9 યામ ભૂમિતિ 2 (શાંકવો)

વર્તુળ

વિભાગ 1 : અગત્યના મુદ્દાઓ

- **વર્તુળ :** સમતલમાં નિશ્ચિત બિંદુથી અચળ અંતરે આવેલાં તમામ બિંદુઓના ગણને **વર્તુળ** કહે છે. નિશ્ચિત બિંદુને વર્તુળનું **કેન્દ્ર** અને અચળ અંતરને વર્તુળની **ત્રિજ્યા** કહે છે.

  વર્તુળનું કાર્તેઝિય સમીકરણ : (h, k) કેન્દ્ર અને r ત્રિજ્યાવાળા વર્તુળનું સમીકરણ $(x-h)^2+(y-k)^2=r^2$

- **વર્તુળનું પ્રમાણિત સમીકરણ :** ઊગમબિંદુ કેન્દ્ર અને r ત્રિજ્યાવાળા વર્તુળનું સમીકરણ $x^2+y^2=r^2$ છે. તેને **વર્તુળનું પ્રમાણિત સમીકરણ** કહે છે.
- **એકમ વર્તુળનું સમીકરણ :** ઊગમબિંદુ કેન્દ્ર અને 1 એકમ ત્રિજ્યાવાળા વર્તુળને **એકમ વર્તુળ** કહે છે. તેનું સમીકરણ $x^2+y^2=1$ છે.

- **R^2માં દ્વિઘાત સમીકરણ વર્તુળ દર્શાવે તે માટેની શરતો :** વર્તુળનું સમીકરણ $ax^2+2hxy+by^2+2gx+2fy+c=0$ દ્વિચલ દ્વિઘાત સમીકરણ છે.

  સમીકરણમાં x^2 અને y^2ના સહગુણકો સમાન અને શૂન્યેતર છે. સમીકરણમાં xyનો સહગુણક શૂન્ય છે તથા $g^2+f^2-ac>0$.

- **વર્તુળનું વ્યાપક સમીકરણ અને શરત :** જો $g^2+f^2-c>0$ હોય, તો $x^2+y^2+2gx+2fy+c=0$ વર્તુળ દર્શાવે છે. તેને વર્તુળનું વ્યાપક સમીકરણ કહે છે. તેનું કેન્દ્ર $(-g, -f)$ તથા ત્રિજ્યા $=\sqrt{g^2+f^2-c}$.

- **વર્તુળ X-અક્ષને સ્પર્શ ત્યારે :**

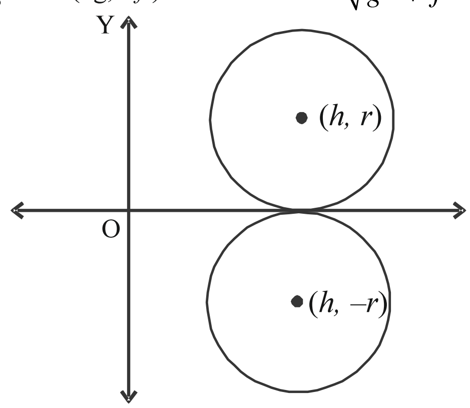
  ત્રિજ્યા = | કેન્દ્રનો y-યામ | = $|k|$

  $\therefore r=|k|$ આથી, $k=\pm r$

  $\therefore$ વર્તુળનું કેન્દ્ર $=(h, \pm r)$

  $\therefore$ X-અક્ષને સ્પર્શતા વર્તુળનું સમીકરણ

  $$(x-h)^2+(y\pm r)^2=r^2$$



આકૃતિ 9.1

- **વર્તુળ Y-અક્ષને સ્પર્શ તો :**

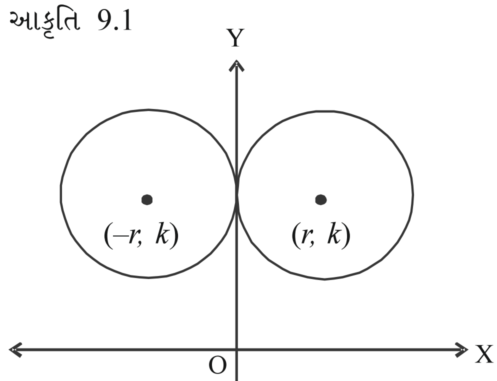
  ત્રિજ્યા = | કેન્દ્રનો x-યામ | = $|h|$

  $\therefore r=|h|$ આથી, $h=\pm r$

  $\therefore$ વર્તુળનું કેન્દ્ર $=(\pm r, k)$

  $\therefore$ Y-અક્ષને સ્પર્શતા વર્તુળનું સમીકરણ

  $$(x\pm r)^2+(y-k)^2=r^2$$



આકૃતિ 9.2

- **વર્તુળ બંને અક્ષોને સ્પર્શે તો :**

ત્રિજ્યા = | કેન્દ્રનો x-યામ | = | કેન્દ્રનો y-યામ |

$\therefore r = |h| = |k|$

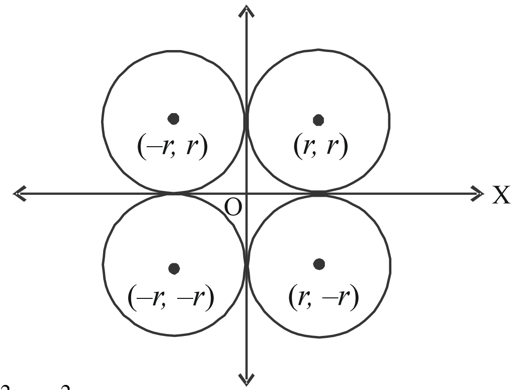
$\therefore h = \pm r, k = \pm r$

$\therefore$ વર્તુળનું કેન્દ્ર = $(r, \pm r)$ $(-r, \pm r)$

વર્તુળની ત્રિજ્યા = r

$\therefore$ બંને અક્ષોને સ્પર્શતા વર્તુળનું સમીકરણ

$(x+r)^2 + (y \pm r)^2 = r^2$ અથવા $(x-r)^2 + (y \pm r)^2 = r^2$



આકૃતિ 9.3

(i) વર્તુળ X-અક્ષને ઊગમબિંદુએ સ્પર્શે, તો કેન્દ્ર = $(0, \pm r)$

(ii) વર્તુળ Y-અક્ષને ઊગમબિંદુએ સ્પર્શે, તો કેન્દ્ર = $(\pm r, 0)$

- **વ્યાસાંત બિંદુવાળા વર્તુળનું સમીકરણ :** $A(x_1, y_1)$ અને $B(x_2, y_2)$ વ્યાસાંત બિંદુવાળા વર્તુળનું સમીકરણ $\boldsymbol{(x - x_1)(x - x_2) + (y - y_1)(y - y_2) = 0}$ છે.

વર્તુળનાં પ્રચલ સમીકરણો : (h, k) કેન્દ્ર અને r ત્રિજ્યાવાળા વર્તુળનાં પ્રચલ સમીકરણો $\boldsymbol{x = h + r\cos\theta}$ અને $\boldsymbol{y = k + r\sin\theta}$ છે કે જ્યાં $\theta \in (-\pi, \pi]$ છે.

એકમ વર્તુળનાં પ્રચલ સમીકરણો $\boldsymbol{x = r\cos\theta}$, $\boldsymbol{y = r\sin\theta}$, જ્યાં $\theta \in (-\pi, \pi]$

એકમ વર્તુળનાં પ્રચલ સમીકરણો $x = \cos\theta$, $y = \sin\theta$ છે, જ્યાં $\theta \in (-\pi, \pi]$

જીવાની લંબાઈ : વર્તુળ $x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0$ ની X-અક્ષ પર કપાતી **જીવાની લંબાઈ** $= 2\sqrt{g^2 - c}$ $(g^2 > c)$

વર્તુળ $x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0$ ની Y-અક્ષ પર કપાતી **જીવાની લંબાઈ** $= 2\sqrt{f^2 - c}$ $(f^2 > c)$

સ્પર્શકની લંબાઈ : વર્તુળ $x^2 + y^2 = r^2$ની બહારના બિંદુ $P(x_1, y_1)$ માંથી વર્તુળ $x^2 + y^2 = r^2$ ને દોરેલા સ્પર્શકની લંબાઈ $\boldsymbol{= \sqrt{x_1^2 + y_1^2 - r^2}}$

વર્તુળ $x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0$ની બહારના બિંદુ $P(x_1, y_1)$ માંથી વર્તુળને દોરેલા સ્પર્શકની લંબાઈ $\boldsymbol{= \sqrt{x_1^2 + y_1^2 + 2gx_1 + 2fy_1 + c}}$

- **વર્તુળનાં સ્પર્શકનાં સમીકરણો :** વર્તુળ $x^2 + y^2 = r^2$ પરના બિંદુ $P(x_1, y_1)$ આગળના સ્પર્શકનું સમીકરણ $\boldsymbol{xx_1 + yy_1 = r^2}$ છે.

વર્તુળ $x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0$ પરના $P(x_1, y_1)$ આગળ દોરેલા સ્પર્શકનું સમીકરણ $xx_1 + yy_1 + g(x + x_1) + f(y + y_1) + c = 0$ છે.

બિંદુનું વર્તુળને સાપેક્ષ સ્થાન : બિંદુ $P(x_1, y_1)$ ના વર્તુળ $x^2 + y^2 = r^2$ના સાપેક્ષ સ્થાન માટે,

$x_1^2 + y_1^2 - r^2 = 0 \iff$ બિંદુ P વર્તુળનું બિંદુ છે.

$x_1^2 + y_1^2 - r^2 > 0 \iff$ બિંદુ P વર્તુળની બહારનું બિંદુ છે.

$x_1^2 + y_1^2 - r^2 < 0 \iff$ બિંદુ P વર્તુળની અંદરનું બિંદુ છે.

બિંદુ $P(x_1, y_1)$ ના વર્તુળ $x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0$ ને સાપેક્ષ સ્થાન માટે,

$x_1^2 + y_1^2 + 2gx_1 + 2fy_1 + c = 0 \iff$ P વર્તુળ પરનું બિંદુ છે.

$x_1^2 + y_1^2 + 2gx_1 + 2fy_1 + c > 0 \iff$ P વર્તુળની બહારનું બિંદુ છે.

$x_1^2 + y_1^2 + 2gx_1 + 2fy_1 + c < 0 \iff$ P વર્તુળની અંદરનું બિંદુ છે.

- **સામાન્ય જીવાનું સમીકરણ :**

વર્તુળો $S_1 : x^2 + y^2 + 2g_1x + 2f_1y + c_1 = 0$ અને

$S_2 : x^2 + y^2 + 2g_2x + 2f_2y + c_2 = 0$ ની સામાન્ય જીવાને સમાવતી રેખાનું સમીકરણ $S_1 - S_2 = 0$ અર્થાત્,

$S_1 - S_2 = 2x(g_1 - g_2) + 2y(f_1 - f_2) + c_1 - c_2 = 0$

વર્તુળ $x^2 + y^2 = r^2$ ની કોઈ જીવાનું મધ્યબિંદુ $M(x_1, y_1)$ હોય, તો જીવાનું સમીકરણ $xx_1 + yy_1 = x_1^2 + y_1^2$

- **બે વર્તુળોના સામાન્ય સ્પર્શકની સંખ્યા :**

બે વર્તુળો પરસ્પર અંદરથી સ્પર્શે, તો **સામાન્ય સ્પર્શક એક જ** મળે.

બે વર્તુળો એકબીજાને છેદે, તો **સામાન્ય સ્પર્શકની સંખ્યા બે** મળે.

બે વર્તુળો બહારથી સ્પર્શે, તો **સામાન્ય સ્પર્શકની સંખ્યા ત્રણ** મળે.

બે વર્તુળો એકબીજાને ન છેદે, તો **સામાન્ય સ્પર્શકની સંખ્યા ચાર** મળે.

- **રેખા અને વર્તુળનો છેદગણ :** જો રેખા $ax + by + c = 0$, $a^2 + b^2 \neq 0$ અને વર્તુળ $x^2 + y^2 = r^2$ આપેલ હોય, ત્યારે જો

$r^2 > \dfrac{c^2}{a^2 + b^2} \iff$ રેખા વર્તુળને બે ભિન્ન બિંદુઓમાં છેદે છે.

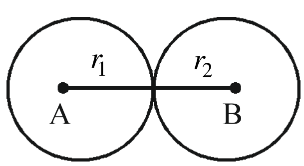
$r^2 < \dfrac{c^2}{a^2 + b^2} \iff$ રેખા વર્તુળને છેદશે નહિ.

$r^2 = \dfrac{c^2}{a^2 + b^2} \iff$ રેખા વર્તુળને સ્પર્શે છે.

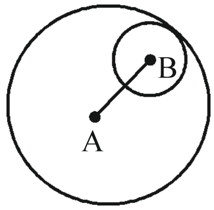
- **સમતલમાં બે વર્તુળો વચ્ચેનો પારસ્પરિક સંબંધ**

જો $AB = r_1 + r_2$

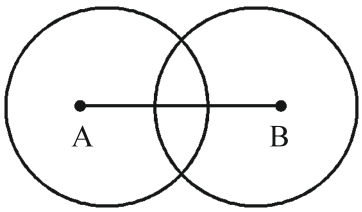
જે બંને વર્તુળો પરસ્પર બહારથી સ્પર્શે છે.



