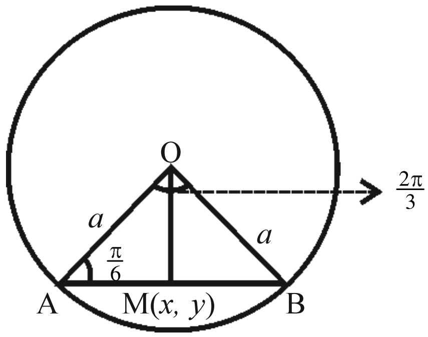
(24) $x^2 + y^2 = a^2$ વર્તુળના કેન્દ્ર પાસે $\frac{2\pi}{3}$ ના માપનો ખૂણો બનાવતી વર્તુળની તમામ જીવાઓના મધ્યબિંદુના બિંદુગણનું સમીકરણ ......

(A) $x^2 + y^2 = a^2$ (B) $4x^2 + 4y^2 = a^2$ (C) $x^2 + y^2 = 4a^2$ (D) $x^2 + y^2 = 2a^2$



આકૃતિ 9.30

ઉકેલ : અહીં $m\angle AOB = \frac{2\pi}{3}$ તથા OA = OB = ત્રિજ્યા હોવાથી, $m\angle OAM = \frac{\pi}{6}$

$\therefore \sin\frac{\pi}{6} = \frac{OM}{OA}$. આથી, $\frac{1}{2} = \frac{OM}{a}$

$\therefore OM = \frac{a}{2}$

ધારો કે વર્તુળ $x^2 + y^2 = a^2$ની જીવા $\overline{AB}$નું મધ્યબિંદુ M(x, y) છે.

$\therefore OM = \frac{a}{2}$ પરથી, $OM^2 = \frac{a^2}{4}$

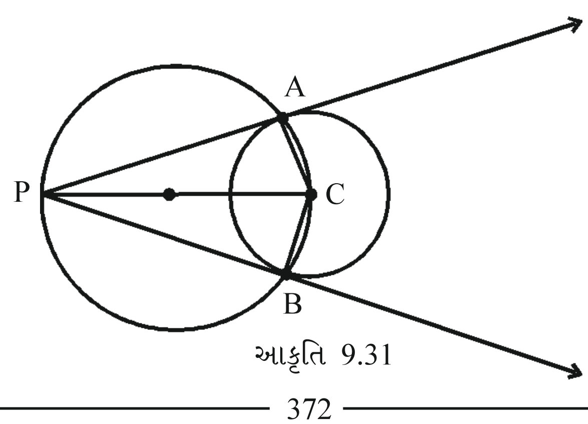
$\therefore x^2 + y^2 = \frac{a^2}{4}$

$\therefore 4x^2 + 4y^2 = a^2$ **જવાબ : (B)**

(25) બિંદુ P(1, 2)માંથી વર્તુળ $x^2 + y^2 - 8x + 6y + 1 = 0$ને દોરેલા સ્પર્શકો વર્તુળને A અને B આગળ સ્પર્શે છે, તો ΔPABના પરિવૃત્તનું સમીકરણ ......

(A) $x^2 + y^2 + 5x + y - 2 = 0$ (B) $x^2 + y^2 - 5x + y - 2 = 0$

(C) $x^2 + y^2 - 5x - y - 2 = 0$ (D) $x^2 + y^2 - 5x + y + 2 = 0$



આકૃતિ 9.31

ઉકેલ : અહીં આપેલા વર્તુળ $x^2 + y^2 + 8x - 6y + 1 = 0$ નું કેન્દ્ર C(4, –3) છે તથા $\overline{CA} \perp \overline{PA}$ અને $\overline{CB} \perp \overline{PB}$

$\therefore$ $\overline{PC}$ માંગેલા વર્તુળનો વ્યાસ થશે.

C(4, –3) તથા P (1, 2) છે. તે વ્યાસાંત બિંદુઓ થશે.

$\therefore$ માંગેલ વર્તુળનું સમીકરણ $(x-1)(x-4)+(y-2)(y+3) = 0$

$\therefore$ $x^2 + y^2 - 5x + y - 2 = 0$ **જવાબ : (B)**

(26) વર્તુળો $x^2 + y^2 = 1$, $x^2 + y^2 = 4$ અને રેખાઓ $\sqrt{3}\left(x^2 + y^2\right) = 4xy$ વચ્ચેનાં ભાગનું ક્ષેત્રફળ ......

(A) $\frac{\pi}{4}$ (B) $\frac{\pi}{2}$ (C) $\frac{5\pi}{2}$ (D) 3π

ઉકેલ : રેખાઓનું સંયુક્ત સમીકરણ $\sqrt{3}x^2 - 4xy + \sqrt{3}y^2 = 0$

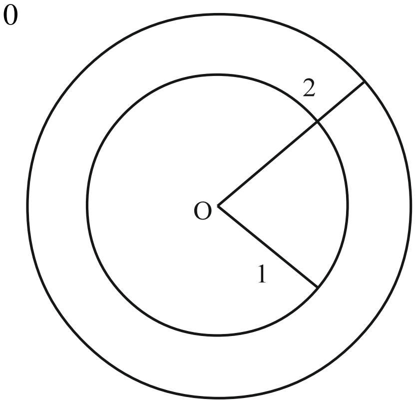
$\therefore$ $a = \sqrt{3}$, $2h = -4$, $b = \sqrt{3}$

$\therefore$ તેમની વચ્ચેના ખૂણાનું માપ θ હોય, તો

$$tan\theta = \frac{2\sqrt{h^2 - ab}}{|a+b|}$$

$$\therefore \quad tan\theta = \frac{2\sqrt{4-3}}{2\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\therefore \quad \theta = \frac{\pi}{6}$$



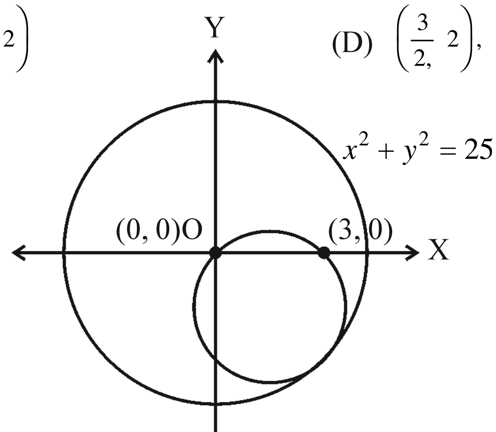
આકૃતિ 9.32

$\therefore$ માંગેલ પ્રદેશનું ક્ષેત્રફળ $= \frac{1}{2} \times \frac{\pi}{6} \times \left(2^2 - 1^2\right) = \frac{\pi}{4}$ $\left(\because \frac{1}{2}\theta\left(r_1^2 - r_2^2\right)\right)$ **જવાબ : (A)**

(27) (0, 0) અને (3, 0)માંથી પસાર થતા અને વર્તુળ $x^2 + y^2 = 25$ ને સ્પર્શતા વર્તુળનું કેન્દ્ર ......

(A) $\left(\frac{1}{2}, \sqrt{2}\right)$, $\left(\frac{1}{2}, -\sqrt{2}\right)$ (B) $\left(\frac{3}{2}, \sqrt{2}\right)$, $\left(\frac{3}{2}, -\sqrt{2}\right)$

(C) $\left(-\frac{1}{2}, 2\right)$, $\left(-\frac{1}{2}, -2\right)$ (D) $\left(\frac{3}{2}, 2\right)$, $\left(\frac{3}{2}, -2\right)$



આકૃતિ 9.33

ઉકેલ : ધારો કે વર્તુળનું સમીકરણ $x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0$

વર્તુળ (0, 0)માંથી પસાર થાય છે.

$\therefore$ c = 0 તથા તે (3, 0)માંથી પસાર થાય છે.

$9 + 6g = 0$. આથી $g = -\frac{3}{2}$

વર્તુળ $x^2 + y^2 = 25$ અને $x^2 + y^2 + 2gx + 2fy = 0$ પરસ્પર સ્પર્શે છે.

બંને વર્તુળોના સામાન્ય સ્પર્શકનું સમીકરણ

$2gx + 2fy + 25 = 0$

કેન્દ્ર (0, 0)થી સામાન્ય સ્પર્શક $2gx + 2fy + 25 = 0$નું અંતર 5 થશે.

$\therefore 5 = \frac{|25|}{\sqrt{4g^2 + 4f^2}}$ આથી, $(4g^2 + 4f^2) = 25$

$\therefore 4 \times \frac{9}{4} + 4f^2 = 25$

$\therefore f^2 = 4$

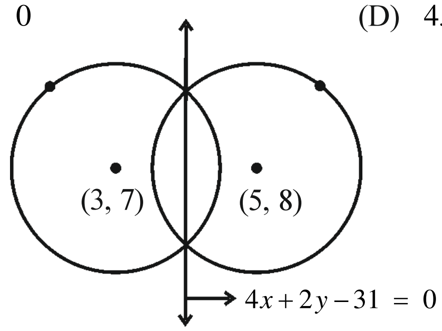
$\therefore f = \pm 2$

$\therefore$ માંગેલ વર્તુળનું કેન્દ્ર $\left(\frac{3}{2}, 2\right)$ અથવા $\left(\frac{3}{2}, -2\right)$ **જવાબ : (D)**

(28) (3, 7) અને (5, 8) કેન્દ્રવાળા એકરૂપ વર્તુળોની સામાન્ય જીવાને સમાવતી રેખાનું સમીકરણ ......

(A) $4x + 2y + 31 = 0$ (B) $4x - 2y + 31 = 0$

(C) $4x + 2y - 31 = 0$ (D) $4x - 2y - 31 = 0$



આકૃતિ 9.34

ઉકેલ : આપેલાં બંને વર્તુળો એકરૂપ હોવાથી ત્રિજ્યા સમાન થાય. ધારો કે ત્રિજ્યા r છે.

$\therefore$ (3, 7) કેન્દ્રવાળા r ત્રિજ્યાવાળા વર્તુળનું સમીકરણ $(x-3)^2 + (y-7)^2 = r^2$

$\therefore S_1 : x^2 + y^2 - 6x - 14y + 58 - r^2 = 0$

તથા (5, 8) કેન્દ્રવાળા અને r ત્રિજ્યાવાળા વર્તુળનું સમીકરણ $(x-5)^2 + (y-8)^2 = r^2$

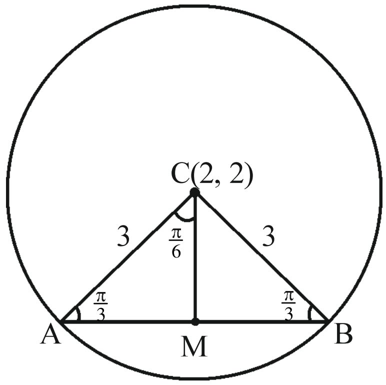
$\therefore x^2 + y^2 - 10x - 16y + 89 - r^2 = 0$

સામાન્ય જીવાને સમાવતી રેખાનું સમીકરણ $S_1 - S_2 = 0$ પરથી $4x + 2y - 31 = 0$ **જવાબ : (C)**

(29) વર્તુળ $x^2 + y^2 - 4x - 4y - 1 = 0$ના કેન્દ્ર સાથે $\frac{\pi}{3}$ માપનો ખૂણો બનાવતી વર્તુળની જીવાના મધ્યબિંદુના બિંદુગણનું સમીકરણ ......

(A) $4x^2 + 4y^2 - 16x - 16y + 5 = 0$ (B) $2x^2 + 2y^2 - 4x - 4y + 5 = 0$

(C) $4x^2 + 4y^2 + 16x + 16y + 5 = 0$ (D) $2x^2 + 2y^2 + 4x + 4y + 5 = 0$



આકૃતિ 9.35

ઉકેલ : વર્તુળ $x^2 + y^2 - 4x - 4y - 1 = 0$ નું કેન્દ્ર C(2, 2) તથા ત્રિજ્યા $r = 3$ થાય.

જીવા $\overline{AB}$ કેન્દ્ર C આગળ $\frac{\pi}{3}$ માપનો ખૂણો બનાવે છે.

ΔABC માં $m\angle ACB = \frac{\pi}{3}$ તથા $CA = CB$ (ત્રિજ્યા)

$\therefore m\angle CAB = m\angle CBA = \frac{\pi}{3}$

ધારો કે, જીવા $\overline{AB}$ નું મધ્યબિંદુ M(x, y) છે.

$\therefore \Delta AMC$ માં $\sin\frac{\pi}{3} = \frac{CM}{AC}$

$\therefore \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{CM}{3}$ આથી, $CM = \frac{3\sqrt{3}}{2}$

$\therefore CM^2 = \frac{27}{4}$

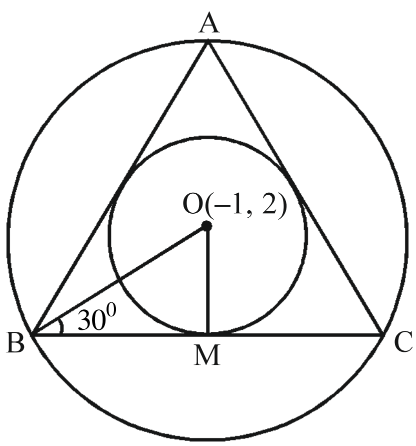
$\therefore (x-2)^2 + (y-2)^2 = \frac{27}{4}$

$\therefore 4x^2 + 4y^2 - 16x - 16y + 5 = 0$ માંગેલ બિંદુગણ છે. **જવાબ : (A)**

(30) જો સમબાજુ ત્રિકોણના અંતઃવૃતનું સમીકરણ $x^2 + y^2 + 2x - 4y - 3 = 0$ હોય, તો ત્રિકોણના પરિવૃતનું સમીકરણ ......

(A) $x^2 + y^2 + 2x + 4y - 27 = 0$ (B) $x^2 + y^2 + 2x - 4y - 27 = 0$

(C) $x^2 + y^2 - 2x + 4y + 27 = 0$ (D) $x^2 + y^2 - 2x - 4y + 27 = 0$



આકૃતિ 9.36

ઉકેલ : $\Delta\ ABC$ સમબાજુ ત્રિકોણ છે, તથા તેના અંતઃવૃતનું સમીકરણ $x^2+y^2+2x-4y-3 = 0$ છે.

$\therefore$ કેન્દ્રના યામ O(–1, 2) તથા ત્રિજ્યા $r = \sqrt{8}$

હવે, $\Delta\ ABC$ ના પરિવૃતનું કેન્દ્ર પણ O(–1, 2) થાય.

$r = 4R\ sin\frac{A}{2}\ sin\frac{B}{2}\ sin\frac{C}{2}$

$= 4R\ \frac{1}{2}\bullet\frac{1}{2}\bullet\frac{1}{2}$

$\therefore$ $r = \frac{R}{2} = 2\sqrt{2}$

$\therefore$ પરિત્રિજ્યા $= 4\sqrt{2}$

$\therefore$ પરિવૃતનું સમીકરણ $(x+1)^2+(y-2)^2 = 32$

$\therefore$ $x^2+y^2+2x-4y-27 = 0$ **જવાબ : (B)**

(31) $x=2$ અને $y=6$ રેખાઓ જેના અભિલંબો હોય અને $2x+5y-5 = 0$ જેનો સ્પર્શક હોય તેવા વર્તુળનું સમીકરણ ......

(A) $x^2+y^2-4x-10y+29 = 0$ (B) $x^2+y^2+4x+10y-29 = 0$

(C) $x^2+y^2-4x-12y+11 = 0$ (D) $x^2+y^2+4x+10y = 0$

ઉકેલ : અહીં $x=2$ અને $y=6$ અભિલંબ છે.

$\therefore$ તે બંને રેખાઓનું છેદબિંદુ (2, 6) વર્તુળનું કેન્દ્ર થશે.

હવે સ્પર્શક $2x+5y-5 = 0$ છે.

$\therefore$ માંગેલ વર્તુળની ત્રિજ્યા $= \frac{|2(2)+5(6)-5|}{\sqrt{4+25}} = \frac{29}{\sqrt{29}} = \sqrt{29}$

$\therefore$ માંગેલ વર્તુળનું સમીકરણ $(x-2)^2+(y-6)^2 = (\sqrt{29})^2$

$\therefore$ $x^2+y^2-4x-12y+11 = 0$ **જવાબ : (C)**

(32) ઊગમબિંદુ કેન્દ્રવાળા અને જે સમબાજુ ત્રિકોણની મધ્યગાની લંબાઈ $3a$ હોય તેવા ત્રિકોણના શિરોબિંદુમાંથી પસાર, થતા વર્તુળનું સમીકરણ (પરિવૃતનું સમીકરણ) ......

