দুত বিচ্ছিন্ন, য'ত $[x]$ য়ে x অতকৈ সৰু অথবা সমান বৃহত্তম অখণ্ড সংখ্যাক বুজায়।

OR / অথবা

If $y = e^{a\cos^{-1}x}$, $-1 \le x \le 1$, show that

$$\left(1 - x^2\right)\frac{d^2y}{dx^2} - x\frac{dy}{dx} - a^2y = 0.$$ 4

যদি $y = e^{a\cos^{-1}x}$, $-1 \le x \le 1$, দেখুওৱাঁ যে

$$\left(1 - x^2\right)\frac{d^2y}{dx^2} - x\frac{dy}{dx} - a^2y = 0.$$

6. If $y^x + x^y = 1$, find $\frac{dy}{dx}$. 4

যদি $y^x + x^y = 1$, তেন্তে $\frac{dy}{dx}$ উলিওৱাঁ।

OR / অথবা

State Mean value theorem and verify it for the following function :

$$f(x) = x^2 - 4x - 3, \quad x \in [1, 4].$$ 1+3=4

মধ্যমান উপপাদ্যটোৰ উক্তি লিখাঁ আৰু তলৰ ফলনটোৰ ক্ষেত্ৰত উপপাদ্যটোৰ সত্যতা পৰীক্ষা কৰাঁ ঃ

$$f(x) = x^2 - 4x - 3, \quad x \in [1, 4]$$

7. Evaluate the following integrals :

তলৰ অনুকলনৰ মান উলিওৱাঁ ঃ

(i) $\int \frac{\sin 2x}{a^2 \sin^2 x + b^2 \cos^2 x} dx, \quad a \neq b$ 4

OR / অথবা

$\int e^x \cos x \, dx$ 4

(ii) Prove that $\int_0^a f(x)dx = \int_0^a f(a-x)dx, \quad a > 0$.

Hence evaluate

$$\int_0^{\pi/2} \frac{\sin x - \cos x}{1 + \sin x \cos x} dx$$ 2+2=4

প্ৰমাণ কৰাঁ যে $\int_0^a f(x)dx = \int_0^a f(a-x)dx, \quad a > 0$

ইয়াৰ সহায়ত

$\int_0^{\pi/2} \frac{\sin x - \cos x}{1 + \sin x \cos x} dx$ অৰ মান উলিওৱাঁ।

OR / অথবা

$\int_0^{\pi} \frac{x \sin x}{1 + \cos^2 x} dx$ 4

8. Solve :

সমাধান কৰাঁ :

$$\left(1-x^2\right)\frac{dy}{dx}-xy=1$$ 4

OR / অথবা

$$\left(x^2+xy\right)dy=\left(x^2+y^2\right)dx$$ 4

9. Solve the differential equation : 4

তলৰ অৱকল সমীকৰণটো সমাধান কৰাঁ ঃ

$$\left(1+e^{\frac{x}{y}}\right)dx+e^{\frac{x}{y}}\left(1-\frac{x}{y}\right)dy=0$$

10. Express the vector $\vec{a}=5\hat{i}-2\hat{j}+5\hat{k}$ as the sum of two vectors such that one is parallel to the vector $\vec{b}=3\hat{i}+\hat{k}$ and the other is perpendicular to $\vec{b}$. 4

ভেক্টৰ $\vec{a}=5\hat{i}-2\hat{j}+5\hat{k}$ ক দুটা ভেক্টৰৰ যোগফল হিচাপে লিখাঁ যাতে এটা ভেক্টৰ $\vec{b}=3\hat{i}+\hat{k}$ ভেক্টৰৰ সমান্তৰাল আৰু আনটো ভেক্টৰ $\vec{b}$ ৰ লম্ব হয়।

OR / অথবা

Show that the vector of magnitude $\sqrt{51}$ which makes equal angles with the vectors $\vec{a}=\frac{1}{3}\left(\hat{i}-2\hat{j}+2\hat{k}\right)$, $\vec{b}=\frac{1}{5}\left(-4\hat{i}-3\hat{k}\right)$ and $\vec{c}=\hat{j}$ is $-5\hat{i}+\hat{j}+5\hat{k}$. 4

এটা ভেক্টৰ যাৰ মাপাংক $\sqrt{51}$ আৰু ভেক্টৰ $\vec{a} = \frac{1}{3}\left(\hat{i} - 2\hat{j} + 2\hat{k}\right)$, $\vec{b} = \frac{1}{5}\left(-4\hat{i} - 3\hat{k}\right)$ আৰু $\vec{c} = \hat{j}$ ৰ লগত সমান কোণ কৰি থাকে। দেখুওৱাঁ যে ভেক্টৰটো $-5\hat{i} + \hat{j} + 5\hat{k}$ হ'ব।