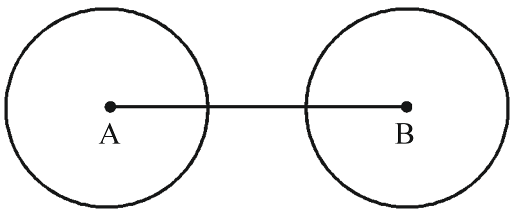
આકૃતિ 9.4



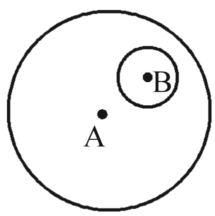
જો AB = | $r_1 - r_2$ |
તો બંને વર્તુળો પરસ્પર અંદરથી સ્પર્શે છે.



જો | $r_1 - r_2$ | < AB < $r_1 + r_2$
તો બંને વર્તુળો બે ભિન્ન બિંદુઓમાં છેદે છે.



જો AB > $r_1 + r_2$
તો બંને વર્તુળો પરસ્પર છેદતાં કે સ્પર્શતા નથી.



AB < | $r_1 - r_2$ |
એક વર્તુળ બીજા વર્તુળની અંદર હોય.

આકૃતિ 9.5

- **રેખા** $y = mx + c$ એ **વર્તુળ** $x^2 + y^2 = r^2$ ને **સ્પર્શે તે માટેની શરત** $c^2 = r^2(1 + m^2)$ છે અને સ્પર્શબિંદુના યામ $\left(\frac{-mr^2}{c}, \frac{r^2}{c}\right)$ છે. (જ્યાં $c \neq 0$)
- વર્તુળનાં કેન્દ્રો $C_1(x_1, y_1), C_2(x_2, y_2)$ તથા ત્રિજ્યાઓ r_1 અને r_2 હોય, ત્યારે જો

  બે વર્તુળો બહારથી સ્પર્શે, તો સ્પર્શબિંદુના યામ $\left(\frac{r_1x_2 + r_2x_1}{r_1 + r_2}, \frac{r_1y_2 + r_2y_1}{r_1 + r_2}\right)$

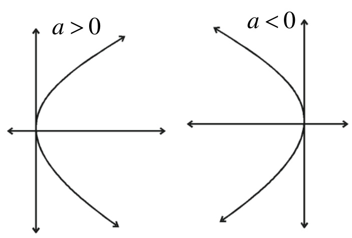
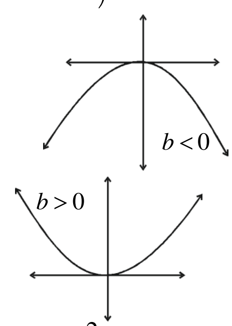
  બે વર્તુળો અંદરથી સ્પર્શે, તો સ્પર્શબિંદુના યામ $\left(\frac{r_1x_2 - r_2x_1}{r_1 - r_2}, \frac{r_1y_2 - r_2y_1}{r_1 - r_2}\right)$

પરવલય

- **પરવલય :** કોઈ નિશ્ચિત રેખા પર ન હોય તેવા નિશ્ચિત બિંદુથી અંતર અને નિશ્ચિત રેખાથી લંબઅંતર સમાન હોય તેવા સમતલનાં તમામ બિંદુઓના ગણને પરવલય કહે છે.
- **પરવલયનું પ્રમાણિત સમીકરણ :** X-અક્ષ મુખ્ય અક્ષ હોય તેવા પરવલયનું પ્રમાણિત સમીકરણ $y^2 = 4ax,\ a > 0$.

  મુખ્ય અક્ષ Y-અક્ષ તેવા પરવલયનું પ્રમાણિત સમીકરણ $x^2 = 4by,\ b > 0$.
- **પરવલયની ઉત્કેન્દ્રતા** $e = 1$ છે.
- પરવલયની નાભિમાંથી પસાર થતી અને નિયામિકાને લંબ હોય તે રેખાને પરવલયનો અક્ષ કહે છે.
- પરવલય અને તેના અક્ષનું છેદબિંદુ **પરવલયનું શિરોબિંદુ** કહેવાય છે.

- પરવલયનાં કોઈ પણ બે બિંદુઓને જોડતાં રેખાખંડને **પરવલયની જીવા** કહે છે.
- પરવલયની નાભિમાંથી પસાર થતી જીવાને પરવલયની **નાભિજીવા** કહે છે.
- પરવલયના અક્ષને લંબ હોય તેવી અને પરવલયની નાભિમાંથી પસાર થતી પરવલયની જીવાને પરવલયનો **નાભિલંબ** કહે છે. (પરવલયના અક્ષને લંબ હોય તેવી નાભિજીવાને **પરવલયનો નાભિલંબ** કહે છે.)

ક્રમ	પરવલયનું પ્રમાણિત સમીકરણ	$y^2 = 4ax$	$x^2 = 4by$
1.	અક્ષ	X-અક્ષ	Y-અક્ષ
2.	નાભિ	$S(a, 0)$	$S(0, b)$
3.	ઉત્કેન્દ્રતા	$e = 1$	$e = 1$
4.	શિરોબિંદુ	$(0, 0)$	$(0, 0)$
5.	નિયામિકા	$x = -a$	$y = -b$
6.	નાભિલંબની લંબાઈ	$4\|a\|$	$4\|b\|$
7.	નાભિલંબનાં અંત્યબિંદુઓ	$(a, \pm 2a)$	$(\pm 2b, b)$
8.	સંમિતતા	X-અક્ષ પ્રત્યે	Y-અક્ષ પ્રત્યે
9.	પ્રચલ સમીકરણો	$x = at^2, \quad y = 2at, t \in R$	$x = 2bt, \quad y = bt^2, t \in R$
10.	પ્રચલ બિંદુ (t-બિંદુ)	$\left(at^2, 2at\right), t \in R$	$\left(2bt, bt^2\right), t \in R$
11.	આકૃતિ	 $y^2 = 4ax$	 $x^2 = 4by$
12.	(x_1, y_1) બિંદુએ સ્પર્શકનું સમીકરણ	$yy_1 = 2a(x + x_1)$	$xx_1 = 2b(y + y_1)$
13.	t બિંદુ એ સ્પર્શકનું સમીકરણ	$x - ty + at^2 = 0$	$y - tx + bt^2 = 0$
14.	m ઢાળવાળા સ્પર્શકના સ્પર્શબિંદુના યામ	$\left(\frac{a}{m^2}, \frac{2a}{m}\right)$	$\left(\frac{2b}{m}, \frac{b}{m^2}\right)$
15.	(x_1, y_1) બિંદુએ અભિલંબનું સમીકરણ	$y - y_1 = \frac{-y_1}{2a}(x - x_1)$	$y - y_1 = \frac{-2b}{x_1}(x - x_1)$
16.	m ઢાળવાળા અભિલંબનું સમીકરણ	$y = mx - 2am - am^3$	$x = my - 2bm - bm^3$
17.	અભિલંબના લંબપાદના યામ	$\left(am^2, -2am\right)$	$\left(-2bm, bm^2\right)$
18.	t બિંદુ આગળ અભિલંબનું સમીકરણ	$y = -tx + 2at + at^3$	$x = bt^3 + 2bt - yt$

- પરવલયનો નાભિલંબ એ પરવલયની સૌથી નાનામાં નાની નાભિજીવા છે.
- પરવલયની નાભિજીવાનાં અંત્યબિંદુઓએ દોરેલા સ્પર્શકો નિયામિકા પર કાટખૂણે છેદે છે.
- $P\left(at_1^2, 2at_1\right)$ અને $Q\left(at_2^2, 2at_2\right)$ એ પરવલય પરનાં બે ભિન્ન બિંદુઓ હોય, તો $\overline{PQ}$ ને સમાવતી રેખાનું સમીકરણ $y(t_1+t_2)=2(x+at_1t_2)$.
- પરવલય $y^2=4ax$ની નાભિજીવાનું એક અંત્યબિંદુ $P\left(at^2, 2at\right)$ હોય, તો બીજા અંત્યબિંદુ Qના યામ $\left(\frac{a}{t^2}, \frac{-2a}{t}\right)$ થાય તથા નાભિજીવાની લંબાઈ $PQ=|a|\left(t+\frac{1}{t}\right)^2$.
- પરવલય $y^2=4ax$ની બહારના બિંદુ $P(x_1, y_1)$માંથી પરવલયને દોરેલા સ્પર્શકો $\overleftrightarrow{PA}$ અને $\overleftrightarrow{PB}$ હોય તથા જીવા $\overline{AB}$ સાથે ΔPAB બને, તો

  ΔPABનું ક્ષેત્રફળ $=\dfrac{\sqrt{\left(y_1^2-4ax_1\right)^3}}{2a}$. જીવા $\overline{AB}$ની લંબાઈ $=\dfrac{\sqrt{\left(y_1^2-4ax_1\right)\left(y_1^2+4a^2\right)}}{a}$
- રેખા $px+qy+r=0$ એ પરવલય $y^2=4ax$નો અભિલંબ બને તેની શરત $ap\left(p^2+2q^2\right)=q$
- પરવલયના નાભિલંબનાં અંત્યબિંદુઓએ દોરેલા અભિલંબો પરવલયના અક્ષ પર કાટખૂણે છેદે છે.
- પરવલયના અર્ધનાભિલંબની લંબાઈ એ પરવલયની નાભિજીવાના નાભિથી બનતા રેખાખંડોની લંબાઈઓનો સ્વરિત મધ્યક છે.

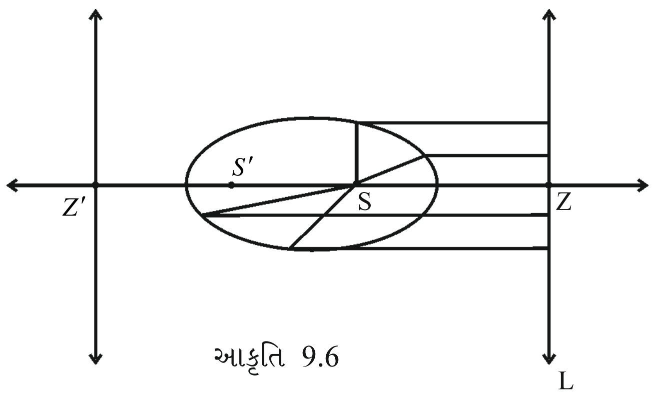
પરવલયના ગુણધર્મો

- $P(t_1)$ અને $Q(t_2)$ પરવલય $y^2=4ax$ પરનાં બિંદુઓ છે. જો $\overline{PQ}$ નાભિજીવા હોય, તો $t_1t_2=-1$
- જો પરવલય $y^2=4ax$ $(a>0)$ની નાભિ S હોય અને $\overline{PQ}$ નાભિજીવા હોય, તો $\frac{1}{SP}+\frac{1}{SQ}=\frac{1}{a}$.
- પરવલય $y^2=4ax$ની નાભિ S છે અને P પરવલય પરનું કોઈ પણ બિંદુ છે. ધારો કે $\overrightarrow{PQ}$ પરવલયના અક્ષને સમાંતર છે. $\angle SPQ$નો દ્વિભાજક પરવલયના અક્ષને બિંદુ Gમાં છેદે, તો $\overline{SP}\cong\overline{SG}$.
- રેખા $y=mx+c$ એ પરવલય $y^2=4ax$નો સ્પર્શક બને તે માટેની શરત $c=\dfrac{a}{m}$ છે. સ્પર્શબિંદુના યામ $\left(\frac{a}{m^2}, \frac{2a}{m}\right)$ છે.
- $y^2=4ax$ તથા $x^2=4by$ના સામાન્ય સ્પર્શકનું સમીકરણ $a^{\frac{1}{3}}x+b^{\frac{1}{3}}y+(ab)^{\frac{2}{3}}=0$

ઉપવલય

- **ઉપવલય :** સમતલમાં નિશ્ચિત બિંદુ અને તે સમતલની તે બિંદુમાંથી પસાર ન થતી હોય, તેવી નિશ્ચિત રેખાથી જે બિંદુઓના લંબઅંતરનો ગુણોત્તર e અચળ હોય અને આ ગુણોત્તર 1 કરતા નાનો હોય, તેવાં બિંદુઓના

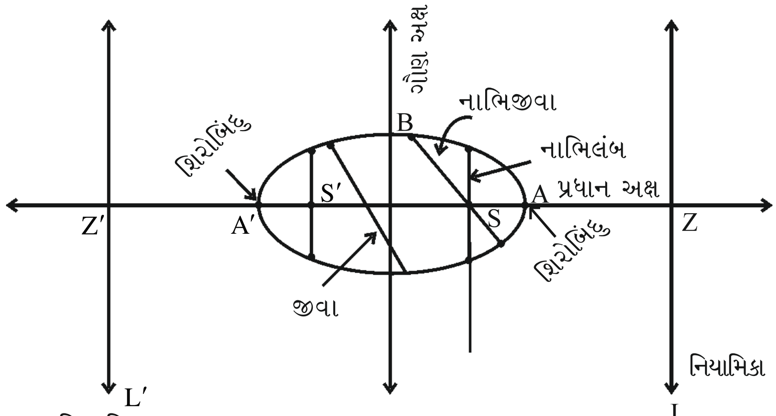
ગણને ઉપવલય કહે છે. આ ગુણોત્તર eને ઉપવલયની ઉત્કેન્દ્રતા કહે છે.
અહીં, નિશ્ચિત બિંદુને ઉપવલયની નાભિ અને નિશ્ચિત રેખાને ઉપવલયની નિયામિકા કહે છે.



આકૃતિ 9.6

- જો નિશ્ચિત બિંદુ S અને નિશ્ચિત રેખા Lની મદદથી ઉપવલયની રચના થાય, તો સમતલમાં નિશ્ચિત બિંદુ S′ અને નિશ્ચિત રેખા L′ મળે જ કે જેથી, S′ અને L′ પણ તે જ ઉપવલયની રચના કરે.