(A) $x^2+y^2 = a^2$ (B) $x^2+y^2 = 2a^2$

(C) $x^2+y^2 = 4a^2$ (D) $x^2+y^2 = 3a^2$

ઉકેલ : અહીં વર્તુળનું કેન્દ્ર (0, 0) છે તથા ત્રિકોણ સમબાજુ છે.

$\therefore$ ત્રિકોણનું મધ્યકેન્દ્ર = પરિકેન્દ્ર = (0, 0)

અહીં, સમબાજુ ત્રિકોણની મધ્યગાની લંબાઈ = $3a$

$\therefore$ વર્તુળની ત્રિજ્યા = કેન્દ્રથી ત્રિકોણના શિરોબિંદુ સુધીનું લંબઅંતર

$= \frac{2}{3}$ (મધ્યગાની લંબાઈ) $= \frac{2}{3}(3a) = 2a$

$\therefore$ માંગેલ વર્તુળનું સમીકરણ $x^2+y^2 = 4a^2$ **જવાબ : (C)**

(33) ત્રિકોણના શિરોબિંદુ (3, 4), $(5cos\theta, 5sin\theta)$ અને $(5sin\theta, -5cos\theta)$ હોય, તો ત્રિકોણના મધ્યકેન્દ્રના બિંદુગણનું સમીકરણ ......

(A) $9x^2+9y^2+18x+24y+25 = 0$ (B) $9x^2+9y^2-18x+24y+25 = 0$

(C) $9x^2+9y^2+18x-24y-25 = 0$ (D) $9x^2+9y^2-18x-24y-25 = 0$

ઉકેલ : ધારો કે ΔABCમાં $A(3, 4)$, $B(5cos\theta, 5sin\theta)$ અને $C(5sin\theta, -5cos\theta)$ છે.

મધ્યકેન્દ્રના યામ $(a, b) = \left(\frac{3+5cos\theta+5sin\theta}{3}, \frac{4+5sin\theta-5cos\theta}{3}\right)$

$\therefore a = \frac{3+5cos\theta+5sin\theta}{3}, b = \frac{4+5sin\theta-5cos\theta}{3}$

$\therefore 5sin\theta+5cos\theta = 3a-3$ (1)

અને $5sin\theta-5cos\theta = 3b-4$ (2)

વર્ગ કરીને ઉમેરતાં, $(3a-3)^2+(3b-4)^2 = 50.$ આથી $9a^2+9b^2-18a-24b-25 = 0$

$\therefore$ માંગેલ બિંદુગણ $9x^2+9y^2-18x-24y-25 = 0$ **જવાબ : (D)**

(34) વર્તુળ $x^2+y^2=4$ અને $x^2+y^2-6x-8y=24$ ને ...... સામાન્ય સ્પર્શક હોય.

(A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) એક પણ નહિ.

ઉકેલ : અહીં, $C_1=(0,0)$, $r_1=2$, ; $C_2=(3,4)$, $r_2=7$

$\therefore C_1C_2=\sqrt{9+16}=5$ $|r_1-r_2| = |2-7| = 5$

$\therefore C_1C_2=|r_1-r_2|$

$\therefore$ વર્તુળો પરસ્પર અંદરથી સ્પર્શે છે.

$\therefore$ એક જ સામાન્ય સ્પર્શક મળે. **જવાબ : (B)**

(35) વર્તુળો $x^2+y^2=4$ અને $x^2+y^2-4\lambda x+9=0$ ને બે સામાન્ય છેદબિંદુ હોય, તો $\lambda =$ ......

(A) $\lambda \in \left(\frac{-13}{8}, \frac{13}{8}\right)$ (B) $\lambda > \frac{13}{8}$ અથવા $\lambda < \frac{-13}{8}$

(C) $1 < \lambda < \frac{13}{8}$ (D) આમાંથી એક પણ નહિ. (AIEEE : 2002)

ઉકેલ : અહીં આપેલા સમીકરણ ઉકેલતાં, $4\lambda x=13$

$y^2+\left(\frac{13}{4\lambda}\right)^2=4$ આથી, $y^2 = 4-\left(\frac{13}{4\lambda}\right)^2$

તેને બે વાસ્તવિક ભિન્ન કિંમતો હોય, તો $4-\left(\frac{13}{4\lambda}\right)^2>0$

$\therefore 4>\left(\frac{13}{4\lambda}\right)^2$, આથી, $\lambda^2>\left(\frac{13}{8}\right)^2$. આથી, $\lambda<\frac{-13}{8}$ અથવા $\lambda>\frac{13}{8}$ **જવાબ : (B)**

(36) જો આપેલ વર્તુળ $r^2 = 2 - 4r\cos\theta + 6r\sin\theta$ હોય, તો આપેલા વર્તુળની ત્રિજ્યા = ...

(A) $\sqrt{13}$ (B) $\sqrt{11}$ (C) $\sqrt{14}$ (D) $\sqrt{15}$

ઉકેલ : અહીં, $r^2 = 2 - 4r\cos\theta + 6r\sin\theta$ આપેલ છે.

હવે, $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$ લેતાં,

$x^2 + y^2 = 2 - 4x + 6y$

$\therefore x^2 + y^2 + 4x - 6y - 2 = 0$

$\therefore g = 2,\ f = -3,\ c = -2$

$\therefore$ વર્તુળની ત્રિજ્યા $= \sqrt{g^2 + f^2 - c} = \sqrt{4+9+2} = \sqrt{15}$ **જવાબ : (D)**

(37) વર્તુળ $x^2 + y^2 + (1-\lambda)x + \lambda y + 5 = 0$ ની ત્રિજ્યા 5 કરતાં વધારે ન હોય, તો મહત્તમ λ = ... , $\lambda \in N$

(A) 7 (B) 8 (C) 9 (D) 10

ઉકેલ : અહીં, વર્તુળની ત્રિજ્યા $= \sqrt{\left(\frac{1-\lambda}{2}\right)^2 + \left(\frac{\lambda}{2}\right)^2 - 5} \le 5$

$\therefore (1-\lambda)^2 + \lambda^2 - 20 \le 100$

$\therefore 2\lambda^2 - 2\lambda - 119 \le 0$

$\therefore \frac{1-\sqrt{239}}{2} \le \lambda \le \frac{1+\sqrt{239}}{2}$

$\therefore -7.2 \le \lambda \le 7.2$ (આશરે)

$\therefore \lambda = 7$ **જવાબ : (A)**

(38) જો બે વર્તુળો બિંદુઓ (0, *a*) અને (0, –*a*) માંથી પસાર થાય છે અને, એકબીજાને લંબચ્છેદી છે અને રેખા $y = mx + c$ ને સ્પર્શે છે, તો ......

(A) $c^2 = a^2(1+m^2)$ (B) $c^2 = a^2|1-m^2|$

(C) $c^2 = a^2(2+m^2)$ (D) $c^2 = 2a^2(1+m^2)$

ઉકેલ : (0, *a*) અને (0, –*a*)માંથી પસાર થતાં વર્તુળોના સમુદાયનું સમીકરણ

$x^2 + y^2 + 2\lambda ax - a^2 = 0$.

જો બે વર્તુળો $\lambda = \lambda_1$ અને $\lambda = \lambda_2$ માટે એકબીજાને લંબચ્છેદી હોય, તો

$2\lambda_1\lambda_2 a^2 = -2a^2$ આથી, $\lambda_1\lambda_2 = -1$ $(2g_1g_2 + 2f_1f_2 = c_1 + c_2)$

વળી, આ બંને વર્તુળો રેખા $y = mx + c$ ને સ્પર્શે છે.

$$\left[\frac{-\lambda am + c}{\sqrt{1+m^2}}\right]^2 = \lambda^2 a^2 + a^2$$

$\therefore \quad (\lambda am-c)^2 = a^2(\lambda^2+1)(1+m^2)$

$\therefore \quad a^2\lambda^2+2mca\lambda-c^2+a^2(1+m^2)=0$

$\therefore \quad a^2(1+m^2)-c^2=-a^2$ (બીજનોગુણાકાર $\lambda_1\lambda_2 = -1$)

$\therefore \quad c^2=(2+m^2)a^2$ **જવાબ : (C)**

(39) બિંદુ P અને Q ના યામ અનુક્રમે (2, 3) અને (3, 2) છે. $\overline{OP}$ અને $\overline{OQ}$ ને વ્યાસ લઈને દોરેલાં વર્તુળોની સામાન્ય જીવાની લંબાઈ = ... (જ્યાં O એ ઊગમબિંદુ છે.)

(A) $\sqrt{2}$ (B) $\sqrt{13}$ (C) $\frac{5}{\sqrt{2}}$ (D) એક પણ નહિ.

ઉકેલ : અહીં વર્તુળોનાં સમીકરણ

$x^2+y^2-2x-3y=0$ (1) અને $x^2+y^2-3x-2y=0$ (2) છે.

છેદબિંદુ માટે $x=y$

$\therefore \; 2x^2-5x=0$

$\therefore \; x=0, \frac{5}{2}$ મળે. હવે $y=x$ હોવાથી છેદબિંદુ $(0,0), \left(\frac{5}{2},\frac{5}{2}\right)$ મળે.

જીવાની લંબાઈ $=\sqrt{\left(\frac{5}{2}\right)^2+\left(\frac{5}{2}\right)^2} = \frac{5}{\sqrt{2}}$ **જવાબ : (C)**

(40) ઊગમબિંદુથી સૌથી વધારે દૂર વર્તુળ $x^2+y^2-2x-4y-11=0$ પરનાં બિંદુના યામ = ...

(A) $\left(2+\frac{8}{\sqrt{5}}, 1+\frac{4}{\sqrt{5}}\right)$ (B) $\left(1+\frac{4}{\sqrt{5}}, 2+\frac{8}{\sqrt{5}}\right)$

(C) $\left(1+\frac{8}{\sqrt{5}}, 2+\frac{4}{\sqrt{5}}\right)$ (D) એક પણ નહિ.

ઉકેલ : અહીં માંગેલ બિંદુ ઊગમબિંદુ અને કેન્દ્ર (1, 2)ને જોડતી રેખા પર આવેલું છે.
એટલે કે રેખા $y=2x$ પર આવેલું છે.

$\therefore \; y=2x$ લેતાં $5x^2-10x-11=0$

હવે રેખા $y=2x$ એ વર્તુળને બિંદુઓ $\left(1\pm\frac{4}{\sqrt{5}}, 2\pm\frac{8}{\sqrt{5}}\right)$માં મળે છે. તે પૈકીનું ઊગમબિંદુથી સૌથી વધારે દૂરનું બિંદુ $\left(1+\frac{4}{\sqrt{5}}, 2+\frac{8}{\sqrt{5}}\right)$ છે. **જવાબ : (B)**

બીજી રીત : વર્તુળનું સમીકરણ $(x-1)^2+(y-2)^2=16$

$\therefore$ તેનાં પ્રચલ સમીકરણ $(1+4\cos t, 2+4\sin t)$, $t\in[0,2\pi)$ છે.

ઊગમબિંદુથી અંતર d હોય તો,

$$d^2 = (1+4\cos t)^2+(2+4\sin t)^2$$

$$g(t)=21+8\cos t+16\sin t$$

$8\,cos\,t + 16\,sin\,t$ ની મહત્તમ કિંમત $\sqrt{64+256} = \sqrt{320} = 8\sqrt{5}$

$\therefore$ d ની મહત્તમ કિંમત $\sqrt{21+8\sqrt{5}} = \sqrt{21+2\sqrt{80}} = \sqrt{16}+\sqrt{5} = 4+\sqrt{5}$

મહત્તમ માટે $g'(t) = -8\,sin\,t + 16\,cos\,t = 0$

$\therefore \frac{sin\,t}{2} = \frac{cos\,t}{1} = \frac{1}{\sqrt{5}}$

$\therefore sin\,t = \frac{2}{\sqrt{5}},\ cos\,t = \frac{1}{\sqrt{5}}$

વળી, $f''(t) = -8\,cos\,t - 16\,sin\,t < 0$

$\therefore (1+4cos\,t,\ 2+4sin\,t) = \left(1+\frac{4}{\sqrt{5}}, 2+\frac{8}{\sqrt{5}}\right)$

(41) વર્તુળ $x^2 + y^2 + 4x - 6y + 9sin^2\alpha + 13cos^2\alpha = 0$ પરના બિંદુ P થી દોરેલા સ્પર્શકો વચ્ચેના ખૂણાનું માપ 2α હોય તો P ના બિંદુગણનું સમીકરણ....... .

(A) $x^2 + y^2 + 4x - 6y + 4 = 0$ (B) $x^2 + y^2 + 4x - 6y - 9 = 0$

(C) $x^2 + y^2 + 4x - 6y - 4 = 0$ (D) $x^2 + y^2 + 4x - 6y + 9 = 0$

ઉકેલ : આમા વર્તુળનું કેન્દ્ર (–2, 3) અને ત્રિજ્યા = $\sqrt{4+9-9sin^2\alpha-13cos^2\alpha} = 2sin\alpha$

ધારો કે $P(h, k)$ માંગેલ કેન્દ્ર છે તથા $\angle APC = \alpha$.

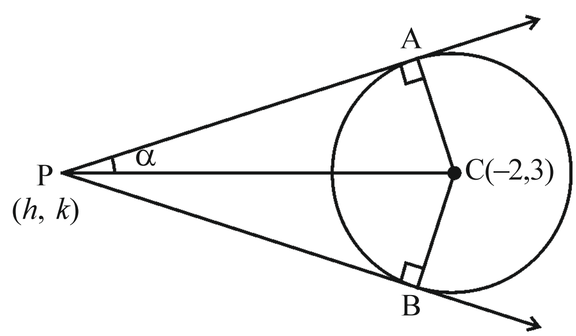
$\therefore \angle PAC = \frac{\pi}{2}$

$\therefore sin\alpha = \frac{AC}{PC} = \frac{2sin\alpha}{\sqrt{(h+2)^2+(k-3)^2}}$

$\therefore \sqrt{(h+2)^2+(k-3)^2} = 2$

$\therefore (h+2)^2 + (k-3)^2 = 4$

$\therefore h^2 + k^2 + 4h - 6k + 9 = 0$



આકૃતિ 9.37

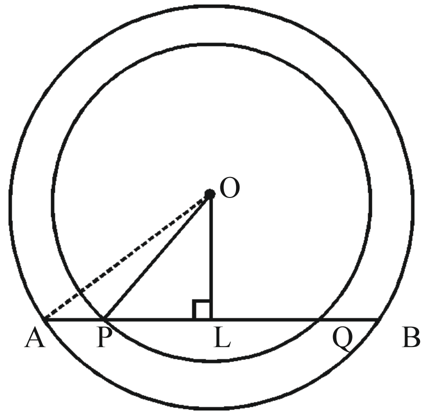
માંગેલ બિંદુગણ $x^2 + y^2 + 4x - 6y + 9 = 0$.

જવાબ : (D)

(42) જો રેખા $x\,cos\alpha + y\,sin\alpha = p$ એ વર્તુળો $x^2 + y^2 = a^2$ અને $x^2 + y^2 = b^2$ ની સામાન્ય જીવા $APQB$ હોય, તો AP = ... (જ્યાં $a > b$) છે.

(A) $\sqrt{a^2+p^2} - \sqrt{b^2+p^2}$ (B) $\sqrt{a^2-p^2} - \sqrt{b^2-p^2}$

(C) $\sqrt{a^2+p^2} + \sqrt{b^2+p^2}$ (D) $\sqrt{a^2-p^2} + \sqrt{b^2-p^2}$



આકૃતિ 9.38

ઉકેલ : અહીં, આપેલાં વર્તુળો $x^2 + y^2 = a^2$ અને $x^2 + y^2 = b^2$ સમકેન્દ્રીય વર્તુળો છે. તેમનું કેન્દ્ર (0, 0) છે. ધારો કે ઊગમબિંદુથી આપેલી રેખાનું લંબઅંતર $OL = p$ જ્યાં $a > b$

$\therefore \Delta OLA$ કાટકોણ ત્રિકોણ છે.

$\therefore OL^2 + AL^2 = OA^2$

$\therefore AL = \sqrt{OA^2 - OL^2} = \sqrt{a^2 - p^2}$

તે જ રીતે $PL = \sqrt{OP^2 - OL^2} = \sqrt{b^2 - p^2}$

$\therefore AP = AL - PL$

$\therefore AP = \sqrt{a^2 - p^2} - \sqrt{b^2 - p^2}$ **જવાબ : (B)**

(43) બિંદુ P(2, 5)માંથી દોરેલી રેખા વર્તુળ $x^2 + y^2 = 16$ને A અને B બિંદુઓમાં છેદે, તો PA • PB = ...