11. Find the length and the foot of the perpendicular from the point $(1, 1, 2)$ to the plane $\vec{r} \cdot \left(2\hat{i} - 2\hat{j} + 4\hat{k}\right) + 5 = 0$. 4

$(1, 1, 2)$ বিন্দুৰপৰা $\vec{r} \cdot \left(2\hat{i} - 2\hat{j} + 4\hat{k}\right) + 5 = 0$ সমতলৰ ওপৰত টনা লম্বৰ দৈৰ্ঘ্য আৰু লম্বৰ পাদ বিন্দুৰ স্থানাংক উলিওৱাঁ।

OR / *অথবা*

Find the equation of the line through the point $(-1, 2, 3)$ which is perpendicular to the lines $\frac{x}{2} = \frac{y-1}{-3} = \frac{z+2}{-2}$ and $\frac{x+3}{-1} = \frac{y+2}{2} = \frac{z-1}{3}$. 4

$(-1, 2, 3)$ বিন্দুৰ মাজেৰে যোৱা আৰু $\frac{x}{2} = \frac{y-1}{-3} = \frac{z+2}{-2}$ আৰু $\frac{x+3}{-1} = \frac{y+2}{2} = \frac{z-1}{3}$ ৰেখা দুডালৰ লম্বভাৱে থকা ৰেখাৰ সমীকৰণ উলিওৱাঁ।

12. Two dice are thrown. Find the probability that the sum of the numbers coming up on them is 9, if it is known that the number 5 always occurs on the first die. 4

দুটা লুডুগুটি নিক্ষেপ কৰা হ'ল। সম্ভাৱিতা নিৰ্ণয় কৰাঁ যাতে দুয়োটা গুটিৰপৰা অহা সংখ্যাৰ যোগফল 9 হয়, যদি এইটো জনা যায় যে, প্ৰথম লুডুগুটিৰপৰা অহা সংখ্যাটো সদায় 5 সংখ্যা হয়।

OR / অথবা

A bag contains 2 red and 4 black balls, another bag contains 3 red and 3 black balls. One of the two bags is selected at random and a ball is drawn from a bag which is found to be red. Find the probability that the ball is drawn from the first bag. 4

এখন মোনাত 2টা ৰঙা আৰু 4টা ক'লা বল আছে। আন এখন মোনাত 3টা ৰঙা আৰু 3টা ক'লা বল আছে। যাদৃচ্ছিকভাৱে এখন মোনা লোৱা হ'ল আৰু তাৰপৰা এটা বল লোৱা হ'ল। যদি নিৰ্বাচিত বলটো ৰঙা হয়, তেনেহ'লে এইটো প্ৰথমখন মোনাৰপৰা লোৱাৰ সম্ভাৱিতা নিৰ্ণয় কৰাঁ।

13. If $A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 5 \\ 3 & 2 & -4 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$, find A^{-1}.

Using A^{-1} solve the system of equations.

$$2x - 3y + 5z = 11$$
$$3x + 2y - 4z = -5$$
$$x + y - 2z = -3$$

6

যদি $A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 5 \\ 3 & 2 & -4 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$ তেন্তে A^{-1} উলিওৱাঁ।

A^{-1} ৰ মান ব্যৱহাৰ কৰি তলৰ সৰল সহসমীকৰণবোৰ সমাধান কৰাঁ।

$$2x - 3y + 5z = 11$$
$$3x + 2y - 4z = -5$$
$$x + y - 2z = -3$$

OR / অথবা

If $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x - 4$, find $f(A)$

where $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$.

Also find A^{-1}. 6

যদি $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x - 4$ তেন্তে $f(A)$ ৰ মান উলিওৱাঁ

যʼত $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

আকৌ A^{-1} ৰ মান উলিওৱাঁ।

14. Find the equation of the tangents to the curve

$$y = \cos(x + y), \quad -2\pi \le x \le 2\pi$$

that are parallel to the line $x + 2y = 0$ 6

$x + 2y = 0$ ৰেখাৰ সমান্তৰাল হোৱা,

$y = \cos(x + y), \quad -2\pi \le x \le 2\pi$ বক্ৰৰ স্পৰ্শকৰ সমীকৰণ উলিওৱাঁ।

OR / অথবা

Find the local maximum and local minimum values, if any, of the following functions : 3+3=6

তলৰ ফলন দুটাৰ স্থানীয় গৰিষ্ঠ আৰু স্থানীয় লঘিষ্ঠ মান, যদি আছে, উলিওৱাঁ ঃ

(i) $f(x) = \sin x + \cos x, \quad 0 < x < \frac{\pi}{2}$

(ii) $g(x) = \frac{x}{2} + \frac{2}{x}, \quad x > 0$

15. Evaluate $\int_0^4 \left(x + e^{2x}\right) dx$ as the limit of a sum. 6

$\int_0^4 \left(x + e^{2x}\right) dx$ অক যোগফলৰ সীমা হিচাপে প্ৰকাশ কৰি মান উলিওৱাঁ।