આમ, ઉપવલયને બે નાભિ અને બે નિયામિકા હોય છે.



આકૃતિ 9.7

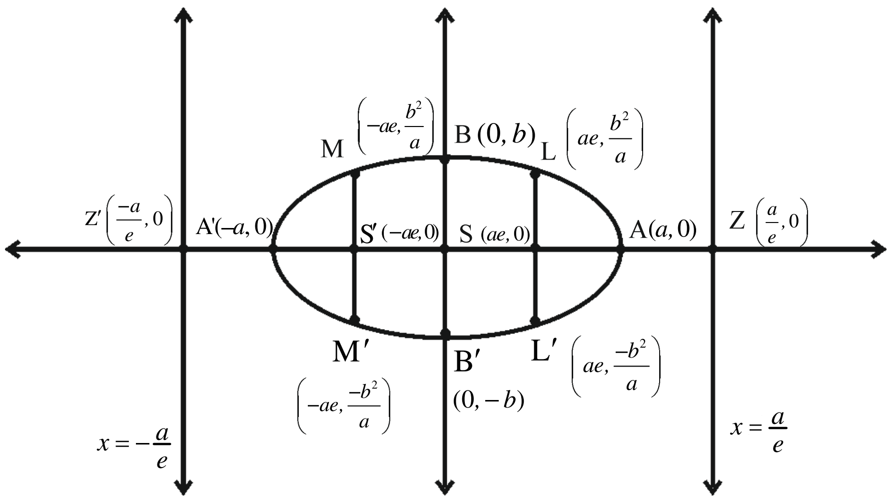
- ઉપવલયના કોઈ પણ બે બિંદુને જોડતા રેખાખંડને ઉપવલયની **જીવા** કહે છે.
- નાભિમાંથી પસાર થતી ઉપવલયની જીવાને ઉપવલયની **નાભિજીવા** કહે છે.
- નાભિમાંથી પસાર થતી અને નિયામિકાને લંબ હોય તેવી રેખાને **ઉપવલયનો અક્ષ (પ્રધાન અક્ષ)** કહે છે.
- પ્રધાન અક્ષના ઉપવલય સાથેનાં છેદબિંદુઓ અંત્યબિંદુ હોય, તે રેખાખંડની લંબદ્વિભાજક રેખાને **ઉપવલયનો ગૌણ અક્ષ** કહે છે.
- ઉપવલયના પ્રધાન અક્ષને લંબ નાભિજીવાને ઉપવલયનો **નાભિલંબ** કહે છે.
- ઉપવલયના બંને અક્ષોના છેદબિંદુને ઉપવલયનું **કેન્દ્ર** કહે છે.
- ઉપવલયના અક્ષો સાથેનાં છેદબિંદુઓને ઉપવલયનાં **શિરોબિંદુઓ** કહે છે.
- પ્રધાન અક્ષ X-અક્ષ હોય અને કેન્દ્ર $(0,0)$ તથા પ્રધાન અક્ષ પરના ઉપવલયનાં શિરોબિંદુઓ $A(a,0)$ અને $A'(-a,0)$ હોય, તેવા **ઉપવલયનું સમીકરણ** $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2(1-e^2)}=1$ **છે.** $(e<1)$

$\therefore a^2\left(1-e^2\right)=b^2$ **લેતાં** $a>b$ **થાય અને ઉપવલયનું સમીકરણ** $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ **થાય.**

- પ્રધાન અક્ષ Y-અક્ષ હોય અને કેન્દ્ર $(0,0)$ તથા પ્રધાન અક્ષ પરના ઉપવલયનાં શિરોબિંદુઓ $B(0,b)$ અને $B'(0,-b)$ હોય તેવા ઉપવલયનું સમીકરણ $\frac{x^2}{b^2\left(1-e^2\right)}+\frac{y^2}{b^2}=1$ છે. (જ્યાં $(e<1)$)

  $\therefore b^2\left(1-e^2\right)=a^2$ લેતાં $a<b$ થાય અને ઉપવલયનું સમીકરણ $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ થાય.

- **ઉપવલય :** $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ **જ્યાં** $a>b$ **માટે :**



આકૃતિ 9.8

(1) $b^2=a^2\left(1-e^2\right)$

(2) ઉપવલયનું કેન્દ્ર $(0,0)$ છે.

(3) ઉપવલયની નાભિઓ $S(ae,0)$ અને $S'(-ae,0)$ છે.

(4) ઉપવલયની નાભિઓ $S(ae,0)$ અને $S'(-ae,0)$ વચ્ચેનું અંતર $SS'=2ae$ છે.

(5) ઉપવલયની નિયામિકાનાં સમીકરણ $x=\frac{a}{e}$ અને $x=-\frac{a}{e}$ છે.

(6) ઉપવલયની નિયામિકાઓ વચ્ચેનું અંતર $\frac{2a}{e}$ છે.

(7) ઉપવલયનાં શિરોબિંદુઓ $A(a,0), A'(-a,0), B(0,b)$ અને $B'(0,-b)$ છે.

(8) ઉપવલયનો પ્રધાન અક્ષ X-અક્ષ છે અને પ્રધાન અક્ષની લંબાઈ $2a$ છે.

(9) ઉપવલયનો ગૌણ અક્ષ Y-અક્ષ છે અને ગૌણ અક્ષની લંબાઈ $2b$ છે.

(10) અર્ધ પ્રધાન અક્ષની લંબાઈ a અને અર્ધ ગૌણ અક્ષની લંબાઈ b છે.

(11) ઉપવલયના નાભિલંબની લંબાઈ $\frac{2b^2}{a}$ છે.

(12) ઉપવલયના નાભિલંબનાં અંત્યબિંદુઓ $L\left(ae,\dfrac{b^2}{a}\right)$, $L'\left(ae,\dfrac{-b^2}{a}\right)$, $M\left(-ae,\dfrac{b^2}{a}\right)$ અને $M'\left(-ae,\dfrac{-b^2}{a}\right)$ છે.

(13) ઉપવલય બંને અક્ષ પ્રત્યે સંમિત છે.

ઉપવલય કેન્દ્રિય વક્ર છે એટલે કે ઊગમબિંદુ પ્રત્યે સંમિત છે. જો (x, y) વક્રનું બિંદુ હોય, ત્યારે $(x, -y)$, $(-x, y)$, $(-x, -y)$ પણ વક્રનું બિંદુ હોય, તો વક્ર ઊગમબિંદુ પ્રત્યે સંમિત છે તેમ કહેવાય.

(14) જો P એ ઉપવલયનું બિંદુ હોય, તો $\dfrac{SP}{PM} = e$

જ્યાં SP = Pનું S થી લંબઅંતર અને PM = Pનું નિયામિકાથી લંબઅંતર. જ્યાં $e < 1$

(15) **ઉપવલયનાં પ્રચલ સમીકરણો**

$x = a\cos\theta,\ y = b\sin\theta,\ \theta \in (-\pi, \pi]$ છે.

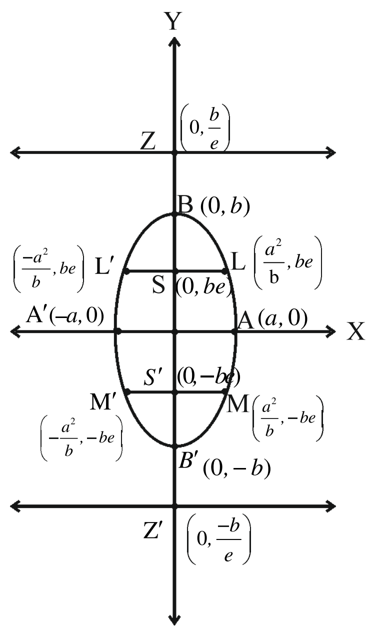
(16) ઉપવલયનું θ - બિંદુ, $P(\theta) = (a\cos\theta, b\sin\theta)$ છે.

(17) જો $P(\theta) = (a\cos\theta, b\sin\theta)$ એ ઉપવલયનું બિંદુ હોય, તો $SP = a(1 - e\cos\theta), S'P = a(1 + e\cos\theta)$

જ્યાં $\theta \in (-\pi, \pi]$

(18) જો P એ ઉપવલય પરનું બિંદુ હોય, તો $SP + S'P = 2a$

- **ઉપવલય** $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ જ્યાં $b > a$ માટે.



આકૃતિ 9.9

(1) $a^2 = b^2(1 - e^2)$

(2) ઉપવલયનું કેન્દ્ર $(0,0)$ છે.

(3) ઉપવલયની નાભિઓ $S(0, be)$ અને $S'(0, -be)$ છે.

(4) ઉપવલયની નાભિઓ $S(0, be)$ અને $S'(0, -be)$ વચ્ચેનું અંતર $SS' = 2be$ છે.

(5) ઉપવલયની નિયામિકાનાં સમીકરણ $y = \dfrac{b}{e}$ અને $y = \dfrac{-b}{e}$ છે.

(6) ઉપવલયની નિયામિકાઓ વચ્ચેનું અંતર $\dfrac{2b}{e}$ છે.

(7) ઉપવલયનાં શિરોબિંદુઓ $A(a, 0)$, $A'(-a, 0)$, $B(0, b)$ અને $B'(0, -b)$ છે.

(8) ઉપવલયનો પ્રધાન અક્ષ Y-અક્ષ છે અને પ્રધાન અક્ષની લંબાઈ $2b$ છે.

(9) ઉપવલયનો ગૌણ અક્ષ X-અક્ષ છે અને ગૌણ અક્ષની લંબાઈ $2a$ છે.

(10) અર્ધ પ્રધાન અક્ષની લંબાઈ b અને અર્ધ ગૌણ અક્ષની લંબાઈ a છે.

(11) ઉપવલયના નાભિલંબની લંબાઈ $\frac{2a^2}{b}$ છે.

(12) ઉપવલયના નાભિલંબનાં અંત્યબિંદુઓ $L\left(\frac{a^2}{b}, be\right)$, $L'\left(\frac{-a^2}{b}, be\right)$, $M\left(\frac{a^2}{b}, -be\right)$ અને $M'\left(\frac{-a^2}{b}, -be\right)$ છે.

(13) ઉપવલય બંને અક્ષ પ્રત્યે સંમિત છે. ઉપવલય કેન્દ્રિય વક્ર છે એટલે કે ઊગમબિંદુ પ્રત્યે સંમિત છે.

(14) ઉપવલયનાં પ્રચલ સમીકરણો $x = a\,cos\theta,\ y = b\,sin\,\theta,\ \theta \in (-\pi, \pi]$ છે.

(15) જો P એ ઉપવલયનું બિંદુનું હોય, તો $\frac{SP}{PM} = e$ જ્યાં SP = P નું S થી અંતર અને PM = P નું નિયામિકાથી લંબઅંતર.

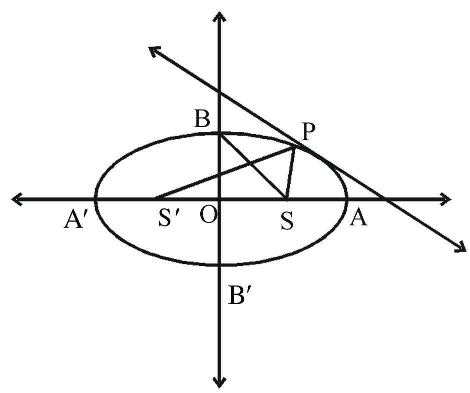
(16) જો ઉપવલયનું $\theta -$ બિંદુ $P(\theta) = (a\,cos\,\theta, b\,sin\,\theta)$ છે.

(17) જો $P(\theta) = (a\,cos\,\theta, b\,sin\,\theta)$ એ ઉપવલયનું બિંદુ હોય, તો

$SP = b(1 - e\,cos\,\theta), S'P = b(1 + e\,cos\,\theta)$ જ્યાં $\theta \in (-\pi, \pi]$.

(18) જો P એ ઉપવલય પરનું બિંદુ હોય, તો $SP + S'P = 2b$.

- $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad a > b$



આકૃતિ 9.10

(1) ઉપવલયની નાભિ S અને પ્રધાન અક્ષનાં અંત્યબિંદુઓ A અને A' હોય, તો $AS \cdot A'S = b^2$.

(2) ઉપવલયની નાભિથી તેના ગૌણ અક્ષનાં અંત્યબિંદુઓ સુધીનું અંતર તેના અર્ધ-પ્રધાન અક્ષની લંબાઈ જેટલું હોય છે. ગૌણ અક્ષ પર આવેલ શિરોબિંદુ $B(0,b)$ છે. તે જ રીતે $B'(0,-b)$ આથી, $SB' = S'B = a$

(3) નાભિ S અને S' માંથી ઉપવલય પરના બિંદુ P આગળના સ્પર્શકોને દોરેલ લંબના પાદ અનુક્રમે L અને L' હોય, તો $SL \cdot S'L' = b^2$.

(4) ઉપવલયના કોઈ બિંદુ P આગળ સ્પર્શકને લંબરેખા એ $\angle SPS'$નો દ્વિભાજક છે.

અતિવલય

જે બિંદુઓના એક નિશ્ચિત બિંદુથી અંતર અને તે બિંદુમાંથી પસાર ન થતી હોય તેવી રેખાની લંબઅંતરનો ગુણોત્તર અચળ હોય અને તે ગુણોત્તર 1 કરતાં મોટો હોય તેવાં બિંદુઓના ગણને અતિવલય કહે છે.

નોંધ : આ નિશ્ચિત ગુણોત્તરને e દ્વારા દર્શાવાય છે તથા e ને તેની ઉત્કેન્દ્રતા કહે છે. અતિવલય માટે $e>1$.