(A) 11 (B) 12 (C) 10 (D) 13

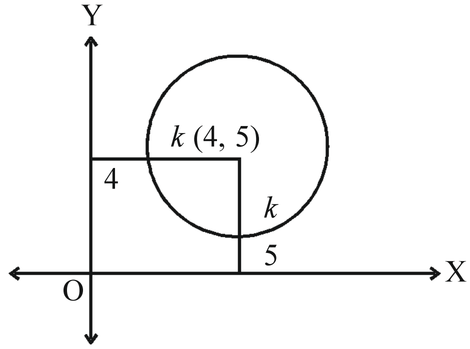
ઉકેલ : આપણે જાણીએ છીએ કે $PA \cdot PB = PT^2$ જ્યાં PT = સ્પર્શકની લંબાઈ છે.

$\therefore PA \cdot PB = (2)^2 + (5)^2 - 16 = 13$ **જવાબ : (D)**

(44) બિંદુ (2, 3) એ વર્તુળ $x^2 + y^2 - 8x - 10y + k = 0$ની અંદર આવેલ હોય અને વર્તુળ યામાક્ષોને છેદતું કે સ્પર્શતું ન હોય તો ......

(A) $25 < k < 40$ (B) $25 < k < 33$ (C) $16 < k < 25$ (D) $25 < k < 40$

ઉકેલ :



આકૃતિ 9.39

આપેલ વર્તુળનું કેન્દ્ર = (4, 5) તથા ત્રિજ્યા $= \sqrt{16 + 25 - k}$

અહીં વર્તુળ યામાક્ષોને સ્પર્શતું કે છેદતું નથી.

વર્તુળના કેન્દ્રના x-યામ અને y-યામ ત્રિજ્યા કરતાં મોટા થશે.

$\therefore \ 4 > \sqrt{16+25-k}$ અને $5 > \sqrt{16+25-k}$

$\therefore \ k > 25$ અને $k > 16$

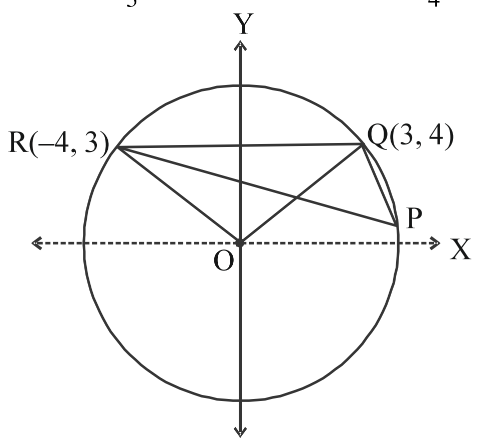
વળી, બિંદુ $(2, 3)$એ વર્તુળ $x^2+y^2-8x-10y+k=0$ ની અંદર આવેલ છે.

$\therefore \ 4+9-16-30+k<0 \quad \Rightarrow \quad k<33$

$\therefore \ 25<k<33$ **જવાબ : (B)**

(45) ΔPQR એ વર્તુળ $x^2+y^2=25$ની અંદર આવેલો છે. જો Q અને Rના યામો અનુક્રમે (3, 4) અને (–4, 3) હોય, તો $m\angle QPR =$ ......

(A) $\frac{\pi}{2}$ (B) $\frac{\pi}{3}$ (C) $\frac{\pi}{4}$ (D) $\frac{\pi}{6}$



આકૃતિ 9.40

ઉકેલ : આપણે જાણીએ છીએ કે, $m\angle QPR = \frac{1}{2}\angle QOR$, જ્યાં O એ વર્તુળનું કેન્દ્ર છે.

ધારો કે, $m_1 = \overline{OQ}$ નો ઢાળ $= \frac{4}{3}$ અને $m_2 = \overline{OR}$ નો ઢાળ $= -\frac{3}{4}$

$\therefore \ m_1 m_2 = -1$

$m\angle QOR = \frac{\pi}{2}$ આથી, $m\angle QPR = \frac{\pi}{4}$ **જવાબ : (C)**

(46) વર્તુળ $\sqrt{1+a^2}\left(x^2+y^2\right) - 2bx - 2aby = 0$ ની ત્રિજ્યા ......

(A) $|b|$ (B) $|a|$ (C) ab (D) $\sqrt{1+a^2}$

ઉકેલ : $x^2+y^2-\frac{2b}{\sqrt{1+a^2}}x-\frac{2ab}{\sqrt{1+a^2}}y = 0$ પરથી $g=\frac{-b}{\sqrt{1+a^2}}$, $f=\frac{-ab}{\sqrt{1+a^2}}$, $c=0$

$\therefore$ માંગેલ ત્રિજ્યા $= \sqrt{\frac{b^2}{1+a^2}+\frac{a^2b^2}{1+a^2}} = \sqrt{\frac{b^2\left(1+a^2\right)}{1+a^2}} = |b|$ **જવાબ : (A)**

(47) (h, k) કેન્દ્રવાળા વર્તુળોનો સમુદાય (–1, 1)માંથી પસાર થતો હોય અને X-અક્ષ તેના સ્પર્શકો હોય, તો kની કિંમતોનો ગણ ......

(A) $-\frac{1}{2} \le k \le \frac{1}{2}$ (B) $k \le \frac{1}{2}$ (C) $0 \le k \le \frac{1}{2}$ (D) $k \ge \frac{1}{2}$

ઉકેલ : (h, k) કેન્દ્રવાળા X-અક્ષને સ્પર્શતા વર્તુળનું સમીકરણ $(x-h)^2+(y-k)^2=k^2$ છે.

વર્તુળ $(-1, 1)$ માંથી પસાર થાય છે.

$\therefore (-1-h)^2+(1-k)^2=k^2$

h માં દ્વિઘાત સમીકરણ $h^2+2h-2k+2=0$ ના વાસ્તવિક બીજ h માટે $\Delta \geq 0$

$\therefore 4-4(1)(-2k+2) \geq 0$

$\therefore 2k-1 \geq 0$

$\therefore k \geq \frac{1}{2}$ **જવાબ : (D)**

(48) $\frac{5}{2}$ એકમ ત્રિજ્યા ધરાવતાં વર્તુળ પર બિંદુ P(–3, 4)માંથી દોરેલા સ્પર્શકો $\overline{PQ}$ અને $\overline{PR}$ હોય તથા ΔPQR નું પરિકેન્દ્ર (1, 3) હોય, તો તે વર્તુળનું સમીકરણ ......

(A) $4x^2+4y^2-40x+16y+91=0$ (B) $4x^2+4y^2-40x-16y-91=0$

(C) $4x^2+4y^2+40x-16y+91=0$ (D) $4x^2+4y^2-40x-16y+91=0$

ઉકેલ : ધારો કે માંગેલ વર્તુળનું કેન્દ્ર $C(h, k)$ અને ત્રિજ્યા r છે. તે ΔPQR નું પરિવૃત એ કેન્દ્ર (h, k)માંથી પસાર થાય છે. (એ $\overline{CP}$ વ્યાસવાળું વર્તુળ છે.)

$m\angle PQC = m\angle PRC = \frac{\pi}{2}$

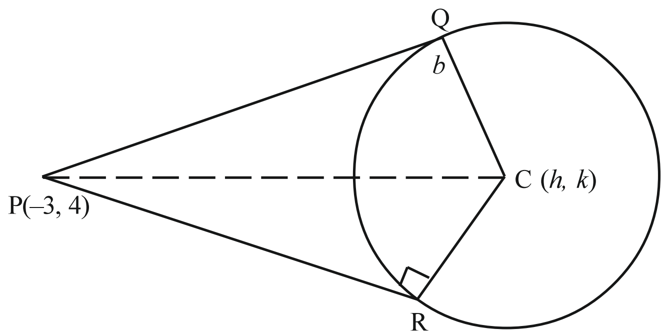
$\overline{PC}$ વ્યાસ છે.

$\therefore$ $\overline{PC}$ નું મધ્યબિંદુ એ ΔPQR નું પરિકેન્દ્ર થશે.

$\therefore (1, 3) = \left(\frac{-3+h}{2}, \frac{4+k}{2}\right)$

$h = 5, \quad k = 2$

આથી, વર્તુળનું કેન્દ્ર C(5, 2)



આકૃતિ 9.41

$\therefore$ માંગેલ વર્તુળનું સમીકરણ $(x-5)^2+(y-2)^2=\left(\frac{5}{2}\right)^2$

$\therefore x^2+y^2-10x-4y+29-\frac{25}{4}=0$

$\therefore x^2+y^2-10x-4y+\frac{91}{4}=0$

$\therefore 4x^2+4y^2-40x-16y+91=0$ **જવાબ : (D)**

(49) સમીકરણ $(ex-\pi y)^2+(\pi x+ey)^2=\pi^2-e^2$ એ ...... દર્શાવે છે.

(A) રેખા (B) વર્તુળ (C) પરવલય (D) ઉપવલય

ઉકેલ : આપેલ સમીકરણ, $e^2x^2-2e\pi xy+\pi^2y^2+\pi^2x^2+2e\pi xy+e^2y^2=\pi^2-e^2$

$\therefore (e^2+\pi^2)x^2+(e^2+\pi^2)y^2 = \pi^2-e^2$

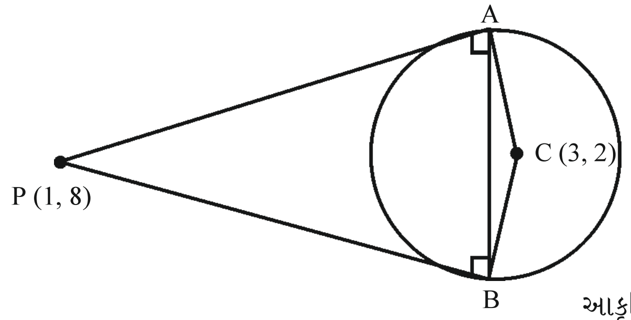
$\therefore\ x^2+y^2=\left(\sqrt{\dfrac{\pi^2-e^2}{\pi^2+e^2}}\right)^2$ જ્યાં $\dfrac{\pi^2-e^2}{\pi^2+e^2}>0$ છે જ.

$\therefore$ આપેલ સમીકરણ વર્તુળ દર્શાવે છે. **જવાબ : (B)**

(50) બિંદુ P(1, 8)માંથી વર્તુળ $x^2+y^2-6x-4y-11=0$ને દોરેલા સ્પર્શકો વર્તુળને A અને B બિંદુ આગળ સ્પર્શે છે, તો ΔPABના બધા જ શિરોબિંદુઓમાંથી પસાર થતા વર્તુળનું સમીકરણ (પરિવૃતનું સમીકરણ) ......

(A) $x^2+y^2+4x-6y+19=0$ (B) $x^2+y^2-4x-10y+19=0$

(C) $x^2+y^2-2x+6y-29=0$ (D) $x^2+y^2-6x-4y+19=0$



આકૃતિ 9.42

ઉકેલ : $\overline{CP}$ વ્યાસવાળું વર્તુળ માંગેલ વર્તુળ થાય, કારણ કે,

$m\angle PAC=m\angle PBC=\frac{\pi}{2}$

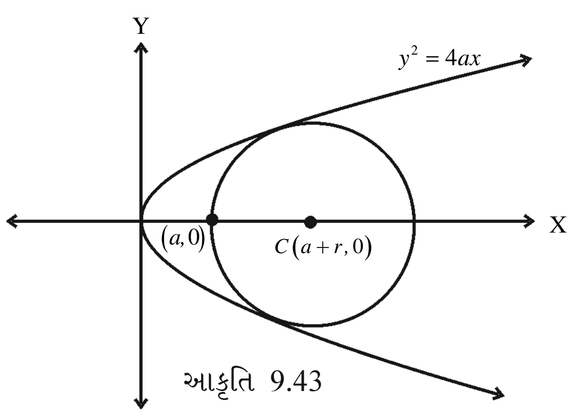
$\therefore\ (x-3)(x-1)+(y-2)(y-8)=0$

$\therefore\ x^2+y^2-4x-10y+19=0$ **જવાબ : (B)**

(51) પરવલય $y^2=4ax$ની નાભિમાંથી પસાર થતા પરવલયને સ્પર્શતાં મહત્તમ ત્રિજ્યાવાળા વર્તુળનું સમીકરણ ...... $(a>0)$

(A) $x^2+y^2+10ax+3a^2=0$ (B) $x^2+y^2-10ax+9a^2=0$

(C) $2x^2+2y^2+10ax+9a^2=0$ (D) $2x^2+2y^2-10ax+9a^2=0$



આકૃતિ 9.43

ઉકેલ : પરવલય $y^2=4ax$ની નાભિ $S(a,0)$ છે.

ધારો કે માંગેલ વર્તુળની ત્રિજ્યા r છે.

$\therefore$ તેનું કેન્દ્ર $C(a+r,0)$ થશે.

$\therefore$ વર્તુળનું સમીકરણ $(x-a-r)^2 + y^2 = r^2$

આ વર્તુળના પરવલય સાથે છેદબિંદુ માટે,

$\therefore \quad x^2 + a^2 + r^2 - 2ax + 2ar - 2rx + 4ax = r^2$

$\therefore \quad x^2 + a^2 + 2ax - 2rx + 2ar = 0$

$\therefore \quad x^2 + (2a-2r)x + 2ar + a^2 = 0$

દ્વિઘાત સમીકરણ માટે $\Delta = 0$ હોય, તો વર્તુળ પરવલયને સ્પર્શે.

$(2a-2r)^2 - 4(1)\left(2ar + a^2\right) = 0$

$\therefore \quad 4\left(a^2 - 2ar + r^2\right) - 8ar - 4a^2 = 0$

$\therefore \quad r^2 = 4ar.$ આથી, $r = 4a$

$\therefore$ વર્તુળનું કેન્દ્ર $= (5a, 0)$ અને ત્રિજ્યા $r = 4a$

$\therefore$ માંગેલ વર્તુળનું સમીકરણ $(x-5a)^2 + (y-0)^2 = 16a^2$

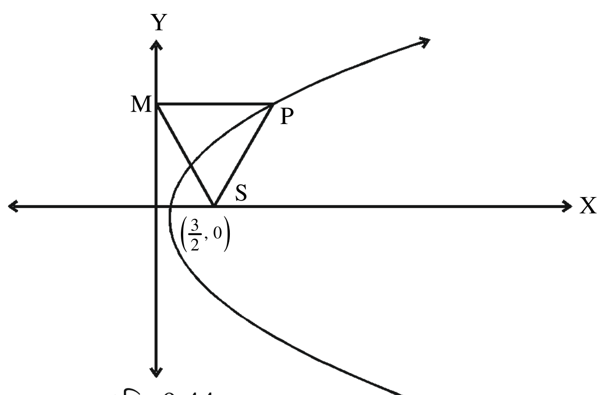
$\therefore \quad x^2 - 10ax + 25a^2 + y^2 - 16a^2 = 0$

$\therefore \quad x^2 + y^2 - 10ax + 9a^2 = 0$ **જવાબ : (B)**

(52) જો P એ પરવલય $y^2 = 3(2x-3)$ પરનું કોઈ પણ બિંદુ હોય તથા M બિંદુ Pમાંથી પરવલયની નિયામિકા પરનો લંબપાદ હોય અને S પરવલયનું નાભિ હોય, તો સમબાજુ ત્રિકોણ SMPની દરેક બાજુની લંબાઈ = ...

(A) 4 (B) 6 (C) 8 (D) 12

ઉકેલ :



આકૃતિ 9.44

અહીં, પરવલય $y^2 = 3(2x-3)$ પરથી,

$y^2 = 6\left(x - \frac{3}{2}\right)$ અર્થાત્ $(y-0)^2 = 6\left(x - \frac{3}{2}\right)$

ઊગમબિંદુનું $\left(\frac{3}{2}, 0\right)$ આગળ સ્થાનાંતર લેતાં,

$x' = x - \frac{3}{2}$, $\quad y' = y - 0$

$\therefore$ આપેલ પરવલય $y'^2 = 6x'$ થશે. તેને $y'^2 = 4ax'$ સાથે સરખવતાં, $a = \frac{3}{2}$

$\therefore$ આ પરવલયની નિયામિકા $x' = -a$ પરથી, $x - \frac{3}{2} = -\frac{3}{2}$ એટલે કે $x = 0$

હવે, Pના યામ $= \left(a + at^2, 2at\right) = \left(\frac{3}{2} + \frac{3}{2}t^2, 3t\right)$ તથા બિંદુ Pમાંથી નિયામિકા પરનો લંબપાદ $M(0, 3t)$ થશે.