16. Find the area lying above the x-axis and included between the curves $x^2 + y^2 = 8x$ and $y^2 = 4x$. 6

$x^2 + y^2 = 8x$ আৰু $y^2 = 4x$ বক্ৰ দুটাই আগুৰা উমৈহতীয়া ক্ষেত্ৰৰ, x অক্ষৰ ওপৰৰ অংশৰ কালি উলিওৱাঁ।

OR / অথবা

Prove that the curves $y^2 = 4x$ and $x^2 = 4y$ divide the area of the square bounded by $x = 0$, $x = 4$, $y = 0$ and $y = 4$ into three equal parts. 6

প্ৰমাণ কৰাঁ যে, $x=0$, $x=4$, $y=0$ আৰু $y=4$ ৰেখাই আগুৰা বৰ্গক্ষেত্ৰৰ কালিক, $y^2=4x$ আৰু $x^2=4y$ বক্ৰৰ উমৈহতীয়া ক্ষেত্ৰই সমানে তিনিটা অংশত ভাগ কৰে।

17. Find the Cartesian as well as the vector equation of the planes passing through the intersection of the planes $\vec{r}.\left(2\hat{i}+6\hat{j}\right)+12=0$ and $\vec{r}.\left(3\hat{i}-\hat{j}+4\hat{k}\right)=0$, which are at unit distance from the origin. 6

মূল বিন্দুৰ পৰা একক দূৰত্বত থকা $\vec{r}.\left(2\hat{i}+6\hat{j}\right)+12=0$ আৰু $\vec{r}.\left(3\hat{i}-\hat{j}+4\hat{k}\right)=0$ সমতল দুখনৰ ছেদনৰ মাজেৰে যোৱা সমতলৰ কাৰটেজীয় আৰু ভেক্টৰ সমীকৰণ উলিওৱাঁ।

OR / অথবা

Find the distance of the point $(-2, 3, -4)$ from the line $\frac{x+2}{3}=\frac{2y+3}{4}=\frac{3z+4}{5}$ measured parallel to the plane $4x+12y-3z+1=0$. 6

$4x+12y-3z+1=0$ সমতলৰ সমান্তৰাল ৰেখা $\frac{x+2}{3}=\frac{2y+3}{4}=\frac{3z+4}{5}$ ৰ পৰা $(-2, 3, -4)$ বিন্দুৰ দূৰত্ব উলিওৱাঁ।

18. Solve the Linear Programming Problem graphically :
লৈখিক নিয়মেৰে তলৰ ৰৈখিক প্ৰগ্ৰেমিং সমস্যাটোৰ সমাধান উলিওৱাঁ ঃ

Maximize and Minimize $Z = 5x + 3y$

subject to $3x + 5y \leq 15,$

$5x + 2y \leq 10,$

and $x, y \geq 0$ 6

$Z = 5x + 3y$ ৰ সৰ্বোচ্চ আৰু সৰ্বনিম্ন মান উলিওৱাঁ

য'ত $3x + 5y \leq 15,$

$5x + 2y \leq 10,$

আৰু $x, y \geq 0$

OR / *অথবা*

Maximize and Minimize $Z = 3x + 9y$

subject to $x + 3y \leq 60,$

$x + y \geq 10,$

$x \leq y,$

and $x, y \geq 0$ 6

$Z = 3x + 9y$ ৰ সৰ্বোচ্চ আৰু সৰ্বনিম্ন মান উলিওৱাঁ
য'ত

$x + 3y \leq 60,$

$x + y \geq 10,$

$x \leq y,$

আৰু $x, y \geq 0$

19. Two cards are drawn successively without replacement from a well shuffled pack of 52 cards. Find the mean, and the variance of the number of Queens. 6

52 পতীয়া তাচপাত এজাপ ভালকৈ মিহলি কৰি জাপটোৰপৰা দুখন পাত একাদিক্ৰমে পুনঃস্থাপন নকৰাকৈ টনা হ'ল। ৰাণীৰ সংখ্যাৰ মাধ্য আৰু প্ৰসৰণ নিৰ্ণয় কৰাঁ।

OR / অথবা

Six coins are tossed simultaneously. Find the probability of getting

(i) 3 heads,

(ii) no head,

(iii) at least one head. 6

6টা মুদ্ৰা একেলগে টছ কৰিলে, তলত দিয়া ধৰণে সম্ভাৱিতা উলিওৱাঁ, যাতে

(i) 3টা মুণ্ডপ্ৰাপ্ত হয়,

(ii) কোনো মুণ্ডপ্ৰাপ্ত নহয়,

(iii) অতি কমেও এটা মুণ্ডপ্ৰাপ্ত হয়।

———×———