- અતિવલય **બંને અક્ષો પ્રત્યે** તેમજ **ઊગમબિંદુ પ્રત્યે** સંમિત છે.
- અતિવલયનું કેન્દ્ર **ઊગમબિંદુ** છે.
- જેનાં અંત્યબિંદુઓ અતિવલય પર હોય તેવા રેખાખંડને અતિવલયની **જીવા** કહે છે.
- નાભિમાંથી પસાર થતી અતિવલયની જીવાને **નાભિજીવા** કહે છે.
- અતિવલયની જે નાભિજીવા તેના મુખ્ય અક્ષને લંબ હોય તેને અતિવલયનો **નાભિલંબ** કહે છે.
- અતિવલયના કોઈ પણ બે બિંદુઓને જોડતા રેખાખંડને અતિવલયની **જીવા** કહે છે.
- નાભિમાંથી પસાર થતી અને નિયામિકાને લંબરેખાને અતિવલયનો **મુખ્ય અક્ષ** કહે છે.
- પ્રધાન અક્ષના અતિવલય સાથેનાં છેદબિંદુઓ અંત્યબિંદુઓ હોય, તે રેખાખંડના લંબદ્વિભાજક રેખાને અતિવલયની **અનુબદ્ધ અક્ષ** કહે છે.
- અતિવલયના અક્ષો સાથેનાં છેદબિંદુઓને અતિવલયનાં શિરોબિંદુઓ કહે છે.

અતિવલય $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ માટે :

(1) અતિવલયનું કેન્દ્ર $(0,0)$.

(2) અતિવલયની નાભિઓ $S(ae,0), S'(-ae,0)$ છે.

(3) અતિવલયની નાભિઓ વચ્ચેનું અંતર $SS'=2ae$.

(4) અતિવલયની ઉત્કેન્દ્રતા $e>1$ અને તે માટે $b^2=a^2(e^2-1)$.

(5) અતિવલયની નિયામિકાઓનાં સમીકરણો $x=\pm\frac{a}{e}$.

(6) અતિવલયની બે નિયામિકાઓ વચ્ચેનું અંતર $\frac{2a}{e}$.

(7) અતિવલયનો મુખ્ય અક્ષ X-અક્ષ છે. અનુબદ્ધ અક્ષ Y-અક્ષ છે.

(8) અતિવલયનાં મુખ્ય અક્ષની લંબાઈ $2a$ અને અતિવલયના અનુબદ્ધ અક્ષની લંબાઈ $2b$ છે.

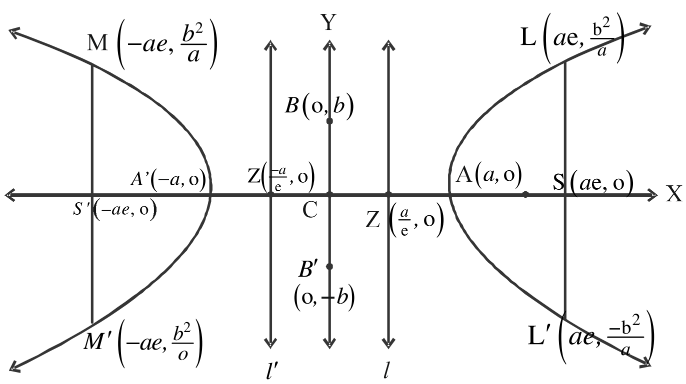
(9) અતિવલયના અર્ધ પ્રધાન અક્ષની લંબાઈ a અને અર્ધ અનુબદ્ધ અક્ષની લંબાઈ b છે.

(10) અતિવલયના નાભિલંબની લંબાઈ $\frac{2b^2}{a}$ છે.

(11) અતિવલયના શિરોબિંદુઓ $A(a,0), A'(-a,0), B(0,b), B'(0,-b)$ છે.

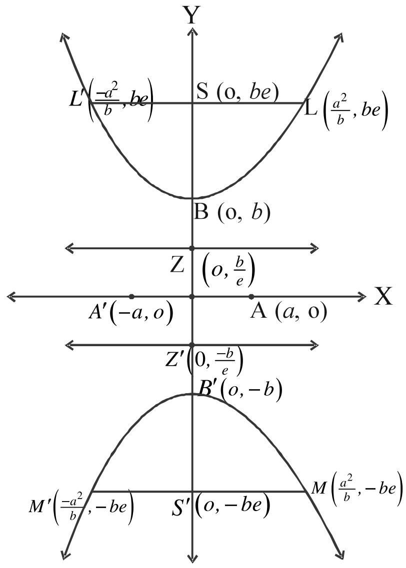
(12) અતિવલયના નાભિલંબનાં અંત્યબિંદુઓ $\left(ae,\pm\frac{b^2}{a}\right), \left(-ae,\pm\frac{b^2}{a}\right)$ છે.

(13) અતિવલયનાં પ્રચલ સમીકરણ $x=a\sec\theta, y=b\tan\theta$ જ્યાં $\theta\in(-\pi,\pi)-\left\{\pm\frac{\pi}{2}\right\}$.



આકૃતિ 9.11

અતિવલય $\frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1$:



આકૃતિ 9.12

(1) અતિવલયનું કેન્દ્ર $(0, 0)$.

(2) અતિવલયની નાભિઓ $(0, \pm be)$.

(3) અતિવલયની નાભિઓ વચ્ચેનું અંતર $= 2be$.

(4) અતિવલયની ઉત્કેન્દ્રતા $e > 1$ અને તે માટે $a^2 = b^2(e^2 - 1)$ છે.

(5) અતિવલયની નિયામિકાઓનાં સમીકરણો $y = \pm \frac{b}{e}$.

(6) અતિવલયની બે નિયામિકાઓ વચ્ચેનું અંતર $\frac{2b}{e}$ છે.

(7) અતિવલયનો મુખ્ય અક્ષ Y-અક્ષ છે અને અનુબદ્ધ અક્ષ X-અક્ષ છે.

(8) અતિવલયના મુખ્ય અક્ષની લંબાઈ $2b$ અને અનુબદ્ધ અક્ષની લંબાઈ $2a$ છે.

(9) અતિવલયના અર્ધ મુખ્ય અક્ષની લંબાઈ b અને અર્ધ અનુબદ્ધ અક્ષની લંબાઈ a છે.

(10) અતિવલયના નાભિલંબની લંબાઈ $\frac{2a^2}{b}$ છે.

(11) અતિવલયનાં શિરોબિંદુઓ $A(a, 0), A'(-a, 0), B(0, b), B'(0, -b)$ છે.

(12) અતિવલયના નાભિલંબનાં અંત્યબિંદુઓ $\left(\pm \frac{a^2}{b}, be\right), \left(\pm \frac{a^2}{b}, -be\right)$ છે.

બહુવિકલ્પી પ્રશ્નો

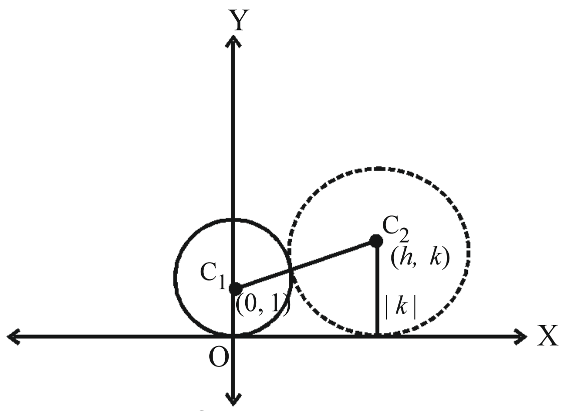
(1) X-અક્ષને સ્પર્શતા અને વર્તુળ $x^2 + (y-1)^2 = 1$ને બહારથી સ્પર્શતા વર્તુળનાં કેન્દ્રોના બિંદુગણનું સમીકરણ

(A) $\{(x, y) \mid x^2 + (y-1)^2 = 4 : y \ge 0\} \cup \{(x, y) \mid y < 0\}$

(B) $\{(x, y) \mid x^2 = 4y : y \ge 0\} \cup \{(0, y) \mid y < 0\}$

(C) $\{(x, y) \mid x^2 = y : y \ge 0\} \cup \{(x, y) \mid y < 0\}$

(D) $\{(x, y) \mid x^2 = 4y : y \ge 0\} \cup \{(x, y) \mid y < 0\}$



આકૃતિ 9.13

ઉકેલ : આપેલ વર્તુળ $S_1 : x^2 + (y-1)^2 = 1$નું કેન્દ્ર $C_1(0,1)$ અને ત્રિજ્યા $r_1 = 1$ છે.

ધારો કે આપેલ વર્તુળને બહારથી સ્પર્શતા તથા X-અક્ષને સ્પર્શતા વર્તુળનું કેન્દ્ર $c_2(h, k)$ છે.

$\therefore$ તે વર્તુળની ત્રિજ્યા = | કેન્દ્રનો y-યામ | = $|k|$

$\therefore$ અહીં S_2 એ S_1ને બહારથી સ્પર્શે છે.

$\therefore$ $C_1C_2 = r_1 + r_2$

$\therefore$ $\sqrt{(h-0)^2 + (k-1)^2} = 1 + |k|$

$\therefore$ $h^2 + k^2 - 2k + 1 = 1 + 2|k| + k^2$

$\therefore$ $h^2 = 2k + 2|k|$

$\therefore$ વર્તુળના કેન્દ્રના બિંદુનો બિંદુપથ $x^2 = 2y + 2|y|$

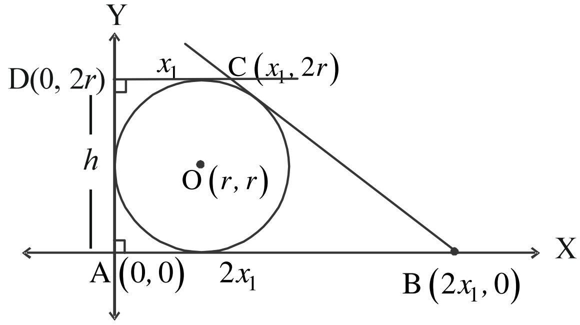
જો $y \ge 0$ તો $x^2 = 4y$

જો $y < 0$ તો $x = 0$

$\therefore$ માંગેલ બિંદુપથ $\{(x, y) \mid x^2 = 4y, y \ge 0\} \cup \{(0, y) \mid y < 0\}$ **જવાબ : (B)**

(2) ધારો કે ABCD એક સમલંબ ચતુષ્કોણ છે, જેનું ક્ષેત્રફળ 18 એકમ છે. $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$ તથા AB = 2CD. $\overline{AD} \perp \overline{AB}$ અને $\overline{AD} \perp \overline{CD}$ છે. ચતુષ્કોણ ABCDની અંદરની બાજુઓને સ્પર્શતા વર્તુળની ત્રિજ્યા = ...

(A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4



આકૃતિ 9.14

ઉકેલ : ધારો કે $CD = x_1, AB = 2CD = 2x_1$ અને $h = 2r$ તથા $A(0, 0), B(2x_1, 0), C(x_1, 2r), D(0, 2r)$ થશે.

$\therefore \square ABCD$ નું ક્ષેત્રફળ $= \frac{1}{2} \times$ (બે સમાંતર બાજુના માપનો સરવાળો) $\times$ (બે સમાંતર બાજુઓ વચ્ચેનું લંબઅંતર)

$$= \frac{1}{2} \times (x_1 + 2x_1) \times h$$

$$= \frac{3}{2} x_1 h$$

$$18 = \frac{3}{2} x_1 2r$$

$$\therefore r x_1 = 6 \qquad (1)$$

$\therefore \overleftrightarrow{BC}$ નું સમીકરણ $y - 0 = \frac{-2r}{x_1}(x - 2x_1)$

$$\therefore y = \frac{-2r}{x_1} x + 4r$$

$$\therefore \frac{2r}{x_1} . x + y - 4r = 0$$

વળી $\overleftrightarrow{BC}$ એ વર્તુળ $(x - r)^2 + (y - r)^2 = r^2$નો સ્પર્શક છે.

$\therefore$ કેન્દ્રથી સ્પર્શકનું લંબઅંતર = ત્રિજ્યા

$$\therefore \frac{\left|\frac{2r^2}{x_1} + r - 4r\right|}{\sqrt{\frac{4r^2}{x_1^2} + 1}} = r$$

$$\therefore \left|\frac{2r^2}{x_1} - 3r\right| = r\sqrt{\frac{4r^2}{x_1^2} + 1}$$

$$\therefore (2r - 3x_1)^2 = x_1^2 + 4r^2$$

$\therefore r . x_1 = \frac{2}{3} x_1^2.$ આથી $3r = 2x_1$ $\qquad (x_1 \neq 0)$

(1) પરથી $x_1 = \frac{6}{r}$. આથી $3r = 2\left(\frac{6}{r}\right)$ આથી $r = 2$ **જવાબ : (B)**

(3) રેખા $y = kx + c$ ઊગમબિંદુમાંથી પસાર થતી હોય તથા વર્તુળ $x^2 + y^2 - 20x + 10y + 100 = 0$ને છેદતી ન હોય, તો k ની કિંમતોનો ગણ ......

(A) $\left(-\infty, -\frac{4}{3}\right) \cup \left(-\frac{4}{3}, \infty\right)$ (B) $(-\infty, \infty)$

(C) $\left(-\infty, -\frac{4}{3}\right) \cup (0, \infty)$ (D) $\left(-\frac{4}{3}, \frac{4}{3}\right)$

ઉકેલ : અહીં રેખા $y = kx + c$ ઊગમબિંદુમાંથી પસાર થાય છે.

$\therefore$ c = 0

$\therefore$ આથી, રેખા $kx - y = 0$ થશે.