નાભિ માટે, $x - \frac{3}{2} = \frac{3}{2}$, $y - 0 = 0$ એટલે કે $x = 3$, $y = 0$

$\therefore$ નાભિ $S(3, 0)$ થશે.

$\therefore$ $SM = \sqrt{9 + 9t^2}$, $PM = \frac{3}{2} + \frac{3}{2}t^2$

$\therefore$ $SM^2 = PM^2 \Rightarrow 9 + 9t^2 = \left(\frac{3}{2} + \frac{3}{2}t^2\right)^2$

$\Rightarrow 4\left(1 + t^2\right) = \left(1 + t^2\right)^2 \quad \Rightarrow 1 + t^2 = 4 \quad \Rightarrow t^2 = 3$

$\therefore$ $SM = \sqrt{9\left(1 + t^2\right)} = \sqrt{9 \times 4} = 6$. $\quad PM = \frac{3}{2}\left(1 + t^2\right) = \frac{3}{2}(4) = 6$

$\therefore$ $SP^2 = \left(\frac{3}{2}t^2 - \frac{3}{2}\right)^2 + 9t^2 = 9 + 27 = 36$

આથી, $SP = 6$

(નોંધ : $SP = PM$ હોય જ.) **જવાબ : (B)**

(53) પરવલય $y^2 = 12x$ની નાભિજીવા તેના અક્ષ સાથે α માપનો ખૂણો બનાવે છે, જ્યાં $\alpha \in \left(0, \frac{\pi}{3}\right)$. નાનામાં નાની નાભિજીવાની લંબાઈ = ...

(A) 12 (B) 24 (C) 16 (D) 32

ઉકેલ : પરવલય $y^2 = 12x$ પરથી $a = 3$

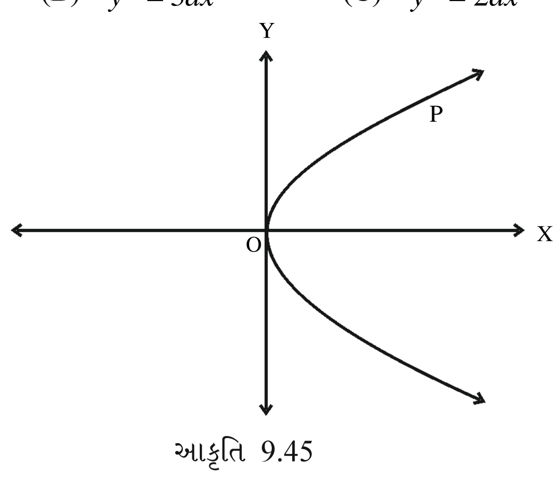
$\therefore$ નાભિજીવાની લંબાઈ $= 4|a| cosec^2\alpha = 12 cosec^2\alpha$

$\left(0, \frac{\pi}{3}\right)$માં $cosec\alpha$ ઘટતું વિધેય છે. તેથી $\alpha = \frac{\pi}{3}$ માટે $cosec\alpha$ની ન્યૂનતમ કિંમત મળે.

$\therefore$ નાભિજીવાની ન્યૂનતમ લંબાઈ $= 12 cosec^2 \frac{\pi}{3} = 16$ **જવાબ : (C)**

(54) પરવલય $y^2 = 4ax$ના શીર્ષમાંથી દોરેલી તમામ જીવાઓના મધ્યબિંદુના બિંદુગણનું સમીકરણ ......

(A) $y^2 = ax$ (B) $y^2 = 3ax$ (C) $y^2 = 2ax$ (D) $y^2 = 4ax$



આકૃતિ 9.45

ઉકેલ : ધારો કે પરવલય $y^2 = 4ax$ના શીર્ષ $O(0,0)$માંથી દોરેલી જીવા $\overline{OP}$નું મધ્યબિંદુ $M(h,k)$ છે.

$\therefore$ Pના યામ $=(2h,2k)$ થશે. તે પરવલય $y^2 = 4ax$ પરનું બિંદુ છે.

$\therefore\ 4k^2 = 8ha$

$\therefore\ k^2 = 2ha$

વ્યાપક રીતે મધ્યબિંદુ (x,y) લઈએ, તો મધ્યબિંદુના બિંદુગણનું સમીકરણ $y^2 = 2ax$ **જવાબ : (C)**

(55) જો પરવલય $y^2 = -4x$ના અભિલંબનું સમીકરણ $3x+2y+p=0$ હોય, તો p = ...

(A) $\frac{51}{4}$ (B) $\frac{49}{4}$ (C) $\frac{-51}{4}$ (D) $\frac{-49}{4}$

ઉકેલ : અહીં $3x+2y+p=0$ પરથી $y = -\frac{3}{2}x - \frac{p}{2}$

$\therefore\ m = \frac{-3}{2},\ \ c = \frac{-p}{2}$

પરવલય $y^2 = -4x$ પરથી $a = -1$

હવે, રેખા $y = \frac{-3}{2}x - \frac{p}{2}$ એ પરવલય $y^2 = -4x$નો અભિલંબ હોય, તો $c = -2am - am^3$

$\therefore\ \frac{-p}{2} = -2(-1)\left(\frac{-3}{2}\right) + \left(\frac{-27}{8}\right)$

$\therefore\ \frac{-8p}{2} = -24 - 27$. આથી $p = \frac{51}{4}$ **જવાબ : (A)**

બીજી રીત : $y^2 = -4x$ના અભિલંબનો ઢાળ $= \frac{-3}{2}$. આથી, તેના સ્પર્શકનો ઢાળ $= \frac{2}{3}$.

$$2y\frac{dy}{dx} = -4$$

$$\therefore\ \frac{dy}{dx} = \frac{-2}{y}$$

$\frac{-2}{y} = \frac{2}{3}$ આથી $y = -3$

$y=-3,\ y^2 = -4x$માં મૂકતાં $x = \frac{-9}{4}$

અભિલંબના સમીકરણમાં મૂકતાં $\frac{-27}{4} - 6 + p = 0$

$\therefore\ p = 6 + \frac{27}{4} = \frac{51}{4}$

(56) બિંદુ $(15,12)$માંથી પરવલય $y^2 = 4x$ ને ત્રણ અભિલંબો દોરવામાં આવે, તો આ અભિલંબના પાદબિંદુથી રચાતા ત્રિકોણનું પરિકેન્દ્ર = ...

(A) $\left(\frac{17}{3},3\right)$ (B) $\left(\frac{17}{2},2\right)$ (C) $\left(\frac{17}{2},3\right)$ (D) $\left(\frac{17}{3},2\right)$

ઉકેલ : $y^2 = 4x$ પરથી $a=1$

$\therefore$ પરવલયના t બિંદુ આગળના અભિલંબનું સમીકરણ

$y = -tx + 2t + t^3$ $(a = 1)$

વળી, અભિલંબ $(15, 12)$ બિંદુમાંથી પસાર થાય છે.

$\therefore\ 12 = -15t + 2t + t^3$

$\therefore\ t^3 - 13t - 12 = 0$

$(t+1)(t^2 - t - 12) = 0$. આથી, $(t+1)(t+3)(t-4) = 0$

$\therefore\ t = -1,\ t = 4,\ t = -3$

અભિલંબથી રચાતા ત્રિકોણનાં શિરોબિંદુઓ,

$t = -1 \Rightarrow (at^2, 2at) = A(1, -2),\ t = 4 \Rightarrow B(16, 8),\ t = -3 \Rightarrow C(9, -6)$

ΔABCનું પરિકેન્દ્ર $P(x, y)$ હોય, તો $PA = PB = PC$

$PA^2 = PB^2$	$PA^2 = PC^2$
$(x-1)^2 + (y+2)^2 = (x-16)^2 + (y-8)^2$	$(x-1)^2 + (y+2)^2 = (x-9)^2 + (y+6)^2$
$\therefore\ -2x + 1 + 4y + 4 = -32x + 256 - 16y + 64$	$\therefore\ -2x + 1 + 4y + 4 = -18x + 81 + 12y + 36$
$\therefore\ 30x + 20y - 315 = 0$	$\therefore\ 16x - 8y - 112 = 0$
$\therefore\ 6x + 4y - 63 = 0$	$\therefore\ 2x - y - 14 = 0$

સમીકરણો $6x + 4y - 63 = 0$ અને $2x - y - 14 = 0$ ઉકેલતાં $\left(\frac{17}{2}, 3\right)$ મળે

$\therefore$ પરિકેન્દ્ર $P\left(\frac{17}{2}, 3\right)$ **જવાબ : (C)**

(57) પરવલય $y^2 = 4ax$ની નાભિજીવાઓનાં મધ્યબિંદુઓના બિંદુગણનું સમીકરણ = ...

(A) $y^2 = 2a(x-a)$ (B) $y^2 = a(x-a)$ (C) $y^2 = 2a(y-a)$ (D) $y^2 = 2a(2x-a)$

ઉકેલ : પરવલય $y^2 = 4ax$ની નાભિજીવાનાં અંત્યબિંદુઓ $P(at^2, 2at)$ તથા $Q\left(\frac{a}{t^2}, \frac{-2a}{t}\right)$ થાય.

$\therefore$ નાભિજીવા $\overline{PQ}$નું મધ્યબિંદુ $M = \left(\frac{at^2 + \frac{a}{t^2}}{2}, \frac{2at - \frac{2a}{t}}{2}\right) = \left(\frac{a}{2}\left(t^2 + \frac{1}{t^2}\right), a\left(t - \frac{1}{t}\right)\right)$

$\therefore\ x = \frac{a}{2}\left(t^2 + \frac{1}{t^2}\right)$ અને $y = a\left(t - \frac{1}{t}\right)$

હવે $\left(t-\frac{1}{t}\right)^2 = t^2+\frac{1}{t^2}-2$

$\therefore \left(\frac{y}{a}\right)^2 = \frac{2x}{a}-2$

$\therefore y^2 = 2a(x-a)$ **જવાબ : (A)**

(58) ઊગમબિંદુમાંથી પસાર થતાં તથા પરવલય $y^2 = 4x$ પરના બિંદુ $(1, 2)$ આગળ પરવલયને સ્પર્શતા વર્તુળની ત્રિજ્યા = ...

(A) $\frac{5\sqrt{5}}{3}$ (B) $\frac{5\sqrt{2}}{3}$ (C) $\frac{5\sqrt{5}}{2}$ (D) $\frac{5\sqrt{2}}{2}$

ઉકેલ : પરવલય $y^2 = 4x$ ના બિંદુ $(1, 2)$ પરના અભિલંબનું સમીકરણ $y-2 = \frac{-2}{2}(x-1)$, $\left(y-y_1 = \frac{-y_1}{2a}(x-x_1)\right)$

$\therefore y-2 = -x+1$

$\therefore x+y-3 = 0$ (1)

ધારો કે વર્તુળનું કેન્દ્ર (a, b) છે.

$\therefore a+b-3 = 0$ (વર્તુળનું કેન્દ્ર અભિલંબ પર હોય) (1) પરથી (2)

અહીં વર્તુળનું કેન્દ્ર (a, b) છે તથા વર્તુળ $(0, 0)$ તથા $(1, 2)$માંથી પસાર થાય છે.

$\therefore a^2+b^2 = (a-1)^2+(b-2)^2$

$\therefore a^2+b^2 = a^2+b^2-2a-4b+5$

$\therefore 2a+4b-5 = 0$ (3)

(2) અને (3) ઉકેલતાં, $a = \frac{7}{2},\ b = \frac{-1}{2}$

$\therefore$ માંગેલ ત્રિજ્યા $= \sqrt{a^2+b^2} = \sqrt{\frac{49}{4}+\frac{1}{4}} = \sqrt{\frac{50}{4}} = \frac{5\sqrt{2}}{2}$ **જવાબ : (D)**

(59) વર્તુળ $x^2+y^2 = 2a^2$ અને પરવલય $y^2 = 8ax$ ના સામાન્ય સ્પર્શકોનાં સમીકરણ ......

(A) $x = \pm(y+2a)$ (B) $x = \pm(y+a)$ (C) $y = \pm(x+a)$ (D) $y = \pm(x+2a)$

ઉકેલ : પરવલય $y^2 = 4ax$ ના કોઈ પણ સ્પર્શકનું સમીકરણ $y = mx+\frac{a}{m}$ છે. અહીં પરવલય $y^2 = 8ax$ હોવાથી,

m ઢાળવાળા સ્પર્શકનું સમીકરણ $y = mx+\frac{2a}{m}$

વળી તે સ્પર્શક વર્તુળ $x^2+y^2 = 2a^2$ નો પણ સ્પર્શક છે.

$\therefore c^2 = a^2\left(1+m^2\right)$ પરથી, $\frac{4a^2}{m^2} = 2a^2\left(1+m^2\right)$

$\therefore m^4+m^2-2 = 0$

$\therefore \left(m^2+2\right)\left(m^2-1\right) = 0$

હવે $m^2 = -2$ શક્ય નથી.

$\therefore \; m^2 = 1$ આથી, $m = \pm 1$

$\therefore$ માંગેલ સ્પર્શકોનાં સમીકરણ $y = \pm(x + 2a)$

બીજી રીત :

વર્તુળના કેન્દ્ર $O(0, 0)$થી સામાન્ય સ્પર્શકનું લંબઅંતર = ત્રિજ્યા

$$\therefore \; \frac{\left|\frac{2a}{m}\right|}{\sqrt{1+m^2}} = \sqrt{2}\,a$$

$$\therefore \; \frac{2a}{m} = \pm\sqrt{2}\,a\left(\sqrt{1+m^2}\right)$$

$$\therefore \; \frac{4a^2}{m^2} = 2a^2\left(1+m^2\right)$$

$$\therefore \; m^4 + m^2 - 2 = 0$$

$$\therefore \; \left(m^2+2\right)\left(m^2-1\right) = 0$$

$$\therefore \; m = \pm 1$$

$\therefore$ માંગેલ સ્પર્શકનું સમીકરણ $y = \pm(x + 2a)$ **જવાબ : (D)**

(60) પરવલય $y^2 = 8x$ અને વક્ર $xy = -1$ના સામાન્ય સ્પર્શકનું સમીકરણ = ...

(A) $y = 2x + 1$ (B) $y = x + 2$ (C) $2y = x + 2$ (D) $y = 2x + 2$

ઉકેલ : પરવલય $y^2 = 8x$ પરથી $4a = 8$. આથી, $a = 2$

$\therefore$ પરવલયના કોઈ પણ સ્પર્શકનું સમીકરણ $y = mx + \frac{2}{m}$

વળી, તે $xy = -1$નો પણ સ્પર્શક હોવાથી, $x\left(mx + \frac{2}{m}\right) = -1$ નાં સમાન બીજ મળે.

$\therefore \; mx^2 + \frac{2}{m}x + 1 = 0$ નાં સમાન બીજ મળે. આથી, $\Delta = 0$.

$$\therefore \; \left(\frac{2}{m}\right)^2 - 4(m)(1) = 0$$

$$\therefore \; \frac{4}{m^2} = 4m$$

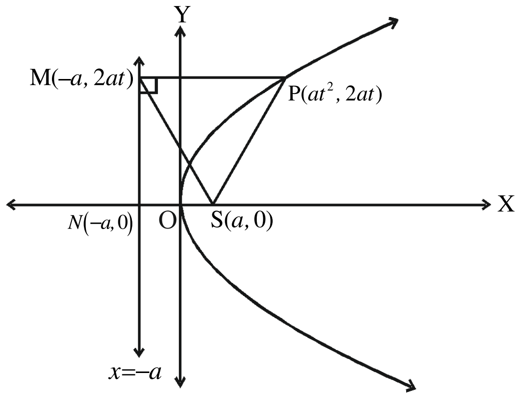
$$\therefore \; m^3 = 1$$

આથી, $m = 1$

$\therefore$ સામાન્ય સ્પર્શકનું સમીકરણ $y = mx + \frac{2}{m} = x + 2$ **જવાબ : (B)**

(61) પરવલય $y^2 = 4ax$ પરના બિંદુ Pમાંથી નિયામિકા પરનો લંબપાદ M છે. S નાભિ છે. જો ΔSPM સમબાજુ ત્રિકોણ હોય, તો તેનું ક્ષેત્રફળ ......

(A) $4\sqrt{3}\,a^2$ (B) $8\sqrt{3}\,a^2$ (C) $12\sqrt{3}\,a^2$ (D) એક પણ નહિ.



આકૃતિ 9.46

ઉકેલ : અહીં, પરવલય $y^2 = 4ax$ પરના બિંદુ $P\left(at^2, 2at\right)$માંથી નિયામિકા $x = -a$ પરનો લંબપાદ M છે.

$\therefore\ M\left(-a, 2at\right)$ મળે. $N\left(-a, 0\right)$ છે.

$MN = 2at, \quad NS = 2a$

$\therefore\ \Delta\, MNS$ માં $tan30^\circ = \frac{NS}{MN}$

$\therefore\ \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{2a}{2at}$. આથી, $t = \sqrt{3}$

$\therefore\ \Delta\, SPM$ નું ક્ષેત્રફળ $= \frac{\sqrt{3}}{4}\left(SP\right)^2$

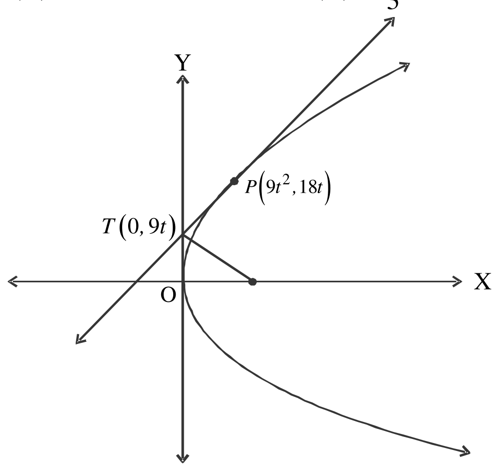
$= \frac{\sqrt{3}}{4}\left(at^2 + a\right)^2$

$= \frac{\sqrt{3}}{4}a^2 \times 16$

$= 4\sqrt{3}a^2$ **જવાબ : (A)**

(62) પરવલય $y^2 = 36x$ પરના સ્પર્શકનું સ્પર્શબિંદુ અને તેની નાભિમાંથી સ્પર્શક પર દોરેલ લંબના લંબપાદને જોડતા રેખાખંડનાં મધ્યબિંદુઓનો બિંદુગણ શાંકવ હોય, તો આવા શાંકવના નાભિલંબની લંબાઈ ...... થાય.

(A) $\frac{81}{4}$ (B) 81 (C) $\frac{81}{3}$ (D) $\frac{81}{2}$



આકૃતિ 9.47

ઉકેલ : ધારો કે પરવલય $y^2 = 36x$ પરના સ્પર્શકનું સ્પર્શબિંદુ $P\left(9t^2, 18t\right)$ છે. નાભિમાંથી સ્પર્શક પર દોરેલ લંબપાદ $T\left(0, 9t\right)$ છે.

ધારો કે $\overline{PT}$ નું મધ્યબિંદુ $Q\left(x_1, y_1\right)$ છે.

$\therefore\ (x_1, y_1) = \left(\frac{9t^2}{2}, \frac{27t}{2}\right)$ આથી, $x_1 = \frac{9t^2}{2},\ y_1 = \frac{27t}{2}$

$\therefore\ x_1 = \frac{9}{2} \times \frac{4{y_1}^2}{(27)^2} = \frac{2{y_1}^2}{81}$

$\therefore\ {y_1}^2 = \frac{81x_1}{2}$

$\therefore$ વ્યાપક રીતે મધ્યબિંદુના બિંદુગણનું સમીકરણ $y^2 = \frac{81}{2}x$

$\therefore$ માંગેલ નાભિલંબની લંબાઈ $= \frac{81}{2}$ **જવાબ : (D)**

(63) પરવલય $y^2 - 6x - 6y + 4 = 0$ નું નાભિ = ...

(A) $\left(\frac{2}{3}, 3\right)$ (B) $\left(\frac{4}{3}, 3\right)$ (C) $\left(\frac{-2}{3}, -3\right)$ (D) $\left(\frac{-4}{3}, \frac{2}{3}\right)$

ઉકેલ : અહીં, $y^2 - 6x - 6y + 4 = 0$

$\therefore\ y^2 - 6y + 9 - 6x - 5 = 0$

$\therefore\ (y-3)^2 = 6\left(x + \frac{5}{6}\right)$ (1)

$\therefore$ ઊગમબિંદુ $O(0, 0)$ નું સ્થાનાંતર $\left(\frac{-5}{6}, 3\right)$ આગળ કરવામાં આવે, તો

$x' = x - h$ અને $y' = y - k$ પરથી, $x' = x + \frac{5}{6}$ $y' = y - 3$

$\therefore$ (1) પરથી, $y'^2 = 6x'$. તેને $y'^2 = 4ax'$ સાથે સરખાવતાં, $4a = 6$ આથી, $a = \frac{3}{2}$

$\therefore\ y'^2 = 6x'$ નું નાભિ $S(a, 0) = S\left(\frac{3}{2}, 0\right) = (x'y')$

હવે, $x' = x + \frac{5}{6}$ અને $y' = y - 3$ પરથી, $\frac{3}{2} = x + \frac{5}{6}$ અને $0 = y - 3$

$\therefore\ x = \frac{2}{3}$ અને $y = 3$

$\therefore$ આપેલ પરવલયનું નાભિ $\left(\frac{2}{3}, 3\right)$ મળે. **જવાબ : (A)**

(64) પરવલય $y^2 = 4x$ અને $x^2 = 4y$ ના સામાન્ય સ્પર્શકનું સમીકરણ ......

(A) $x - y + 1 = 0$ (B) $x + y + 1 = 0$ (C) $x + y - 1 = 0$ (D) $x - y - 1 = 0$

ઉકેલ : પરવલય $y^2 = 4x$ પરથી, $4a = 4$ આથી, $a = 1$

$x^2 = 4y$ પરથી, $4b = 4$ આથી, $b = 1$

$\therefore$ બંને પરવલયોના સામાન્ય સ્પર્શકનું સમીકરણ

$a^{\frac{1}{3}}x + b^{\frac{1}{3}}y + (ab)^{\frac{2}{3}} = 0$ પરથી, $x + y + 1 = 0$ **જવાબ : (B)**

(65) પરવલય $y^2 = 7x$ની નાભિજીવા X-અક્ષની ધન દિશા સાથે $\frac{\pi}{3}$ માપનો ખૂણો બનાવે, તો નાભિજીવાની લંબાઈ ......

(A) $\frac{28}{3}$ (B) $\frac{18}{3}$ (C) $\frac{7}{3}$ (D) $\frac{14}{3}$

ઉકેલ : અહીં $a = \frac{7}{4}$, $\theta = \frac{\pi}{3}$

$\therefore$ નાભિજીવાની લંબાઈ $= 4|a| \, cosec^2\theta$

$= 4 \times \frac{7}{4} \times \cos ec^2 \frac{\pi}{3} \quad = 7 \times \frac{4}{3} \quad = \frac{28}{3}$ **જવાબ : (A)**

(66) પરવલય $y^2 = 4ax$ પરના બિંદુ P આગળનો સ્પર્શક પરવલય $x^2 = 4by$ને સ્પર્શે છે, તો બિંદુ Pના બિંદુગણનું સમીકરણ = ...

(A) $y = 2x^2$ (B) $xy = -2ab$ (C) $x^2 + y^2 = 16$ (D) $x^2 = 4y$

ઉકેલ : પરવલય $y^2 = 4ax$ પરના બિંદુ $P(x_1, y_1)$ આગળનો સ્પર્શક, $yy_1 = 2a(x + x_1)$ છે અને પરવલય $x^2 = 4by$ છે.

છેદબિંદુ માટે $x^2 = 4b\left(\frac{2a}{y_1}(x + x_1)\right)$

$\therefore \quad y_1x^2 - 8abx - 8abx_1 = 0$

આ જીવા $x^2 = 4by$ નો સ્પર્શક હોવાથી $\Delta = 0$

$\therefore \quad 64a^2b^2 - 4(y_1)(-8abx_1) = 0$

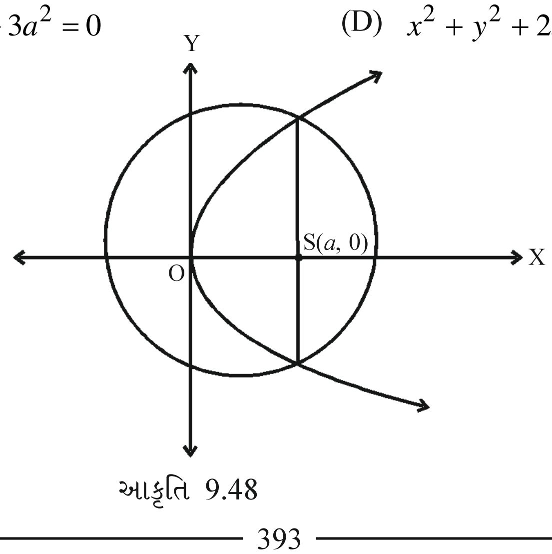
$\therefore \quad -2ab = x_1y_1$

$\therefore$ વ્યાપક રીતે બિંદુગણનું સમીકરણ $xy = -2ab$ **જવાબ : (B)**

(67) પરવલય $y^2 = 4ax$ના નાભિલંબને વ્યાસ લઈ દોરેલ વર્તુળનું સમીકરણ ...... $(a > 0)$

(A) $x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + 3a^2 = 0$ (B) $x^2 + y^2 + 2ax + 2by + 3a^2 = 0$

(C) $x^2 + y^2 - 2ax - 3a^2 = 0$ (D) $x^2 + y^2 + 2by - 3a^2 = 0$



આકૃતિ 9.48

ઉકેલ : પરવલય $y^2 = 4ax$ નું નાભિ $(a, 0)$ અને નાભિલંબની લંબાઈ $4a$, $(a > 0)$

$\therefore$ વર્તુળનો વ્યાસ $4a$ અને તેથી વર્તુળની ત્રિજ્યા $= 2a$

$(a, 0)$ કેન્દ્રવાળા તથા $2a$ ત્રિજ્યાવાળા વર્તુળનું સમીકરણ

$(x-a)^2 + (y-0)^2 = 4a^2$

$\therefore$ $x^2 - 2ax + a^2 + y^2 - 4a^2 = 0$

$\therefore$ $x^2 + y^2 - 2ax - 3a^2 = 0$ **જવાબ : (C)**

(68) જેનું નાભિ $(-1, 4)$ હોય તથા નિયામિકા $3x + y - 1 = 0$ હોય તેવા પરવલયનું સમીકરણ ......

(A) $x^2 + 9y^2 - 6xy + 26x + 78y - 169 = 0$ (B) $9x^2 + y^2 - 6xy + 26x - 78y + 169 = 0$

(C) $x^2 + y^2 - 6xy + 26x + 78y + 169 = 0$ (D) $x^2 + 9y^2 - 6xy + 26x - 78y + 169 = 0$

ઉકેલ : ધારો કે પરવલય પરનું બિંદુ $P(x, y)$ તથા નાભિ $S(-1, 4)$ તથા નિયામિકા $l: 3x + y - 1 = 0$ છે તથા બિંદુ P માંથી નિયામિકા l પરનો લંબપાદ M છે.

$\therefore$ $SP = PM$

$SP^2 = PM^2$

$\therefore$ $(x+1)^2 + (y-4)^2 = \left(\frac{3x+y-1}{\sqrt{9+1}}\right)^2$

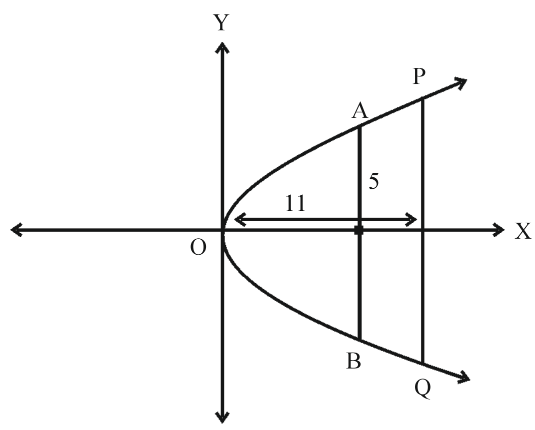
$\therefore$ $x^2 + 2x + 1 + y^2 - 8y + 16 = \frac{(3x+y-1)^2}{10}$

$\therefore$ $10x^2 + 10y^2 + 20x - 80y + 170 = 9x^2 + y^2 + 1 + 6xy - 2y - 6x$

$\therefore$ $x^2 + 9y^2 - 6xy + 26x - 78y + 169 = 0$ **જવાબ : (D)**

(69) એક પરવલયાકાર પરાવર્તકનો આડછેદ આકૃતિમાં દર્શાવ્યો છે. નાભિ પાસે મુખ $\overline{AB}$ની પહોળાઈ 10 સેમી છે. શિરોબિંદુથી 11 સેમી દૂર આવેલ મુખ $\overline{PQ}$ની પહોળાઈ ...... થાય.

(A) $8\sqrt{110}$ (B) $4\sqrt{110}$ (C) $2\sqrt{110}$ (D) $\sqrt{110}$



આકૃતિ 9.49

ઉકેલ : પરવલય પરાવર્તકના નાભિ આગળ મુખ $\overline{AB}$ની પહોળાઈ 10 સેમી છે.

$\therefore \quad 4a = 10$ સેમી

$\therefore$ પરવલયનું સમીકરણ $y^2 = 10x$ થશે.

હવે, શિરોબિંદુથી 11 સેમી દૂર આવેલ મુખ માટે x-યામ $= 11$

$\therefore \; y^2 = 10 \times 11 = 110$

$\therefore \quad y = \pm\sqrt{110}$

$\therefore \quad P\left(11, \sqrt{110}\right), \; Q\left(11, -\sqrt{110}\right)$ થશે. આથી, $PQ = 2\sqrt{110}$ **જવાબ : (C)**

(70) પરવલયના શીર્ષ આગળનો સ્પર્શક, નિયામિકા તથા નાભિલંબ વચ્ચેના રેખાખંડનું ...... ગુણોત્તરમાં વિભાજન કરે.

(A) 1 : 2 (B) 1 : 1 (C) 2 : 1 (D) એક પણ નહિ.

ઉકેલ : પરવલય $y^2 = 4ax$ના શીર્ષ આગળનો સ્પર્શક Y-અક્ષ થશે. તેથી ઊગમબિંદુથી પરવલયની નિયામિકા સુધીનું અંતર અને ઊગમબિંદુથી નાભિલંબ સુધીનું અંતર સમાન થાય. તેથી નિયામિકા અને નાભિલંબને જોડતા રેખાખંડનું મધ્યબિંદુ ઊગમબિંદુ (પરવલયનું શીર્ષ) થશે.

$\therefore$ પરવલયનું શીર્ષ તે રેખાખંડનું 1 : 1ના ગુણોત્તરમાં વિભાજન કરે છે. **જવાબ : (B)**

(71) પરવલય $y^2 = 16x$ને $(3, 9)$માંથી દોરેલા સ્પર્શકોના ઢાળ m_1 અને m_2 હોય તો $\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} =$ ......

(A) $\frac{9}{4}$ (B) $\frac{10}{9}$ (C) $\frac{19}{2}$ (D) $\frac{9}{2}$

ઉકેલ : પરવલય $y^2 = 16x$માં $(3, 9)$ લેતાં $9^2 - 16(3) = 81 - 48 > 0$

$\therefore \; (3, 9)$માંથી આપેલા પરવલયને બે સ્પર્શકો દોરી શકાય.

$\therefore$ પરવલય $y^2 = 16x$ના m ઢાળવાળા સ્પર્શકનું સમીકરણ $y = mx + \frac{4}{m}$

વળી, તે $(3, 9)$માંથી પસાર થાય છે. આથી, $9 = 3m + \frac{4}{m}$

$\therefore \; 3m^2 - 9m + 4 = 0$

તેનાં બે બીજ m_1 અને m_2 હોય, તો

$m_1 + m_2 = 3, \quad m_1 m_2 = \frac{4}{3}$

$\therefore \; \frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} = \frac{m_1 + m_2}{m_1 m_2} = \frac{3}{\frac{4}{3}} = \frac{9}{4}$ **જવાબ : (A)**

(72) પરવલય $y^2+4y+x=0$નું શિરોબિંદુ ...... ચરણમાં આવેલ છે.

(A) પ્રથમ (B) દ્વિતીય (C) તૃતીય (D) ચતુર્થ

ઉકેલ : $y^2+4y+x=0$

$\therefore\ y^2+4y+4-4+x=0$

$\therefore\ (y+2)^2=-(x-4)$

$\therefore$ પરવલયનું શિરોબિંદુ $(4,-2)$ થશે. તે ચતુર્થ ચરણમાં છે. **જવાબ : (D)**

(73) રેખા $y=mx+c$ એ પરવલય $y^2-4x-4=0$ને સ્પર્શે, તો $c\in$ ......