વર્તુળ $x^2 + y^2 - 20x + 10y + 100 = 0$નું કેન્દ્ર = (10, –5) અને ત્રિજ્યા $= \sqrt{100 + 25 - 100} = 5$

રેખા, વર્તુળને છેદતી નથી.

$\therefore$ કેન્દ્ર (10, –5)થી રેખા $kx - y = 0$નું લંબઅંતર > ત્રિજ્યા

$$\therefore \frac{|k(10)+5|}{\sqrt{k^2+1}} > 5$$

$$\therefore |10k + 5| > 5\sqrt{k^2+1}$$

$$\therefore |2k+1| > \sqrt{k^2+1}$$

$$4k^2 + 4k + 1 > k^2 + 1$$

$$\therefore 3k^2 + 4k > 0$$

$$k(3k+4) > 0$$

$\therefore$ k < 0 અને 3k + 4 < 0 અથવા k > 0, 3k + 4 > 0

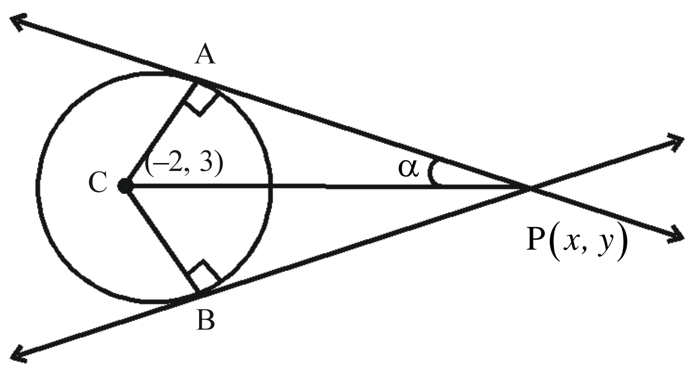
$\therefore$ k < 0 અને $k < -\frac{4}{3}$ અથવા k > 0, $k > -\frac{4}{3}$

$\therefore$ k ની કિંમતોનો ગણ $\left(-\infty, -\frac{4}{3}\right) \cup (0, \infty)$ **જવાબ : (C)**

(4) બહારના બિંદુ Pમાંથી વર્તુળ $x^2 + y^2 + 4x - 6y + 9\sin^2\alpha + 13\cos^2\alpha = 0$ને દોરેલા સ્પર્શકો વચ્ચેના ખૂણાનું માપ 2α છે, તો બિંદુ Pના બિંદુગણનું સમીકરણ ......

(A) $x^2 + y^2 + 4x - 6y + 9 = 0$ (B) $x^2 + y^2 - 4x + 6y + 9 = 0$

(C) $x^2 + y^2 - 4x - 6y + 9 = 0$ (D) $x^2 + y^2 + 4x + 6y + 9 = 0$



આકૃતિ 9.15

ઉકેલ : ધારો કે, વર્તુળની બહારના બિંદુ Pમાંથી દોરેલા સ્પર્શકો $\overleftrightarrow{PA}$ અને $\overleftrightarrow{PB}$ છે તથા તેમની વચ્ચેના ખૂણાનું માપ 2α છે. અહીં, વર્તુળનું કેન્દ્ર C(–2, 3) તથા P(*x, y*) છે.

હવે, Δ APC માં $sin\alpha = \frac{AC}{CP}$

$$= \frac{\sqrt{4+9-9sin^2\alpha - 13cos^2\alpha}}{\sqrt{(x+2)^2+(y-3)^2}}$$

$$\therefore\ sin\alpha = \frac{2\,sin\alpha}{\sqrt{(x+2)^2+(y-3)^2}}$$ ($sin\alpha$ ધન છે.)

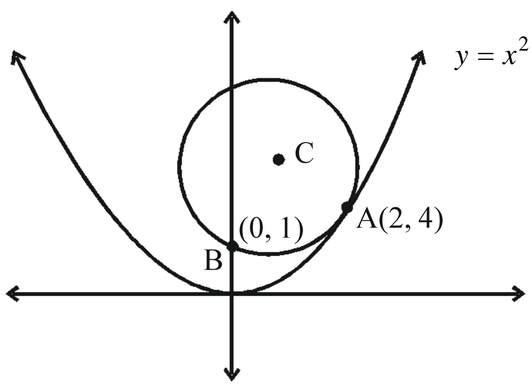
$$\therefore\ (x+2)^2+(y-3)^2 = 4$$

$$\therefore\ x^2+y^2+4x-6y+9=0$$ **જવાબ : (A)**

(5) વક્ર $y = x^2$ને (2, 4) બિંદુ આગળ સ્પર્શતા અને (0, 1) બિંદુમાંથી પસાર થતા વર્તુળનું સમીકરણ ......

(A) $5x^2+5y^2+32x-53y+48=0$ (B) $5x^2+5y^2-32x-53y+48=0$

(C) $5x^2+5y^2+32x+53y+48=0$ (D) $5x^2+5y^2-32x+53y+48=0$



આકૃતિ 9.16

ઉકેલ : ધારો કે માંગેલ વર્તુળનું કેન્દ્ર C(*h, k*) તથા A(2, 4) અને B(0, 1) છે.

$\therefore\ AC^2 = BC^2$

$\therefore\ (h-2)^2+(k-4)^2 = (0-h)^2+(1-k)^2$

$\therefore h^2-4h+4+k^2-8k+16 = h^2+1-2k+k^2$

$4h + 6k - 19 = 0$ (1)

અહીં વક્ર $y = x^2$

$\therefore\ \frac{dy}{dx} = 2x$. આથી $\left(\frac{dy}{dx}\right)_{(2,4)} = 4$

$\therefore$ વક્રના સ્પર્શકનો (2, 4) આગળનો ઢાળ = 4

$\overleftrightarrow{AC}$નો ઢાળ $= \frac{4-k}{2-h}$

$\therefore$ ($\overleftrightarrow{AC}$નો ઢાળ) (વક્રના સ્પર્શકનો (2, 4) બિંદુ આગળનો ઢાળ) = –1

$\therefore \left(\frac{4-k}{2-h}\right)4 = -1$

$\therefore 16 - 4k = -2 + h$

$\therefore h + 4k - 18 = 0$ (2)

(1) અને (2) પરથી, $h = -\frac{16}{5},\ k = \frac{53}{10}$

$\therefore$ વર્તુળના કેન્દ્રના યામ $= \left(-\frac{16}{5}, \frac{53}{10}\right)$

$\therefore$ વર્તુળની ત્રિજ્યા $= \sqrt{\left(0+\frac{16}{5}\right)^2 + \left(1-\frac{53}{10}\right)^2} = \sqrt{\frac{256}{25}+\frac{1849}{100}} = \frac{\sqrt{2873}}{10}$

$\therefore$ માંગેલ વર્તુળનું સમીકરણ

$$\left(x+\frac{16}{5}\right)^2 + \left(y-\frac{53}{10}\right)^2 = \frac{2873}{100}$$

$\therefore x^2 + y^2 + \frac{32x}{5} - \frac{106y}{10} + \frac{256}{25} + \frac{2809}{100} - \frac{2873}{100} = 0$

$\therefore 100x^2 + 100y^2 + 640x - 1060y + 1024 + 2809 - 2873 = 0$

$5x^2 + 5y^2 + 32x - 53y + 48 = 0$ **જવાબ : (A)**

(6) (a, b)માંથી પસાર થતા અને વર્તુળ $x^2 + y^2 = p^2$ ને લંબચ્છેદી વર્તુળના કેન્દ્રનો બિંદુગણ ...... છે.

(A) $x^2 + y^2 - 3ax - 4by + (a^2 + b^2 - p^2) = 0$ (B) $2ax + 2by - (a^2 - b^2 + p^2) = 0$

(C) $x^2 + y^2 - 2ax - 3by + (a^2 - b^2 - p^2) = 0$ (D) $2ax + 2by - (a^2 + b^2 + p^2) = 0$

ઉકેલ : ધારો કે (a, b)માંથી પસાર થતા વર્તુળનું સમીકરણ $x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0$ છે.

$\therefore a^2 + b^2 + 2ag + 2bf + c = 0$ (1)

આપેલ વર્તુળ $x^2 + y^2 - p^2 = 0$ છે.

$\therefore x^2 + y^2 - p^2 = 0$ પરથી $g_1 = 0, f_1 = 0, c_1 = -p^2$

$x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0$ પરથી $g_2 = g, f_2 = f, c_2 = c$

હવે, બંને વર્તુળો લંબચ્છેદી છે.

$\therefore 2g_1g_2 + 2f_1f_2 = c_1 + c_2$

$\therefore 2(0)g + 2(0)f_2 = -p^2 + c$

$\therefore c = p^2$

હવે, ધારો કે (a, b)માંથી પસાર થતા વર્તુળનું કેન્દ્ર $(-g, -f) = (x, y)$ છે.

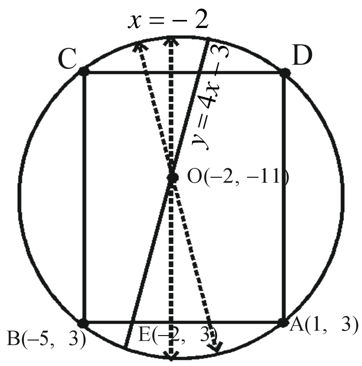
$\therefore g = -x,\ f = -y.$ વળી, $c = p^2$ હોવાથી,

(1) પરથી, $a^2 + b^2 - 2ax - 2by + p^2 = 0$

$\therefore 2ax + 2by - \left(a^2 + b^2 + p^2\right) = 0$ **જવાબ : (D)**

(7) વર્તુળમાં અંતર્ગત લંબચોરસ ABCDનાં શિરોબિંદુઓ A(1, 3) તથા B(–5, 3) છે. વર્તુળના વ્યાસને સમાવતી રેખા $y = 4x - 3$ હોય, તો લંબચોરસના ક્ષેત્રફળ અને પરિમિતિનો ગુણોત્તર ......

(A) 168 : 72 (B) 17 : 21 (C) 168 : 64 (D) 42 : 17



આકૃતિ 9.17

ઉકેલ : અહીં, $\overline{AB}$નું મધ્યબિંદુ E(–2, 3) તથા $\overleftrightarrow{AB}$ સમક્ષિતિજ હોવાથી $\overline{AB}$ના લંબદ્વિભાજકનું સમીકરણ $x = -2$

વર્તુળના વ્યાસને સમાવતી રેખા $y = 4x - 3$ અને લંબદ્વિભાજક $\overleftrightarrow{OE}$ $x = -2$ નું છેદબિંદુ O (–2, –11) એ વર્તુળનું કેન્દ્ર થશે.

$\therefore\ OE = \sqrt{(-2+2)^2 + (3+11)^2} = \sqrt{196} = 14$. આથી, $BC = 28$.

વળી, $AB = \sqrt{(-5-1)^2 + (3-3)^2} = 6$

$\therefore$ લંબચોરસનું ક્ષેત્રફળ $= 28 \times 6 = 168$ લંબચોરસની પરિમિતિ $= 28 + 6 + 28 + 6 = 68$

$\therefore$ લંબચોરસનું ક્ષેત્રફળ : લંબચોરસની પરિમિતિ = 168 : 68

$\therefore$ માંગેલ ગુણોત્તર 42 : 17 **જવાબ : (D)**

(8) જેનું કેન્દ્ર રેખાઓ $3x + 5y = 1$ અને $(2+c)x + 5c^2y = 1$ના છેદબિંદુ આગળનું લક્ષ હોય (જ્યાં $c \to 1$) તથા (2, 0) માંથી પસાર થતું હોય, તેવા વર્તુળનું સમીકરણ ......

(A) $25x^2 + 25y^2 - 4x + 4y - 60 = 0$ (B) $25x^2 + 25y^2 - 20x + 2y - 60 = 0$

(C) $25x^2 + 25y^2 + 4x - 2y - 64 = 0$ (D) $25x^2 + 25y^2 - 4x - 4y - 60 = 0$

ઉકેલ : રેખાઓ $3x + 5y - 1 = 0$ અને $(2+c)x + 5c^2y - 1 = 0$નું છેદબિંદુ $\left(\frac{5c^2 - 5}{15c^2 - 5c - 10}, \frac{1-c}{15c^2 - 5c - 10}\right)$

$$\therefore \text{ વર્તુળનું કેન્દ્ર } = \left(\lim_{c \to 1} \frac{5(c^2 - 1)}{5(3c^2 - c - 2)}, \lim_{c \to 1} \frac{1-c}{5(3c^2 - c - 2)}\right)$$

$$= \left(\lim_{c \to 1} \frac{(c-1)(c+1)}{(3c+2)(c-1)}, \lim_{c \to 1} \frac{c-1}{-5(3c+2)(c-1)}\right) = \left(\lim_{c \to 1} \frac{c+1}{3c+2}, \lim_{c \to 1} \frac{1}{-5(3c+2)}\right)$$

$= \left(\frac{2}{5}, \frac{-1}{25}\right)$

$\therefore$ વર્તુળની ત્રિજ્યા $= \sqrt{\left(2-\frac{2}{5}\right)^2 + \left(0+\frac{1}{25}\right)^2}$

$= \sqrt{\frac{64}{25}+\frac{1}{625}} = \frac{\sqrt{1601}}{25}$

$\therefore$ માંગેલ વર્તુળનું સમીકરણ

$$\left(x-\frac{2}{5}\right)^2 + \left(y+\frac{1}{25}\right)^2 = \frac{1601}{625}$$

$\therefore\ x^2+y^2-\frac{4x}{5}+\frac{2y}{25}+\frac{4}{25}+\frac{1}{625}-\frac{1601}{625}=0$

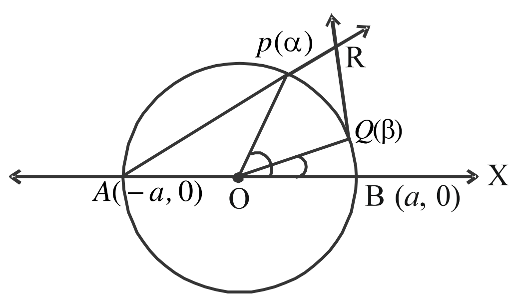
$\therefore\ 625x^2+625y^2-500x+50y-1500=0$

$\therefore\ 25x^2+25y^2-20x+2y-60=0$ **જવાબ : (B)**

(9) ઊગમબિંદુ કેન્દ્ર અને a ત્રિજ્યા ધરાવતું એક વર્તુળ X-અક્ષને A અને Bમાં છેદે છે. $P(\alpha)$ અને $Q(\beta)$ બે વર્તુળ પરનાં બિંદુઓ છે કે જ્યાં $\alpha-\beta=2\gamma$ જ્યાં γ અચળ છે, તો $\overleftrightarrow{AP}$ અને $\overleftrightarrow{BQ}$ ના છેદગણના બિંદુગણનું સમીકરણ ......