(A) $(-\infty,2)\cup(2,\infty)$ (B) $(-\infty,-2)\cup(2,\infty)$

(C) $(-\infty,-2]\cup(2,\infty)$ (D) $(-\infty,-2]\cup[2,\infty)$

ઉકેલ : અહીં, $y=mx+c$ અને $y^2-4x-4=0$ પરથી, $(mx+c)^2-4x-4=0$

$\therefore\ m^2x^2+2mcx+c^2-4x-4=0$

$\therefore\ m^2x^2+(2mc-4)x+(c^2-4)=0$

રેખા એ પરવલયને સ્પર્શે છે, તેથી $\Delta=0$ લેતાં,

$(2mc-4)^2-4m^2(c^2-4)=0$

$\therefore\ 4m^2c^2-16mc+16-4m^2c^2+16m^2=0$

$\therefore\ 16m^2-16mc+16=0$

$\therefore\ m^2-mc+1=0$

દ્વિઘાત સમીકરણ પરથી m વાસ્તવિક સંખ્યા મળે તે માટે, $(-c)^2-4(1)(1)\ge 0$

$\therefore\ c^2\ge 4$

$\therefore\ c\in(-\infty,-2]\cup[2,\infty)$ **જવાબ : (D)**

(74) બિંદુ $(-6,12)$માંથી પરવલય $y^2=24x$ પર દોરેલા બે સ્પર્શકો વચ્ચેના ખૂણાનું માપ = ...

(A) $\frac{\pi}{4}$ (B) $\frac{\pi}{3}$ (C) $\frac{\pi}{2}$ (D) $\frac{\pi}{6}$

ઉકેલ : પરવલય $y^2=24x$ની નિયામિકાનું સમીકરણ $x=-6$

આપેલ બિંદુનો x-યામ $=-6$ હોવાથી આપેલ બિંદુ નિયામિકા પર છે.

$\therefore$ સ્પર્શકો વચ્ચેના ખૂણાનું માપ $=\frac{\pi}{2}$ **જવાબ : (C)**

બીજી રીત : પરવલય $y^2=24x$ના m ઢાળવાળા સ્પર્શકનું સમીકરણ $y=mx+\frac{6}{m}$

સ્પર્શક $(-6, 12)$ માંથી પસાર થાય છે.

$\therefore\ 12 = -6m + \frac{6}{m}$

$\therefore\ 12m = -6m^2 + 6$

$\therefore\ m^2 + 2m - 1 = 0$

$\therefore$ બીજનો ગુણાકાર $m_1 m_2 = -1$

$\therefore$ બંને સ્પર્શક વચ્ચેના ખૂણાનું માપ $\frac{\pi}{2}$ છે. **જવાબ : (C)**

(75) પરવલય $(x+3)^2 = 4(y-1)$ની નિયામિકાનું સમીકરણ ...... થાય.

(A) $x=1$ (B) $x=0$ (C) $y=1$ (D) $y=0$

ઉકેલ : આપેલ પરવલય $(x+3)^2 = 4(y-1)$ છે. ઊગમબિંદુનું સ્થાનાંતર $(-3, 1)$ આગળ લેતાં,

$x' = x - h,\ y' = y - k$ પરથી, $x' = x + 3\quad y' = y - 1$

$\therefore$ આપેલ સમીકરણ $x'^2 = 4y'$ બને તેને $x'^2 = 4by'$ સાથે સરખાવતાં, $4b = 4$. આથી, $b = 1$

$\therefore$ નિયામિકાનું સમીકરણ $y' = -b \Rightarrow y' = -1$

$\therefore\ y - 1 = -1$

આથી, $y = 0$ નિયામિકાનું સમીકરણ થાય. **જવાબ : (D)**

(76) પરવલય $(y+2)^2 = 4(x-1)$ના શિરોલંબ સ્પર્શકનું સમીકરણ ...... છે.

(A) $x=0$ (B) $x=1$ (C) $x=-1$ (D) $x=2$

ઉકેલ : $(y+2)^2 = 4(x-1)$ પરવલય આપેલ છે.

ઊગમબિંદુનું સ્થાનાંતર $(1, -2)$ આગળ કરતાં,

$x' = x - h,\ y' = y - k$ પરથી, $x' = x - 1,\ y' = y + 2$

$\therefore\ y'^2 = 4x'$. તેનું શિરોબિંદુ $(0, 0)$ છે.

$\therefore$ આપેલ પરવલયનું શિરોબિંદુ $(1, -2)$ છે.

$\therefore$ પરવલયના શિરોલંબ સ્પર્શકનું સમીકરણ $x' = 0$ છે. એટલે કે $x - 1 = 0$ **જવાબ : (B)**

(77) પરવલય $y^2 = 4ax$ના t બિંદુ આગળનો સ્પર્શક X-અક્ષની ધન દિશા સાથે α માપનો ખૂણો બનાવે, તો t = ...

(A) $tan\alpha$ (B) $cot\alpha$ (C) $sin\alpha$ (D) $cos\alpha$

ઉકેલ : પરવલય $y^2 = 4ax$ના t બિંદુ આગળના સ્પર્શકનું સમીકરણ $x - ty + at^2 = 0$

અહીં, સ્પર્શક X-અક્ષની ધન દિશા સાથે α માપનો ખૂણો બનાવે, તો સ્પર્શકનો ઢાળ $= tan\alpha$

$\therefore$ t બિંદુએ સ્પર્શકનો ઢાળ $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{t}$

$\therefore\ \frac{1}{t} = tan\alpha$. આથી $t = cot\alpha$ **જવાબ : (B)**

(78) પરવલય $y^2 = 4ax$ની નાભિ $S(a, 0)$ અને નાભિજીવા $\overline{PQ}$ હોય, તો $SP, 2a, SQ$ ...... શ્રેણીમાં હોય. $a > 0$

(A) સમાંતર (B) સમગુણોત્તર (C) સ્વરિત (D) એક પણ નહિ.

ઉકેલ : અહીં પરવલય $y^2 = 4ax$ અને $\overline{PQ}$ નાભિજીવા છે.

$$\frac{1}{SP} + \frac{1}{SQ} = \frac{1}{a}$$

$$\therefore \frac{1}{SP} + \frac{1}{SQ} = \frac{2}{2a}$$

$\therefore \frac{1}{SP}, \frac{1}{2a}, \frac{1}{SQ}$ સમાંતર શ્રેણીમાં છે.

$\therefore SP, 2a, SQ$ સ્વરિત શ્રેણીમાં છે. **જવાબ : (C)**

(79) પરવલય $y^2 = 16x$ પરના ...... બિંદુ આગળ દોરેલા અભિલંબો અક્ષો સાથે સમાન માપના ખૂણા બનાવે છે.

(A) $(4, 8)$ (B) $(-4, 8)$ (C) $(-4, -8)$ (D) એક પણ નહિ.

ઉકેલ : પરવલય $y^2 = 16x$ પરથી $a = 4$

અહીં અભિલંબ અક્ષો સાથે સમાન માપનો ખૂણો બનાવે છે. આથી, ઢાળ $= \pm \tan\frac{\pi}{4}$

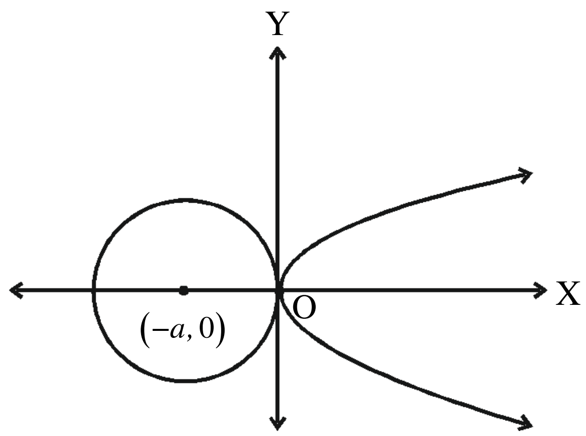
$\therefore \quad m = \pm 1$

પરવલય $y^2 = 16x$ના m ઢાળવાળા અભિલંબનું પાદબિંદુ $(am^2, -2am)$ હોય.

$\therefore$ માંગેલ બિંદુના યામ $= (4, 8)$ અથવા $(4, -8)$ **જવાબ : (A)**

(80) વર્તુળ $x^2 + y^2 + 2ax = 0,\ a \in R$ એ પરવલય $y^2 = 4x$ને બહારથી સ્પર્શે, તો ......

(A) $a > 0$ (B) $a < 0$ (C) $a = 0$ (D) $a = -1$



આકૃતિ 9.50

ઉકેલ : આપેલ વર્તુળ $x^2 + y^2 + 2ax = 0$

$\therefore \quad (x + a)^2 + (y - 0)^2 = a^2$

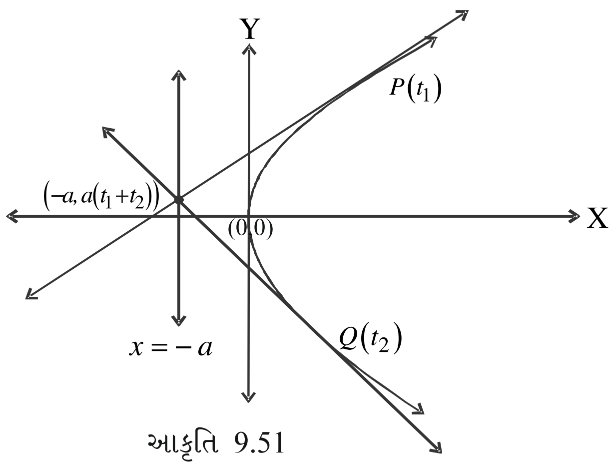
$\therefore$ વર્તુળનું કેન્દ્ર $(-a, 0)$, ત્રિજ્યા $= |a|$ થશે. બંનેનો સ્પર્શક અક્ષ $Y-$છે.

વળી, આપેલ પરવલય $y^2 = 4x$ એ $Y-$અક્ષની જમણી બાજુ છે.

$\therefore$ વર્તુળ પરવલયને બહારથી સ્પર્શે, તો $a > 0$ હોવું જોઈએ. **જવાબ : (A)**

(81) પરવલય $y^2 = 4ax$ના બે પરસ્પર લંબ સ્પર્શકો હંમેશાં ...... રેખા પર છેદે છે.

(A) $x = -a$ (B) $x = 2a$ (C) $x = -4a$ (D) $x = 3a$



આકૃતિ 9.51

ઉકેલ : પરવલય $y^2 = 4ax$ પરના બિંદુ $P(t_1)$ અને $Q(t_2)$ બિંદુઓએ દોરેલા સ્પર્શકોનાં સમીકરણ અનુક્રમે $y = \frac{1}{t_1}x + at_1$ (1) અને $y = \frac{1}{t_2}x + at_2$ છે. (2)

હવે, બંને સ્પર્શકો પરસ્પર લંબ હોવાથી $\frac{1}{t_1} \times \frac{1}{t_2} = -1$. આથી, $t_1 t_2 = -1$

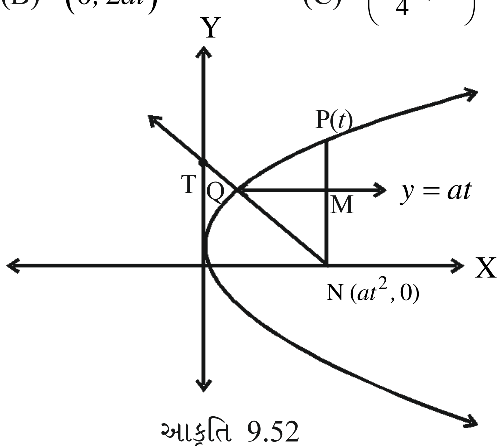
(1) અને (2) પરથી બંને સ્પર્શકોનું છેદબિંદુ $= (at_1t_2, a(t_1 + t_2)) = (-a, a(t_1 + t_2))$

આમ, બંને સ્પર્શકોનાં છેદબિંદુનો x-યામ $= -a$ હોવાથી, બંને સ્પર્શકોનું છેદબિંદુ રેખા $x = -a$ ઉપર છે.

જવાબ : (A)

(82) ધારો કે N એ પરવલય $y^2 = 4ax$ ના બિંદુ $P(t)$થી X-અક્ષ પરનો લંબપાદ છે તથા X-અક્ષને સમાંતર અને $\overline{PN}$ને દુભાગતી રેખા પરવલયને Qમાં મળે છે. જો $\overrightarrow{NQ}$ એ Y-અક્ષને Tમાં મળે, તો Tના યામ = ...

(A) $\left(0, \frac{4}{3}at\right)$ (B) $(0, 2at)$ (C) $\left(\frac{at^2}{4}, at\right)$ (D) $(0, at)$



આકૃતિ 9.52

ઉકેલ : અહીં $P\left(at^2, 2at\right)$ આથી, $N\left(at^2, 0\right)$

$\therefore$ $\overline{PN}$ નું મધ્યબિંદુ $M\left(at^2, at\right)$ છે.

X-અક્ષને સમાંતર માંગેલ રેખાનું સમીકરણ $y = at$ છે.

હવે, $y = at$ અને $y^2 = 4ax$ નું છેદબિંદુ Q છે.

$\therefore$ $a^2t^2 = 4ax$

$\therefore$ $x = \frac{at^2}{4}$. આથી, $Q\left(\frac{at^2}{4}, at\right)$

ધારો કે T ના યામ $= (0, b)$ છે.

અહીં, T, Q, N સમરેખ છે.

$$\therefore \begin{vmatrix} 0 & b & 1 \\ \frac{at^2}{4} & at & 1 \\ at^2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$\therefore$ $-b\left(\frac{at^2}{4} - at^2\right) - a^2t^3 = 0$

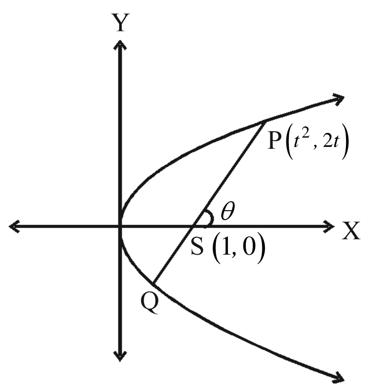
$\therefore$ $\frac{3bat^2}{4} = a^2t^3$

$\therefore$ $b = \frac{4}{3}at$

$\therefore$ T ના યામ $\left(0, \frac{4}{3}at\right)$ **જવાબ : (A)**

(83) X-અક્ષની ધન દિશા સાથે θ માપનો ખૂણો બનાવતી, પરવલય $y^2 = 4x$ ની નાભિજીવાની લંબાઈ 8 હોય, તો θ = ... (જ્યાં $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$)

(A) $\frac{\pi}{6}$ (B) $\frac{\pi}{3}$ (C) $\frac{\pi}{4}$ (D) $\frac{\pi}{2}$



આકૃતિ 9.53

ઉકેલ : અહીં, પરવલય $y^2 = 4x$ માટે $4a = 4$. આથી, $a = 1$

તથા $P(at^2, 2at) = P(t^2, 2t)$, નાભિ $S(a, 0) = S(1, 0)$

નાભિજીવા $\overline{PQ}$. X-અક્ષની ધન દિશા સાથે θ માપનો ખૂણો બનાવે છે.

લંબાઈ $l = 4a\, cosec^2\theta = 8$. આથી $cosec^2\theta = 2$ $(a = 1)$

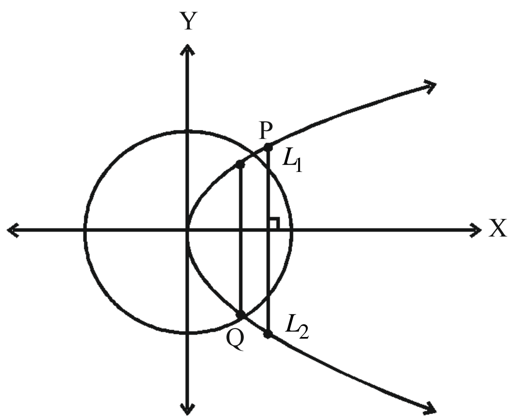
$\therefore\ sin^2\theta = \frac{1}{2}$

$\therefore\ sin\theta = \frac{1}{\sqrt{2}}$ $\left(0 < \theta < \frac{\pi}{2}\right)$

$\therefore\ \theta = \frac{\pi}{4}$ **જવાબ : (C)**

(84) એક વર્તુળનું કેન્દ્ર, પરવલય $y^2 = 4ax$ $(a > 0)$નું શીર્ષ (શિરોબિંદુ) છે તથા વ્યાસ એ પરવલયના નાભિલંબની લંબાઈ કરતા $\frac{3}{4}$ ગણો છે. જો $\overleftrightarrow{PQ}$ એ પરવલય અને વર્તુળની સામાન્ય જીવાને સમાવતી રેખા હોય અને L_1L_2 નાભિલંબ હોય, તો સમલંબ ચતુષ્કોણ PL_1L_2Qનું ક્ષેત્રફળ = ...

(A) $\left(\frac{\sqrt{2}+1}{2}\right)a^2$ (B) $\left(\frac{\sqrt{2}+2}{\sqrt{2}}\right)a^2$ (C) $\left(\sqrt{2}+2\right)a^2$ (D) $\left(\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}}\right)a^2$



આકૃતિ 9.54

ઉકેલ : વર્તુળનું કેન્દ્ર = પરવલય $y^2 = 4ax$નું શીર્ષ $= (0, 0)$

વર્તુળનો વ્યાસ $= \frac{3}{4} \times$ પરવલય $y^2 = 4ax$ના નાભિલંબની લંબાઈ

$\therefore$ વર્તુળની ત્રિજ્યા $= \frac{1}{2}\left(\frac{3}{4} \times 4a\right) = \frac{3a}{2}$

$\therefore$ વર્તુળનું સમીકરણ $x^2 + y^2 = \frac{9a^2}{4}$ (1)

પરવલયનું સમીકરણ $y^2 = 4ax$ છે. (2)

P અને Q માટે આ સમીકરણો ઉકેલવા પડે.

(1) અને (2) પરથી, $x^2 + 4ax - \frac{9a^2}{4} = 0$

$\therefore\ 4x^2 + 16ax - 9a^2 = 0$

$\therefore\ (2x - a)(2x + 9a) = 0$

$\therefore\ x = \frac{a}{2}$ કારણ કે $x > 0$

હવે, $y^2 = 4ax = 4a\left(\frac{a}{2}\right) = 2a^2$

$\therefore \quad y = \pm\sqrt{2}a$ છેદબિંદુ $P\left(\frac{a}{2}, \sqrt{2}a\right), \left(\frac{a}{2}, -2\sqrt{a}\right)$ બને.

$\therefore \quad PQ = 2\sqrt{2}a$

$\therefore \quad PL_1L_2Q = \frac{1}{2}\left(a - \frac{a}{2}\right)\left(4a + 2\sqrt{2}a\right)$ {(સમાંતર બાજુઓ વચ્ચેનું અંતર) (સમાંતર બાજુઓનો સરવાળો)}

$= \frac{a^2}{4}\left(4 + 2\sqrt{2}\right) = \left(1 + \frac{1}{\sqrt{2}}\right)a^2 = \left(\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}}\right)a^2$ **જવાબ : (D)**

(85) બિંદુ $P(4, -4)$ અને $Q(9, 6)$ એ પરવલય $y^2 = 4a(x - b)$ પરનાં બિંદુઓ હોય તથા R એ ચાપ PQ પરનું કોઈ બિંદુ હોય, તો બિંદુ Rના યામ ...... હોય ત્યારે ΔPRQનું ક્ષેત્રફળ મહત્તમ થાય.

(A) $\left(\frac{1}{4}, 1\right)$ (B) $\left(-\frac{1}{4}, 0\right)$ (C) $\left(\frac{9}{4}, 4\right)$ (D) $\left(\frac{9}{4}, \frac{1}{4}\right)$

ઉકેલ : બિંદુ $(4, -4)$ અને $(9, 6)$ એ પરવલય $y^2 = 4a(x - b)$ પરનાં બિંદુ છે.

$\therefore \quad 4 = a(4 - b)$

$\therefore \quad 4a - ab = 4$ (1)

$9 = a(9 - b)$

$\therefore \quad 9a - ab = 9$ (2)

$\therefore \quad a = 1$ અને $b = 0$ ((1) અને (2) પરથી)

$\therefore$ પરવલય $y^2 = 4x$ થશે.

અહીં R એ ચાપ PQ પરનું કોઈ બિંદુ છે. ધારો કે $R\left(t^2, 2t\right)$

$\therefore \Delta PRQ$ના ક્ષેત્રફળ માટે,

$$\Delta = \begin{vmatrix} 4 & -4 & 1 \\ 9 & 6 & 1 \\ t^2 & 2t & 1 \end{vmatrix} = 4(6 - 2t) + 4(9 - t^2) + 1(18t - 6t^2)$$

$= 24 - 8t + 36 - 4t^2 + 18t - 6t^2$

$= -(10t^2 - 10t - 60)$

$= -10\left(t^2 - t + \frac{1}{4} - \frac{1}{4} - 6\right)$

$= -10\left(t - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{250}{4}$

બીજી રીત :

$-10t^2 + 10t + 60$ મહત્તમ થવા માટે

$t = \frac{-b}{2a} = \frac{-10}{-20} = \frac{1}{2}$

$\therefore \quad R\left(\frac{1}{4}, 1\right)$.

$\therefore$ ત્રિકોણ PRQનું ક્ષેત્રફળ $= \frac{1}{2}|\Delta|$ મહત્તમ માટે $t = \frac{1}{2}$ હોવું જોઈએ.

$\therefore \quad R\left(\frac{1}{4}, 1\right)$ થાય ત્યારે ΔPRQનું ક્ષેત્રફળ મહત્તમ થાય. **જવાબ : (A)**

(86) X-અક્ષ સાથે $\frac{\pi}{3}$ માપનો ખૂણો બનાવતા પરવલય $y^2 = 12x$ના સ્પર્શકનું સમીકરણ = ...

(A) $\pm y - \sqrt{3}x + \sqrt{3} = 0$ (B) $\pm y + \sqrt{3}x + 3 = 0$

(C) $\pm y - \sqrt{3}x - \sqrt{3} = 0$ (D) $\pm y + \sqrt{3}x - 3 = 0$

ઉકેલ : સ્પર્શક X-અક્ષ સાથે $\frac{\pi}{3}$ માપનો ખૂણો બનાવે છે.

$\therefore$ સ્પર્શકનો ઢાળ $m = tan\frac{\pi}{3}$ અથવા $m = tan\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right)$

$\therefore$ $m = \sqrt{3}$ અથવા $m = -\sqrt{3}$

વળી, $y^2 = 12x$ પરથી $a = 3$

$\therefore$ પરવલયના m ઢાળવાળા સ્પર્શકના સમીકરણ $y = mx + \frac{a}{m}$ પરથી

$y = \sqrt{3}x + \sqrt{3}$ અથવા $y = -\sqrt{3}x - \sqrt{3}$

$\pm y = \sqrt{3}x + \sqrt{3}$

$\therefore$ $\pm y - \sqrt{3}x - \sqrt{3} = 0$ **જવાબ : (C)**

(87) ધારો કે બિંદુ $M(2, 0)$ અને બિંદુ N એ પરવલય $y^2 = 16x$ પરનું બિંદુ છે તથા $\overline{MN}$ ના મધ્યબિંદુના બિંદુગણનું સમીકરણ $y^2 + kx + 8 = 0$ તો k = ...

(A) 16 (B) 8 (C) -8 (D) -16

ઉકેલ : ધારો કે $M(2, 0)$ તથા $N\left(at_1^2, 2at_1\right)$ પરથી $N\left(4t_1^2, 8t_1\right)$ છે.

હવે, ધારો કે $\overline{MN}$નું મધ્યબિંદુ (x, y) છે.

$(x, y) = \left(\frac{4t_1^2 + 2}{2}, \frac{8t_1}{2}\right)$. આથી $x = 2t_1^2 + 1$, $y = 4t_1$

$\therefore$ $x = 2\left(\frac{y}{4}\right)^2 + 1$. આથી $y^2 - 8x + 8 = 0$

$k = -8$ **જવાબ : (C)**

(88) પરવલય $y^2 = 4ax$ના અભિલંબ તેની શીર્ષથી $4a$ અંતરે પરવલયની અક્ષ પર છેદે છે, તો તેમના ઢાળ ......

(A) સમાંતર શ્રેણીમાં હોય. (B) સમગુણોત્તર શ્રેણીમાં હોય.

(C) સ્વરિત શ્રેણીમાં હોય. (D) આમાંથી એક પણ નહિ.

ઉકેલ : પરવલય $y^2 = 4ax$ના અભિલંબનું સમીકરણ, $y = mx - 2am - am^3$

તે અક્ષ એટલે કે X-અક્ષ પર $4a$ અંતરે છેદે છે અર્થાત્ $(4a, 0)$માં છેદે છે.

$\therefore\ 0 = m(4a) - 2am - am^3$ આથી $am^3 - 2am = 0$ $(a \neq 0)$

$m^3 - 2m = 0$. આથી $m\left(m^2 - 2\right) = 0$

$\therefore\ m\left(m - \sqrt{2}\right)\left(m + \sqrt{2}\right) = 0$

$m = 0$ અથવા $m = \sqrt{2}$ અથવા $m = -\sqrt{2}$

$\therefore$ અભિલંબના ઢાળ $-\sqrt{2}, 0, \sqrt{2}$ છે અને તે સમાંતર શ્રેણીમાં છે. **જવાબ : (A)**

(89) પરવલય પરના બિંદુ (x_1, y_1) તથા (x_2, y_2)માંથી પરવલય $y^2 = 4ax$ ને દોરવામાં આવેલાં સ્પર્શકોનું છેદબિંદુ (x_3, y_3) હોય તો ......

(A) x_1, x_2, x_3 સમાંતર શ્રેણીમાં હોય. (B) y_1, y_2, y_3 સમાંતર શ્રેણીમાં હોય.

(C) x_1, x_3, x_2 સમગુણોત્તર શ્રેણીમાં હોય. (D) x_1, x_2, x_3 સ્વરિત શ્રેણીમાં હોય.

ઉકેલ : પરવલય $y^2 = 4ax$ પરનાં બિંદુઓ $(x_1, y_1) = \left(at_1^2, 2at_1\right)$ અને $(x_2, y_2) = \left(at_2^2, 2at_2\right)$ છે.

$\therefore\ \left(at^2, 2at\right)$ આગળના સ્પર્શકનું સમીકરણ $x - ty + at^2 = 0$ છે.

$\therefore\ t_1$ આગળના સ્પર્શકનું સમીકરણ $x - t_1 y + at_1^2 = 0$ (1)

$\therefore$ અને t_2 આગળના સ્પર્શકનું સમીકરણ $x - t_2 y + at_2^2 = 0$ (2)

$\therefore$ બંને સમીકરણો ઉકેલતાં, સ્પર્શકોનાં છેદબિંદુના યામ $= \left(at_1t_2, a(t_1 + t_2)\right)$ મળે.

$\therefore\ (x_3, y_3) = \left(at_1t_2, a(t_1 + t_2)\right)$

અહીં $x_1 . x_2 = at_1^2 \times at_2^2 = a^2t_1^2t_2^2 = (at_1t_2)^2 = x_3^2$

$\therefore\ x_1 \times x_2 = (x_3)^2$

$\therefore\ x_1, x_3, x_2$ સમગુણોત્તર શ્રેણીમાં છે. **જવાબ : (C)**

(90) પરવલય $y^2 = 4ax$ પરના બિંદુ (x_1, y_1)માંથી ત્રણ અભિલંબ લંબ દોરવામાં આવે, તો તેમના લંબપાદના y-યામોનો સરવાળો = ...

(A) 0 (B) 1 (C) -1 (D) એક પણ નહિ.

ઉકેલ : પરવલય $y^2 = 4ax$ના અભિલંબનું સમીકરણ $y = mx - 2am - am^3$.

વળી તે (x_1, y_1)માંથી પસાર થાય છે.

$\therefore\ y_1 = mx_1 - 2am - am^3$

$\therefore\ am^3 + m(2a - x_1) + y_1 = 0$

અહીં બીજનો સરવાળો $m_1 + m_2 + m_3 = 0$

$\therefore$ અભિલંબના લંબપાદના y-યામનો સરવાળો $= -2am_1 - 2am_2 - 2am_3$ (પાદબિંદુ $(am^2, -2am)$ છે.)

$= -2a(m_1 + m_2 + m_3) = -2a(0) = 0$ **જવાબ : (A)**

(91) પરવલય $y^2 = 4ax$ ના નાભિજીવાના એક ભાગની લંબાઈ b અને બીજાની c હોય, તો અર્ધનાભિલંબની લંબાઈ ......

(A) $\frac{2bc}{b+c}$ (B) $\frac{bc}{b+c}$ (C) $\frac{b+c}{2}$ (D) $\frac{b+c}{2bc}$

ઉકેલ : અહીં $\frac{1}{SP} + \frac{1}{SQ} = \frac{2}{l}$

$\therefore \frac{1}{c} + \frac{1}{b} = \frac{2}{l}$

$\therefore l = \frac{2bc}{b+c}$

નોંધ : અહીં l એ b અને c વચ્ચેનો સ્વરિત મધ્યક થાય. **જવાબ : (A)**

(92) ઉપવલય $\frac{x^2}{f(k^2 + 7k + 3)} + \frac{y^2}{f(k+10)} = 1$ નો પ્રધાન અક્ષ X-અક્ષ હોય તથા f વધતું વિધેય હોય, તો kની કિંમતોનો ગણ ......

(A) $(1,\infty) \cup (-\infty,1)$ (B) $(-\infty,-7) \cup (7,\infty)$ (C) $(-\infty,-7) \cup (1,\infty)$ (D) એક પણ નહિ.

ઉકેલ : અહીં ઉપવલય $\frac{x^2}{f(k^2 + 7k + 3)} + \frac{y^2}{f(k+10)} = 1$ નો પ્રધાન અક્ષ X-અક્ષ છે.

$\therefore f(k^2 + 7k + 3) > f(k + 10)$

હવે f વધતું વિધેય છે.

$\therefore k^2 + 7k + 3 > k + 10$

$\therefore (k+3)^2 > 16$

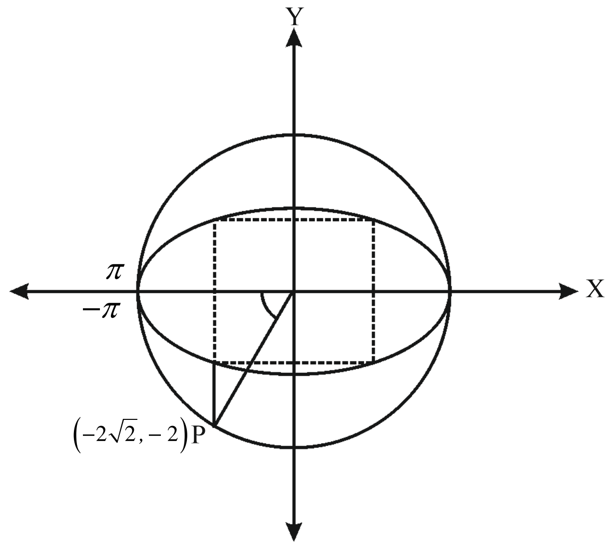
$\therefore k + 3 < -4$ અથવા $k + 3 > 4$

$\therefore k < -7$ અથવા $k > 1$

$\therefore k \in (-\infty, -7) \cup (1,\infty)$ **જવાબ : (C)**

(93) ઉપવલય $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{8} = 1$ પરના બિંદુ $(-2\sqrt{2}, -2)$ ને અનુરૂપ ઉત્કેન્દ્રીકોણનું માપ ......

(A) $\frac{-\pi}{4}$ (B) $\frac{-\pi}{2}$ (C) $\frac{-3\pi}{4}$ (D) એક પણ નહિ.



આકૃતિ 9.55

ધારો કે θ ઉત્કેન્દ્રીકોણ છે તથા ઉપવલય પરનું બિંદુ $(a \cos\theta, b \sin\theta)$ છે.