(A) $x^2+y^2-2ay\ tan\gamma=a^2$ (B) $x^2+y^2+2ay\ tan\gamma=a^2$

(C) $x^2+y^2+2ay\ tan\gamma=a^2$ (D) $x^2-y^2+2ay\ tan\gamma=a^2$



આકૃતિ 9.18

ઉકેલ : અહીં Aના યામ $(-a, 0)$ અને Pના યામ $(a\,cos\alpha,\ a\,sin\alpha)$

$\overleftrightarrow{AP}$ નું સમીકરણ $y=\frac{a\,sin\alpha}{a(cos\alpha+1)}(x+a) \Rightarrow y=\frac{a\left(2\,sin\frac{\alpha}{2}cos\frac{\alpha}{2}\right)}{a\left(2cos^2\frac{\alpha}{2}\right)}(x+a)$

$\therefore\ y = \tan\left(\frac{\alpha}{2}\right)(x+a)$ (1)

તે જ રીતે $B(a, 0)$ અને $Q(a\,cos\beta,\ a\,sin\beta)$

$\overleftrightarrow{BQ}$ નું સમીકરણ $y=\frac{a\,sin\beta}{a(cos\beta-1)}(x-a)$

$\therefore\ y=-cot\left(\frac{\beta}{2}\right)(x-a)$ (2)

સમીકરણ (1) અને (2) પરથી $tan\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{y}{a+x}$

$$tan\left(\frac{\beta}{2}\right) = \frac{a-x}{y}$$

હવે, $\alpha - \beta = 2\gamma$

$$tan\gamma = \frac{tan\left(\frac{\alpha}{2}\right) - tan\left(\frac{\beta}{2}\right)}{1 + tan\left(\frac{\alpha}{2}\right)\ tan\left(\frac{\beta}{2}\right)} = \frac{\frac{y}{a+x} - \frac{a-x}{y}}{1 + \frac{y}{a+x} \times \frac{a-x}{y}}$$

$$\therefore \quad tan\gamma = \frac{y^2 - a^2 + x^2}{(a+x)y + (a-x)y}$$

$$\therefore \quad tan\gamma = \frac{x^2 + y^2 - a^2}{2ay}$$

$\therefore \quad x^2 + y^2 - 2ay\,tan\gamma = a^2$ માંગેલ બિંદુગણનું સમીકરણ છે. **જવાબ : (A)**

(10) વર્તુળો $x^2 + y^2 = b^2$ અને $(x-a)^2 + y^2 = b^2$ નો સામાન્ય સ્પર્શક $y = mx - b\sqrt{1+m^2}$ હોય તથા $m > 0$ અને $a > 2b > 0$ તો $m = ...$

(A) $\frac{2b}{\sqrt{a^2 - 4b^2}}$ (B) $\frac{\sqrt{a^2 - 4b^2}}{2a}$ (C) $\frac{2b}{a - 2b}$ (D) $\frac{b}{a - 2b}$

ઉકેલ : અહીં વર્તુળો $x^2 + y^2 = b^2$ અને $(x-a)^2 + y^2 = b^2$ ના સામાન્ય સ્પર્શકનું સમીકરણ $y = mx - b\sqrt{1+m^2}$ હોવાથી,
કેન્દ્ર (0, 0)થી સ્પર્શકનું લંબઅંતર $= b$ (ત્રિજ્યા)
તથા કેન્દ્ર (a, 0)થી સ્પર્શકનું લંબઅંતર $= b$ (ત્રિજ્યા)

$$\therefore \quad \frac{\left|-b\sqrt{1+m^2}\right|}{\sqrt{1+m^2}} = \frac{\left|am - 0 - b\sqrt{1+m^2}\right|}{\sqrt{1+m^2}} = b$$

$$\therefore \quad \left|am - b\sqrt{1+m^2}\right|^2 = b^2\left(1+m^2\right)$$

$$\therefore \quad a^2m^2 - 2abm\sqrt{1+m^2} + b^2\left(1+m^2\right) = b^2\left(1+m^2\right)$$

$$\therefore \ m^2a^2 = 2abm\sqrt{1+m^2}$$

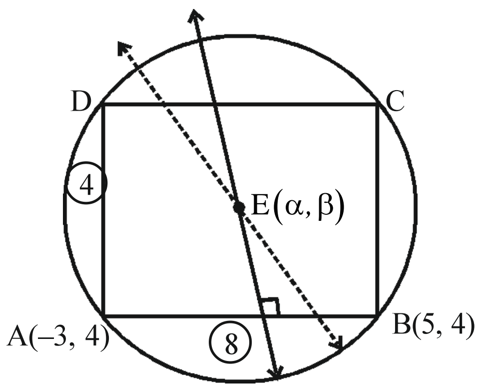
$$\therefore \ am = 2b\sqrt{1+m^2} \qquad (a \neq 0, m \neq 0)$$

$$\therefore \ m^2a^2 = 4b^2\left(1+m^2\right)$$

$\therefore \ m^2 = \frac{4b^2}{a^2 - 4b^2}$. આથી, $m = \frac{2b}{\sqrt{a^2 - 4b^2}}$ $(m > 0)$ **જવાબ : (A)**

(11) વર્તુળ પરનાં બિંદુઓ A(–3, 4), B(5, 4), C અને D લંબચોરસ બનાવે છે. વર્તુળના વ્યાસને સમાવતી રેખાનું સમીકરણ $x-4y+7=0$ હોય, તો લંબચોરસનું ક્ષેત્રફળ ...... થાય.

(A) 8 ચોરસ એકમ (B) 16 ચોરસ એકમ (C) 32 ચોરસ એકમ (D) 64 ચોરસ એકમ



આકૃતિ 9.19

ઉકેલ : બિંદુઓ A(–3, 4), B(5, 4) એ વર્તુળના વ્યાસ $x-4y+7=0$ પર આવેલ નથી.

ધારો કે બિંદુ $E(\alpha, \beta)$ એ વર્તુળનું કેન્દ્ર છે.

$\therefore \ \alpha - 4\beta + 7 = 0$ (1)

અહીં □ $ABCD$ લંબચોરસ છે.

$\therefore \ EA = EB \Rightarrow EA^2 = EB^2$ આથી, $(\alpha+3)^2 = (\alpha-5)^2$

$\therefore \ 6\alpha + 9 = -10\alpha + 25$ આથી E(1, 2)

આથી, (1) પરથી $\alpha = 1, \ \beta = 2$

$\therefore \ AB = \sqrt{(5+3)^2 + (4-4)^2} = 8$

$BD = 2EB = 2\sqrt{(5-1)^2 + (4-2)^2} = 4\sqrt{5}$

કાટકોણ ત્રિકોણ ABD પરથી,

$AD^2 + AB^2 = BD^2$ આથી, $AD^2 = BD^2 - AB^2 = 80 - 64 = 16$

$\therefore \ AD = 4$

□ $ABCD$ લંબચોરસનું ક્ષેત્રફળ $= AB \bullet AD = 8 \times 4 = 32$ ચોરસ એકમ **જવાબ : (C)**

બીજી રીત :

AB = |5 – (–3)| = 8

M = $\overline{AB}$ ના મધ્યબિંદુના યામ = (1, 4)

$\therefore \ \overleftrightarrow{EM}$નું સમીકરણ $x = 1$.

$\therefore \ \alpha = 1$. પરંતુ $\alpha - 4\beta + 7 = 0$

$\therefore \ \beta = 2$

$\therefore$ EM = |4 – 2| = 2

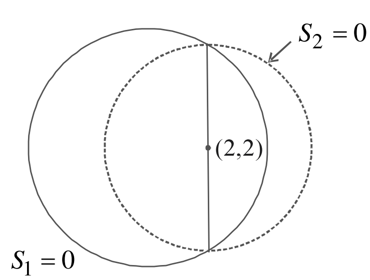
$\therefore$ AD = 4

$\therefore$ માંગેલ ક્ષેત્રફળ = 8 × 4 = 32

(12) વર્તુળ $x^2 + y^2 + 4x + 25y + m = 0$ એ વર્તુળ $x^2 + y^2 - 4x - 4y + n = 0$ના પરિઘને દુભાગે, તો $n - m$ = ... થાય.

(A) 64 (B) 68 (C) 74 (D) 78

ઉકેલ : અહીં, $S_1 : x^2 + y^2 + 4x + 25y + m = 0$, $S_2 : x^2 + y^2 - 4x - 4y + n = 0$ છે.



આકૃતિ 9.20

વર્તુળ S_1 એ વર્તુળ S_2ના પરિઘને દુભાગે છે.

$\therefore$ તેમની સામાન્ય જીવાને સમાવતી રેખાનું સમીકરણ $S_1 - S_2 = 0$ થાય.

$\therefore$ સામાન્ય જીવાને સમાવતી રેખાનું સમીકરણ $8x + 29y + m - n = 0$

S_2નું કેન્દ્ર (2, 2) આ રેખા પર છે.

$\therefore\ 16 + 58 + m - n = 0$

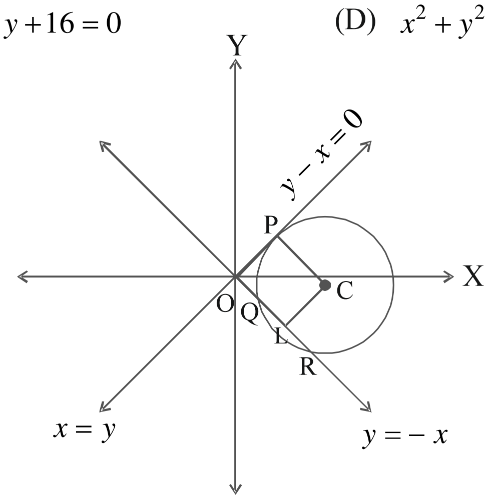
$\therefore\ m - n = -74$

$\therefore\ n - m = 74$ **જવાબ : (C)**

(13) એક વર્તુળ રેખા $y = x$ને બિંદુ Pમાં સ્પર્શે છે અને $\overline{OP}$નું માપ $4\sqrt{2}$ છે, જ્યાં O ઊગમબિંદુ છે. (10, –2) વર્તુળના અંદરના ભાગનું બિંદુ છે. રેખા $x + y = 0$ દ્વારા વર્તુળ પર કપાતી જીવાની લંબાઈ $6\sqrt{2}$ હોય, તો તે વર્તુળનું સમીકરણ ......

(A) $x^2 + y^2 + 9x + 2y + 32 = 0$ (B) $x^2 + y^2 + 18x + 2y + 16 = 0$

(C) $x^2 + y^2 - 18x - 2y + 16 = 0$ (D) $x^2 + y^2 - 18x + 2y + 32 = 0$



આકૃતિ 9.21

ઉકેલ : ધારો કે $\overline{CL} \perp \overline{QR}$, જ્યાં $\overline{QR}$ વર્તુળની આપેલ જીવા છે. જ્યાં C વર્તુળનું કેન્દ્ર છે.

OPCL લંબચોરસ છે કે જેથી $OP = 4\sqrt{2} = CL$ અને $QL = \frac{1}{2}QR = 3\sqrt{2}$

$\therefore\ r = CQ = \sqrt{CL^2 + LQ^2} = \sqrt{\left(4\sqrt{2}\right)^2 + \left(3\sqrt{2}\right)^2} = 5\sqrt{2}$

$\therefore\ CP = 5\sqrt{2}$

ધારો કે વર્તુળનું કેન્દ્ર C (h, k) છે. $x - y = 0$નું Cથી અંતર $5\sqrt{2}$ છે.

$\therefore\ \frac{|h-k|}{\sqrt{2}} = 5\sqrt{2}$ આથી, $k - h = \pm 10$ (1)

$x + y = 0$નું Cથી અંતર $4\sqrt{2}$ છે.

$\therefore\ \frac{|k+h|}{\sqrt{2}} = 4\sqrt{2}$ આથી, $k + h = \pm 8$ (2)

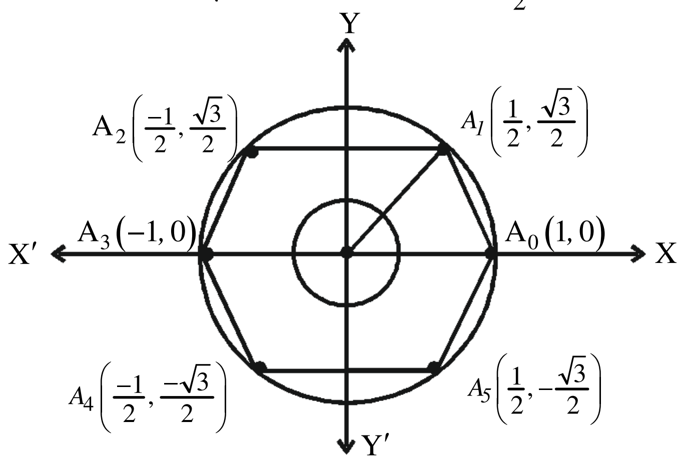
(1) અને (2)ને ઉકેલતાં,
વર્તુળનાં કેન્દ્ર (9, –1), (1, –9), (–1, 9), (–9, 1) મળે, પરંતુ (10, –2) વર્તુળના અંદરના ભાગમાં હોય, તેવું એકમાત્ર વર્તુળનું કેન્દ્ર (9, –1) છે.

$\therefore$ માંગેલ વર્તુળનું સમીકરણ $(x-9)^2 + (y+1)^2 = \left(5\sqrt{2}\right)^2$

$\therefore\ x^2 + y^2 - 18x + 2y + 32 = 0$ **જવાબ : (D)**

(14) ધારો કે A_0, A_1, A_2, A_3, A_4 અને A_5 એ એકમ વર્તુળની અંતર્ગત નિયમિત ષટકોણનાં શિરોબિંદુઓ છે, તો રેખાખંડો A_0A_1, A_0A_2 અને A_0A_4 નો ગુણાકાર ......

(A) $\frac{3}{4}$ (B) $3\sqrt{3}$ (C) $\frac{3\sqrt{3}}{2}$ (D) 3



આકૃતિ 9.22

ઉકેલ : ધારો કે O(0, 0) કેન્દ્ર અને 1 એકમ ત્રિજ્યા ધરાવતા વર્તુળના શિરોબિંદુ A_0 ના યામ (1, 0) છે.

અહીં, વર્તુળમાં અંતર્ગત નિયમિત ષટ્કોણની અંદરની બાજુ ઊગમબિંદુ આગળ $\frac{\pi}{3}$ ના માપનો ખૂણો બનાવે છે.

$\therefore$ A_1 ના યામ $= \left(cos\frac{\pi}{3}, sin\frac{\pi}{3}\right) = \left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

A_2 ના યામ $= \left(cos\frac{2\pi}{3}, sin\frac{2\pi}{3}\right) = \left(\frac{-1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

A_3 ના યામ $= \left(cos\frac{3\pi}{3}, sin\frac{3\pi}{3}\right) = (-1, 0)$

A_4 ના યામ $= \left(cos\frac{4\pi}{3}, sin\frac{4\pi}{3}\right) = \left(\frac{-1}{2}, \frac{-\sqrt{3}}{2}\right)$

A_5 ના યામ $= \left(cos\frac{5\pi}{3}, sin\frac{5\pi}{3}\right) = \left(\frac{1}{2}, \frac{-\sqrt{3}}{2}\right)$

$$A_\circ A_1 = \sqrt{\left(1-\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{4}+\frac{3}{4}} = 1$$

$$A_\circ A_2 = \sqrt{\left(1+\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{9}{4}+\frac{3}{4}} = \sqrt{3}$$

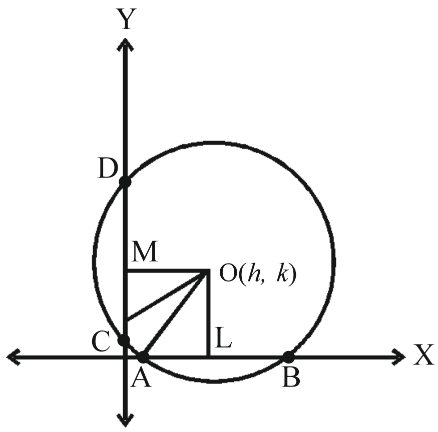
$$A_\circ A_4 = \sqrt{\left(1+\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{9}{4}+\frac{3}{4}} = \sqrt{3}$$

$\therefore$ $(A_\circ A_1)(A_\circ A_2)(A_\circ A_4) = (1)(\sqrt{3})(\sqrt{3}) = 3$ **જવાબ : (D)**

(15) જો a અને b લંબાઈના સળિયાઓ અનુક્રમે X-અક્ષ અને Y-અક્ષ પર આવેલા હોય, તો સળિયાનાં અંત્યબિંદુઓમાંથી પસાર થતા વર્તુળના કેન્દ્રના બિંદુગણનું સમીકરણ ......

(A) $4\left(x^2 - y^2\right) = a^2 + b^2$ (B) $4\left(x^2 - y^2\right) = a^2 - b^2$

(C) $x^2 - y^2 = a^2 - b^2$ (D) $x^2 - y^2 = a^2 + b^2$



આકૃતિ 9.23

ઉકેલ : ધારો કે વર્તુળનું કેન્દ્ર (h, k) છે અને વર્તુળ સળિયાઓ $\overline{AB}$ અને $\overline{CD}$ નાં અંત્યબિંદુઓમાંથી પસાર થાય છે. અર્થાત્ વર્તુળ A, B, C, Dમાંથી પસાર થાય છે.

$\overline{AB}$ અને $\overline{CD}$ સળિયાની લંબાઈ અનુક્રમે a અને b છે.

આકૃતિ પરથી $\overline{OL} \perp \overline{AB}$, $\overline{OM} \perp \overline{CD}$

$\therefore\ AL = \frac{1}{2}AB = \frac{a}{2}$ અને $CM = \frac{1}{2}CD = \frac{b}{2}$

હવે, OA = OC (એક જ વર્તુળની ત્રિજ્યા)

$\therefore\ OA^2 = OC^2$

$\therefore\ OL^2 + AL^2 = OM^2 + CM^2$

$\frac{a^2}{4} + k^2 = h^2 + \frac{b^2}{4}$

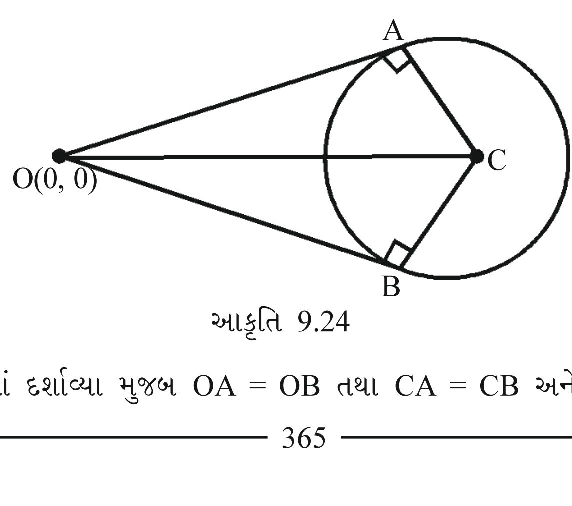
$\therefore\ 4\left(h^2 - k^2\right) = a^2 - b^2$

$\therefore$ કેન્દ્રના બિંદુગણનું સમીકરણ $4\left(x^2 - y^2\right) = a^2 - b^2$ **જવાબ : (B)**

(16) જો $\overline{OA}$ અને $\overline{OB}$ એ વર્તુળ $x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0$ને ઊગમબિંદુમાંથી દોરેલા સ્પર્શકો હોય અને C એ આ વર્તુળનું કેન્દ્ર હોય, તો ચતુષ્કોણ OACBનું ક્ષેત્રફળ = ...

(A) $\frac{1}{2}\sqrt{c\left(g^2 + f^2 - c\right)}$ (B) $\sqrt{c\left(g^2 + f^2 - c\right)}$

(C) $c\sqrt{g^2 + f^2 - c}$ (D) $\frac{\sqrt{g^2 + f^2 - c}}{c}$



આકૃતિ 9.24

ઉકેલ : અહીં, આકૃતિમાં દર્શાવ્યા મુજબ OA = OB તથા CA = CB અને વિકર્ણ $\overline{OC}$ ચતુષ્કોણ OACBને

બે એકરૂપ કાટકોણ ત્રિકોણમાં વિભાજિત કરે છે. તે ત્રિકોણો ΔOAC તથા ΔOBC છે.

$\therefore$ ચતુષ્કોણ OACBનું ક્ષેત્રફળ = 2 (ત્રિકોણ OACનું ક્ષેત્રફળ)

= 2 × $\left(\frac{1}{2} \times \text{પાયો} \times \text{વેધ}\right)$

= $2 \times \frac{1}{2} \times OA \times AC$

= $\sqrt{0+0+2g \times 0+2f \times 0+c} \,.\, \sqrt{g^2+f^2-c}$

= $\sqrt{c\left(g^2+f^2-c\right)}$ **જવાબ : (B)**

(17) (0, 0), $(a, 0)$ અને $(0, b)$માંથી પસાર થતા વર્તુળનું સમીકરણ = ...

(A) $x^2+y^2-ax+by=0$ (B) $x^2+y^2+ax+by=0$

(C) $x^2+y^2+ax-by=0$ (D) $x^2+y^2-ax-by=0$

ઉકેલ : ધારો કે માંગેલ વર્તુળનું સમીકરણ $x^2+y^2+2gx+2fy+c=0$ છે. તે (0, 0)માંથી પસાર થાય છે.

$\therefore c=0$

$\therefore$ વર્તુળનું સમીકરણ $x^2+y^2+2gx+2fy=0$

વળી તે $(a, 0)$ માંથી પસાર થાય છે.

$\therefore a^2+2ga = 0$ આથી $g=\frac{-a}{2}$

વર્તુળ $(0, b)$માંથી પસાર થાય છે.

$\therefore b^2+2fb = 0$ આથી $f=\frac{-b}{2}$

માંગેલ વર્તુળનું સમીકરણ $x^2+y^2-ax-by=0$ **જવાબ : (D)**

(18) વર્તુળ $x^2+y^2-6x-10y+\alpha=0$ અક્ષોને સ્પર્શતું ન હોય અને બિંદુ (1, 4) એ વર્તુળના અંદરના ભાગમાં હોય, તો α નો વિસ્તાર ......

(A) (25, 29) (B) (9, 25) (C) (5, 25) (D) (0, 29)

ઉકેલ : વર્તુળનું સમીકરણ $x^2+y^2-6x-10y+\alpha=0$

$\therefore$ કેન્દ્ર (3, 5) અને ત્રિજ્યા $r=\sqrt{34-\alpha}$

અહીં, વર્તુળ X-અક્ષને સ્પર્શતું નથી.

$\therefore$ ત્રિજ્યા $r <$ | કેન્દ્રનો y-યામ |

$\therefore \sqrt{34-\alpha} < 5$. આથી $\alpha > 9$

અહીં, વર્તુળ Y-અક્ષને સ્પર્શતું કે છેદતું નથી.

$\therefore$ ત્રિજ્યા $r <$ | કેન્દ્રનો x-યામ |

$\sqrt{34-\alpha} < 3$

$\therefore\ 34-\alpha < 9$ આથી $\alpha > 25$

વળી, બિંદુ (1, 4) એ વર્તુળના અંદરના ભાગમાં આવેલું હોવાથી, બિંદુ (1, 4)નું કેન્દ્ર (3, 5)થી અંતર < ત્રિજ્યા

$\therefore\ \sqrt{(3-1)^2+(5-4)^2} < r$ $\therefore\ \sqrt{5} < \sqrt{34-\alpha}$

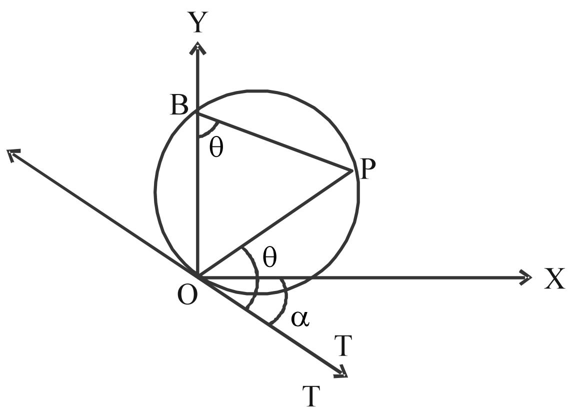
$\therefore\ 5 < 34-\alpha$ આથી, $\alpha < 29$

આમ, $\alpha > 9, \alpha > 25$ તથા $\alpha < 29$

$\therefore\ \alpha \in (25, 29)$ **જવાબ : (A)**

(19) વર્તુળ $x^2+y^2-4x-6y=0$ની એક જીવા ઊગમબિંદુમાંથી પસાર થઈને વર્તુળ ધન Y-અક્ષને જે બિંદુએ છેદે છે ત્યાં $tan^{-1}\left(\frac{7}{4}\right)$ માપના ખૂણો આંતરે છે, તો જીવાને સમાવતી રેખાનું સમીકરણ ......

(A) $2x+3y=0$ (B) $x+2y=0$ (C) $x-2y=0$ (D) $2x-3y=0$



આકૃતિ 9.25

ઉકેલ : અહીં આકૃતિમાં દર્શાવ્યા પ્રમાણે વર્તુળ ઊગમબિંદુમાંથી પસાર થઈને ધન Y-અક્ષની દિશામાં બિંદુ B(0, 6)માંથી પસાર થાય છે. ધારો કે $\overline{OP}$ એ વર્તુળની જીવા છે અને બિંદુ B આગળ θ માપનો ખૂણો આંતરે છે કે જ્યાં $tan\theta = \frac{7}{4}$.

આપેલા વર્તુળના ઊગમબિંદુ O આગળના સ્પર્શક $\overleftrightarrow{OT}$ નું સમીકરણ $2x+3y=0$

$\therefore$ સ્પર્શકનો ઢાળ $= -\frac{2}{3}$

$\therefore$ જો $m\angle XOT = \alpha$, $tan\alpha = -\frac{2}{3}$

ભૂમિતિ પરથી, $m\angle POT = m\angle OBP = \theta$

$\Rightarrow m\angle POX = \theta+\alpha$ અને

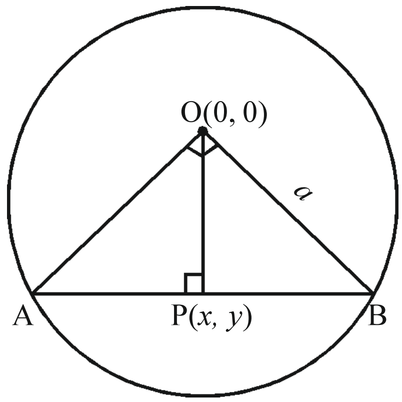
$$tan(\theta+\alpha) = \frac{tan\theta + tan\alpha}{1-tan\alpha tan\theta} = \frac{\frac{7}{4}-\frac{2}{3}}{1+\frac{7}{4}\times\frac{2}{3}} = \frac{13}{26} = \frac{1}{2}$$

$\therefore$ જીવા $\overline{OP}$ને સમાવતી રેખાનું સમીકરણ $y = x\,tan(\theta+\alpha)$

$\therefore\ x-2y=0$ માંગેલ સમીકરણ છે. **જવાબ : (C)**

(20) વર્તુળ $x^2 + y^2 = a^2$ની જે જીવાઓ કેન્દ્ર આગળ કાટખૂણો બનાવે, તે તમામ જીવાઓનાં મધ્યબિંદુઓના બિંદુગણનું સમીકરણ ......

(A) $x^2 + y^2 = a^2$ (B) $x^2 + y^2 = 2a^2$ (C) $2x^2 + 2y^2 = a^2$ (D) શક્ય નથી.



આકૃતિ 9.26

ઉકેલ : ધારો કે વર્તુળ $x^2 + y^2 = a^2$ની કોઈ જીવા $\overline{AB}$નું મધ્યબિંદુ P(x, y) છે તથા O(0, 0) વર્તુળનું કેન્દ્ર છે.

$\therefore$ OA = OB = વર્તુળની ત્રિજ્યા = a

$\therefore\ m\angle\ AOB = \frac{\pi}{2}$

$\therefore\ OA^2 + OB^2 = AB^2$

$\therefore\ a^2 + a^2 = AB^2$ આથી, $AB^2 = 2a^2$

હવે, $m\angle\ OPA = \frac{\pi}{2}$

$\therefore\ OP^2 + AP^2 = OA^2$

$\therefore\ x^2 + y^2 + AP^2 = a^2$

$x^2 + y^2 + \frac{AB^2}{4} = a^2$ $\left(\because AP = \frac{AB}{2}\right)$

$\therefore\ x^2 + y^2 = a^2 - \frac{a^2}{2}$

$\therefore\ x^2 + y^2 = \frac{a^2}{2}$

$\therefore\ 2x^2 + 2y^2 = a^2$ **જવાબ : (C)**

બીજી રીત : ધારો કે $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$ છે.

$\therefore\ x_1^2 + y_1^2 = a^2$

$\overleftrightarrow{OA} \perp \overleftrightarrow{OB}$

$\therefore\ \left(\frac{y_1 - 0}{x_1 - 0}\right)\left(\frac{y_2 - 0}{x_2 - 0}\right) = -1$

$\therefore \quad x_1x_2 + y_1y_2 = 0$

જો મધ્યબિંદુ (x, y) હોય તો,

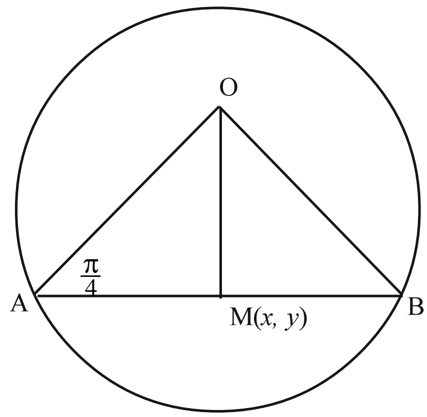
$x = \frac{x_1 + x_2}{2}, \; y = \frac{y_1 + y_2}{2}$

$\therefore \quad 4(x^2 + y^2) = x_1^2 + 2x_1x_2 + x_1^2 + y_1^2 + 2y_1y_2 + y_2^2$

$= a^2 + a^2 + 0 = 2a^2$

$\therefore \quad 2x^2 + 2y^2 = a^2$ માંગેલ બિંદુગણ છે.

ત્રીજી રીત :



આકૃતિ 9.26 A

$m\angle AOB = \frac{\pi}{2}$ આથી $m\angle OAM = m\angle AOM = \frac{\pi}{4}$

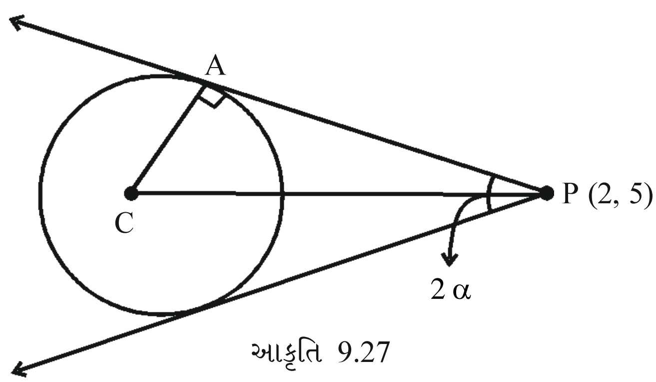
$\therefore \; OM^2 + AM^2 = a^2$

$\therefore \; 2\,OM^2 = a^2$

$\therefore \; 2x^2 + 2y^2 = a^2$

(21) બિંદુ (2, 5) માંથી વર્તુળ $x^2 + y^2 = 16$ ને દોરેલા સ્પર્શકો વચ્ચેના ખૂણાનું માપ ......

(A) $tan^{-1}\frac{4}{5}$ (B) $2tan^{-1}\frac{4}{\sqrt{13}}$ (C) $tan^{-1}\frac{8}{5}$ (D) $\frac{1}{2}\,tan^{-1}\frac{4}{5}$



આકૃતિ 9.27

ઉકેલ : અહીં વર્તુળનું કેન્દ્ર C(0, 0) તથા બિંદુ P(2, 5) છે.

$\therefore \quad CP = \sqrt{(2-0)^2 + (5-0)^2} = \sqrt{29}$

હવે, ΔACP માં $m\angle A = \frac{\pi}{2}$

$\therefore\ AC^2 + AP^2 = CP^2$

$\therefore\ AP^2 = CP^2 - AC^2 = 29 - 16$

$\therefore\ AP = \sqrt{13}$

ધારો કે બહારના બિંદુ P આગળ સ્પર્શકોથી બનતા ખૂણાનું માપ 2α છે.

$\therefore$ અર્ધકોણ α થશે.

$\therefore\ \Delta ACP$ માટે, $tan\alpha = \frac{CA}{AP} = \frac{4}{\sqrt{13}}$

$\therefore\ \alpha = tan^{-1}\frac{4}{\sqrt{13}}$

$\therefore$ P આગળના ખૂણાનું માપ $= 2\alpha = 2tan^{-1}\frac{4}{\sqrt{13}}$ **જવાબ : (B)**

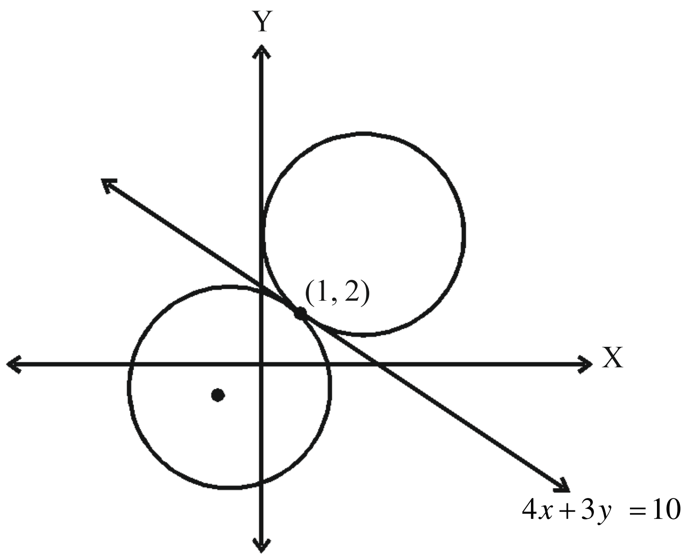
(22) 5 એકમ ત્રિજ્યાવાળાં બે વર્તુળો (1, 2) બિંદુ આગળ સ્પર્શે છે. તેમના સામાન્ય સ્પર્શકનું સમીકરણ $4x+3y=10$ હોય, તો બંને વર્તુળોના સમીકરણ ......

(A) $x^2+y^2-10x+10y+25=0$, $x^2+y^2-6x+2y-15=0$

(B) $x^2+y^2+10x+10y+25=0$, $x^2+y^2-6x-2y-15=0$

(C) $x^2+y^2-10x-10y-25=0$, $x^2+y^2+6x-2y-15=0$

(D) $x^2+y^2-10x-10y+25=0$, $x^2+y^2+6x+2y-15=0$



આકૃતિ 9.28

ઉકેલ : બંને વર્તુળોના સામાન્ય સ્પર્શકનું સમીકરણ $4x+3y-10=0$ છે. આથી, તેનો ઢાળ $=-\frac{4}{3}$

$\therefore$ કેન્દ્રોને જોડતી રેખાનો ઢાળ $=\frac{3}{4}$

વળી, તે (1, 2) બિંદુમાંથી પસાર થાય છે.

$\therefore$ કેન્દ્રોમાંથી પસાર થતી રેખા $y-2=\frac{3}{4}(x-1)$

$\therefore \ \frac{y-2}{3} = \frac{x-1}{4} = k$ લેતાં, $x = 4k+1, \quad y = 3k+2$

કોઈક ભિન્ન k માટે બંને વર્તુળોનાં કેન્દ્રો $x = 4k+1$ અને $y = 3k+2$ થશે.

હવે કેન્દ્રથી સ્પર્શકનું લંબઅંતર = ત્રિજ્યા

$$\therefore \quad \frac{|4(4k+1)+3(3k+2)-10|}{\sqrt{4^2+3^2}} = 5$$

$$|16k+4+9k+6-10| = 25$$

$\therefore \quad |25\,k| = 25$ આથી $|k| = 1$ આથી $k = \pm 1$

$\therefore$ 5 એકમ ત્રિજ્યાવાળાં વર્તુળોનાં કેન્દ્રો (5, 5) અને (–3, –1) થશે.

$\therefore$ (5, 5) કેન્દ્ર અને 5 ત્રિજ્યાવાળું વર્તુળ $(x-5)^2+(y-5)^2 = 25$ અને

(–3, –1) કેન્દ્ર અને 5 ત્રિજ્યાવાળું વર્તુળ $(x+3)^2+(y+1)^2 = 25$

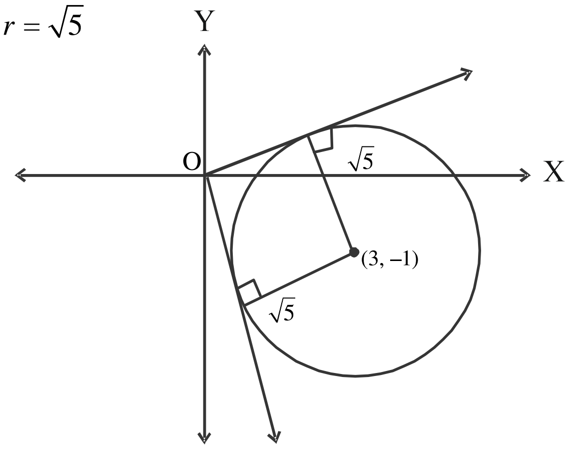
$\therefore$ માંગેલાં વર્તુળો $x^2+y^2-10x-10y+25 = 0$ અને $x^2+y^2+6x+2y-15 = 0$ **જવાબ : (D)**

(23) ઊગમબિંદુમાંથી દોરેલાં વર્તુળ $(x-3)^2+(y+1)^2 = 5$ ના સ્પર્શકો વચ્ચેના ખૂણાનું માપ ......

(A) $\frac{\pi}{4}$ (B) $\frac{\pi}{2}$ (C) $\frac{\pi}{3}$ (D) $\frac{\pi}{6}$

ઉકેલ : ઊગમબિંદુ (0, 0) માંથી પસાર થતા સ્પર્શકનું સમીકરણ $y = mx$ એટલે કે $mx - y = 0$ છે.

વર્તુળનું કેન્દ્ર (3, –1), ત્રિજ્યા $r = \sqrt{5}$



આકૃતિ 9.29

$\therefore$ કેન્દ્રથી સ્પર્શકનું લંબઅંતર = ત્રિજ્યા

$$\therefore \quad \frac{|m(3)+1|}{\sqrt{m^2+1}} = \sqrt{5}$$

$\therefore \ (3m+1)^2 = 5(m^2+1)$

$\therefore \ 2m^2+3m-2 = 0$

$\therefore$ બે બીજ m_1 અને m_2 હોય, તો $m_1m_2 = \frac{-2}{2} = -1$

$\therefore \ \theta = \frac{\pi}{2}$ $[(2m + 1)(m + 2) = 0 \Rightarrow m = \frac{1}{2} \text{ or } -2]$ **જવાબ : (B)**