અહીં $x = a \cos\theta, \quad y = b \sin\theta$

$\therefore x = 4\cos\theta$ અને $y = 2\sqrt{2} \sin\theta$

$\therefore -2\sqrt{2} = 4 \cos\theta$ અને $-2 = 2\sqrt{2} \sin\theta$

$\therefore \cos\theta = \frac{-1}{\sqrt{2}}, \sin\theta = \frac{-1}{\sqrt{2}}$

$\therefore P(\theta)$ ત્રીજા ચરણમાં હોવાથી, $\theta = -\pi + \frac{\pi}{4} = \frac{-3\pi}{4}$ **જવાબ : (C)**

(94) ઉપવલય $\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{12} = 1$ની નાભિઓ S અને S′ હોય તથા B એ ઉપવલય પરનું Y-અક્ષનું બિંદુ હોય, તો Δ SBS'નું ક્ષેત્રફળ =

(A) $4\sqrt{3}$ (B) $8\sqrt{2}$ (C) $12\sqrt{2}$ (D) $12\sqrt{3}$

ઉકેલ : અહીં $a^2 = 36, b^2 = 12$ આથી $a = 6, b = 2\sqrt{3}$

હવે, $b^2 = a^2(1-e^2)$ પરથી $e = \sqrt{\frac{a^2 - b^2}{a^2}} = \sqrt{\frac{24}{36}} = \sqrt{\frac{2}{3}}$

માંગેલ Δ SBS'નું ક્ષેત્રફળ $= \frac{1}{2}(2ae)(b)$ $\quad (\frac{1}{2} \times SS' \times OB)$

$= abe$

$= 6 \times 2\sqrt{3} \times \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = 12\sqrt{2}$ **જવાબ : (C)**

બીજી રીત :

Δ SBS'નું ક્ષેત્રફળ $= \frac{1}{2}|D|$

$$= \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 2\sqrt{6} & 0 & 1 \\ -2\sqrt{6} & 0 & 1 \\ 0 & 2\sqrt{3} & 1 \end{vmatrix} \text{ નો માનાંક}$$

$$= \frac{1}{2}\left(-2\sqrt{3}\left(2\sqrt{6}+2\sqrt{6}\right)\right) \text{ નો માનાંક}$$

$$= 4\sqrt{18} = 12\sqrt{2}$$

(95) ઉપવલય $\frac{x^2}{49}+\frac{y^2}{4}=1$ના શિરોબિંદુમાંથી પસાર થતા સ્પર્શકો વડે બનતા લંબચોરસનું ક્ષેત્રફળ = ...

(A) 14 (B) 28 (C) 42 (D) 56

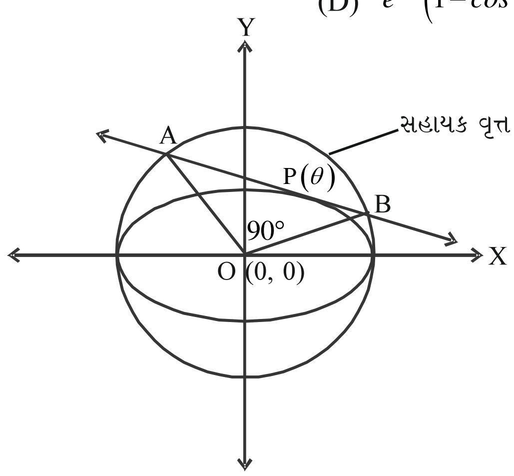
ઉકેલ : અહીં $a=7$, $b=2$ અને $a>b$ છે, તેથી મુખ્ય અક્ષ X-અક્ષ છે. આપેલ ઉપવલયનાં શિરોબિંદુમાંથી દોરેલા સ્પર્શકો વડે બનતા લંબચોરસનું ક્ષેત્રફળ = (મુખ્ય અક્ષની લંબાઈ) (ગૌણ અક્ષની લંબાઈ)

$= 2a \times 2b \quad = 14 \times 4 \quad = 56$ **જવાબ : (D)**

(96) ઉપવલય $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\,(a>b)$ પરનાં બિંદુ $P(\theta)$ આગળનો સ્પર્શક સહાયકવૃત્તને બે બિંદુઓ A અને Bમાં છેદે તથા $O(0,0)$ કેન્દ્ર હોય તથા $m\angle AOB=\frac{\pi}{2}$ હોય, તો ઉપવલયની ઉત્કેન્દ્રતા e નીચેના સમીકરણનું સમાધાન કરે :

(A) $e^2\left(1+sin^2\theta\right)=1$ (B) $e^2\left(1-sin^2\theta\right)=1$

(C) $e^2\left(1+cos^2\theta\right)=1$ (D) $e^2\left(1-cos^2\theta\right)=1$



આકૃતિ 9.56

ઉકેલ : ધારો કે ઉપવલય પરનું બિંદુ $P(a\,cos\theta, b\,sin\theta)$ છે તથા સહાયક વૃત્તનું સમીકરણ $x^2+y^2=a^2$ છે.

$\therefore$ બિંદુ P આગળના સ્પર્શકનું સમીકરણ $\frac{x}{a}cos\theta + \frac{y}{b}sin\theta = 1$

$\therefore (b\,cos\theta)\,x + (a\,sin\,\theta)\,y - ab = o$ (1)

હવે, સહાયકવૃત્ત અને સ્પર્શક રેખા સમીકરણ (1)માંથી પસાર થતા રેખાયુગ્મનું સંયુક્ત સમીકરણ

$$x^2+y^2-a^2\left(\frac{b\,cos\theta\,x + a\,sin\,\theta\,y}{ab}\right)^2 = 0$$

$\therefore\ b^2 x^2 + b^2 y^2 - b^2 cos^2\theta \bullet x^2 - a^2 sin^2\theta \bullet y^2 - 2ab\ sin\theta\ cos\theta\, xy = 0$

હવે $m\angle AOB = \frac{\pi}{2}$

$\therefore x^2$નો સહગુણક $+\ y^2$નો સહગુણક $= 0$

$b^2 - b^2 cos^2\theta + b^2 - a^2 sin^2\theta = 0$

$b^2\left(1 + sin^2\theta\right) = a^2\ sin^2\theta$

$\therefore\ \frac{b^2}{a^2} = \frac{sin^2\theta}{1 + sin^2\theta}$. હવે $e^2 = 1 - \frac{b^2}{a^2}$

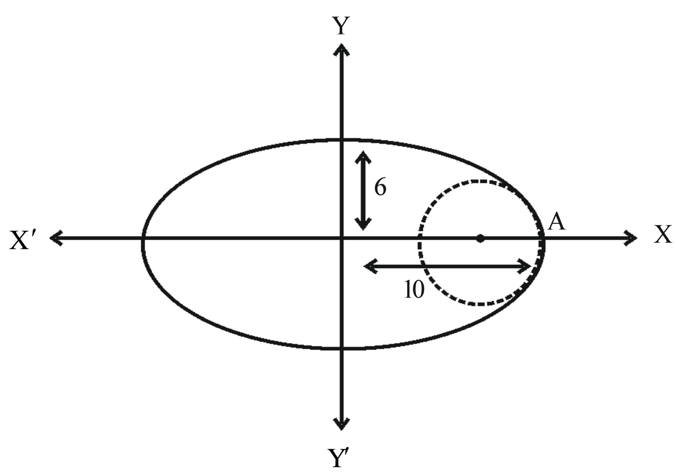
$\therefore\ e^2 = 1 - \frac{sin^2\theta}{1 + sin^2\theta} = \frac{1}{1 + sin^2\theta}$

$\therefore\ e^2\left(1 + sin^2\theta\right) = 1$ **જવાબ : (A)**

(97) ધારો કે ઉપવલયના પ્રધાન અક્ષની લંબાઈ 20 અને ગૌણ અક્ષની લંબાઈ 12 છે. આ ઉપવલયના એક નાભિને કેન્દ્ર તરીકે લઈ વર્તુળ એવી રીતે દોરેલ છે કે જે ઉપવલયને A આગળ સ્પર્શે છે. વર્તુળનું સમીકરણ ......

(A) $x^2 + y^2 + 16x + 60 = 0$ (B) $x^2 + y^2 - 16x - 60 = 0$

(C) $x^2 + y^2 - 16x + 60 = 0$ (D) $x^2 + y^2 + 16x - 60 = 0$



આકૃતિ 9.57

ઉકેલ : સરળતા ખાતર ધારો કે પ્રધાન અક્ષ x-અક્ષ છે. માટે

અહીં, ઉપવલયના પ્રધાન અક્ષની લંબાઈ $= 2a = 20$ આથી, $a = 10$

ગૌણ અક્ષની લંબાઈ $= 2b = 12$ આથી, $b = 6$

હવે, $b^2 = a^2\left(1 - e^2\right)$ પરથી,

$$e^2 = 1 - \frac{b^2}{a^2} \Rightarrow e^2 = 1 - \frac{36}{100} = \frac{64}{100} \quad \text{આથી,} \quad e = \frac{8}{10} = \frac{4}{5}$$

$\therefore$ ઉપવલયનું એક નાભિ $S\,(ae, 0) = S\,(8, 0)$ મળે.

$\therefore$ વર્તુળનું કેન્દ્ર $=(8,0)$ મળે.

સ્પષ્ટ છે કે ત્રિજ્યા $r=2$

$\therefore$ માંગેલ વર્તુળનું સમીકરણ $(x-8)^2+y^2=4$

$\therefore$ $x^2+y^2-16x+60=0$ **જવાબ : (C)**

(98) ઉપવલય $\frac{x^2}{100}+\frac{y^2}{25}=1$ ના કોઈ બિંદુ P આગળનો સ્પર્શક Y-અક્ષને Qમાં છેદે છે. ધારો કે R એ બિંદુ Qનું રેખા $y=x$ માં પ્રતિબિંબ હોય, તો $\overline{QR}$ ને વ્યાસ લઈ દોરેલ વર્તુળ કોઈ ચોક્કસ બિંદુ ....માંથી પસાર થાય.

(A) $(0,0)$ (B) $(10,0)$ (C) $(5,0)$ (D) $(10,5)$

ઉકેલ : ઉપવલય $\frac{x^2}{100}+\frac{y^2}{25}=1$ પરનાં બિંદુ $P(10\cos\theta, 5\sin\theta)$ આગળના સ્પર્શકનું સમીકરણ,

$\frac{x}{10}\cos\theta+\frac{y}{5}\sin\theta=1$

તે Y-અક્ષને એટલે કે $x=0$ ને Qમાં છેદે છે. આથી Qના યામ $=(0,5\operatorname{cosec}\theta)$

હવે, બિંદુ R એ Q બિંદુનું રેખા $y=x$ પરનું પ્રતિબિંબ છે.

$\therefore$ Rના યામ $=(5\operatorname{cosec}\theta,\ 0)$

$\therefore$ $\overline{QR}$ વ્યાસ હોય તેવા વર્તુળનું સમીકરણ

$(x-0)(x-5\operatorname{cosec}\theta)+(y-5\operatorname{cosec}\theta)(y-0)=0$

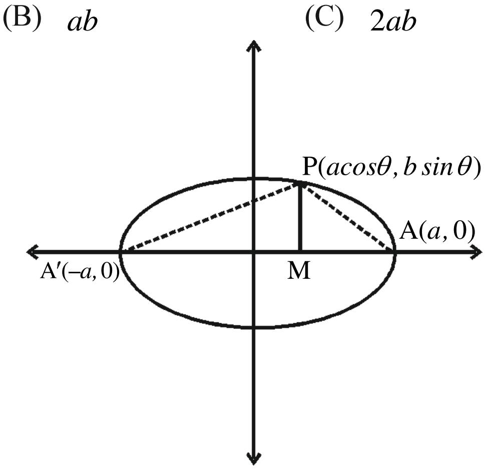
$\therefore$ $x^2+y^2-5(x+y)\operatorname{cosec}\theta=0$

સ્પષ્ટ છે કે તે (0, 0)માંથી પસાર થાય છે. **જવાબ : (A)**

(99) ઉપવલય $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ પર કોઈ બિંદુ P હોય તથા $\overline{AA'}$ મુખ્ય અક્ષ હોય, તો Δ APA' નું મહત્તમ ક્ષેત્રફળ ......

(A) $\frac{1}{2}ab$ (B) ab (C) $2ab$ (D) $4ab$

ઉકેલ :



આકૃતિ 9.58

ઉપવલય $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ પરનું બિંદુ $P(a\cos\theta,b\sin\theta)$ તથા $A(a,0)$, $A'(-a,0)$ મળે.

$\therefore\ \Delta\ APA'$ નું ક્ષેત્રફળ $= \frac{1}{2} \times AA' \times PM$

$= \frac{1}{2}(2a)(b\,|\,sin\theta\,|)$

$= ab\,|\,sin\theta\,|$

ક્ષેત્રફળ મહત્તમ થાય ત્યારે $sin\theta = 1$ હોવું જોઈએ કારણ કે $-1 \le sin\theta \le 1$ છે.

$\therefore\ \Delta\ APA'$ નું મહત્તમ ક્ષેત્રફળ $= ab$ **જવાબ : (B)**

(100) વર્તુળ $(x-1)^2 + y^2 = 1$ના વ્યાસને અર્ધ ગૌણ અક્ષ અને વર્તુળ $x^2 + (y-2)^2 = 4$ના વ્યાસને અર્ધ પ્રધાન અક્ષ લઈ, એક ઉપવલય દોરવામાં આવે છે. જો ઉપવલયનું કેન્દ્ર ઊગમબિંદુ હોય અને યામાક્ષો ઉપવલયના અક્ષો હોય, તો ઉપવલયનું સમીકરણ ...... મળે. (જ્યાં પ્રધાન અક્ષ X-અક્ષ છે.)

(A) $4x^2 + y^2 = 4$ (B) $x^2 + 4y^2 = 8$ (C) $4x^2 + y^2 = 8$ (D) $x^2 + 4y^2 = 16$

ઉકેલ : પ્રથમ વર્તુળની ત્રિજ્યા $r_1 = 1$. તેથી ઉપવલયના અર્ધ ગૌણ અક્ષની લંબાઈ $= 2$

બીજા વર્તુળની ત્રિજ્યા $r_2 = 2$. તેથી ઉપવલયના અર્ધ પ્રધાન અક્ષની લંબાઈ $= 4$

$\therefore\ a = 4,\ b = 2$

$\therefore$ માંગેલ ઉપવલયનું સમીકરણ $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{4} = 1$

$\therefore\ x^2 + 4y^2 = 16$ **જવાબ : (D)**

(101) સમીકરણ $\frac{x^2}{3-r} + \frac{y^2}{r-7} + 1 = 0$ ઉપવલય દર્શાવે, તો $r \in$ ......

(A) $(3, 7]$ (B) $[3, 7)$ (C) $(3, 7)$ (D) આમાંથી એક પણ નહિ

ઉકેલ : આપેલ સમીકરણ પરથી, $\frac{x^2}{3-r} + \frac{y^2}{r-7} = -1$

$\therefore\ \frac{x^2}{r-3} + \frac{y^2}{7-r} = 1$

જો આ સમીકરણ ઉપવલય દર્શાવે, તો $r-3 > 0$ અને $7-r > 0$

$\therefore\ r > 3$ અને $7 > r$

$\therefore\ 3 < r < 7$ **જવાબ : (C)**

(102) જો ઉપવલય $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ની નાભિઓ S અને S′ હોય, B એ ઉપવલયના ગૌણ અક્ષ પરનું એક અંત્યબિંદુ હોય તથા $\Delta SBS'$ સમબાજુ ત્રિકોણ હોય, તો ઉપવલયની ઉત્કેન્દ્રતા = ...

(A) $\frac{1}{2}$ (B) $\frac{1}{3}$ (C) $\frac{1}{4}$ (D) $\frac{1}{\sqrt{2}}$

ઉકેલ : ઉપવલય $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ની નાભિઓ $S(ae, 0)$, $S'(-ae, 0)$ તથા $B(0, b)$ આપેલ છે. (જ્યાં $a > b$ લઈએ.)

$\Delta SBS'$ સમબાજુ ત્રિકોણ છે. આથી, $SB = S'B = SS'$

$\therefore \quad SB^2 = SS'^2$

$\therefore \quad (ae-0)^2 + (0-b)^2 = (2ae)^2$

$\therefore \quad a^2e^2 + b^2 = 4a^2e^2$

$\therefore \quad a^2e^2 + a^2 - a^2e^2 = 4a^2e^2 \qquad \left(b^2 = a^2\left(1-e^2\right)\right)$

$\therefore \quad 4e^2 = 1$. આથી, $e = \frac{1}{2}$ **જવાબ : (A)**

(103) જો કોઈ ઉપવલયની નાભિઓ S અને S′ હોય, $\overline{OB}$ ગૌણ અક્ષ હોય તથા $m\angle SBS' = \frac{\pi}{2}$, તો ઉપવલયની ઉત્કેન્દ્રતા = ...

(A) $\frac{1}{2}$ (B) $\frac{1}{\sqrt{2}}$ (C) $\frac{1}{2\sqrt{2}}$ (D) $\frac{1}{\sqrt{3}}$

ઉકેલ : ધારો કે ઉપવલય $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ છે, જ્યાં $a > b$ છે.

તેની ઉપવલયની નાભિ $S(ae, 0)$, $S'(-ae, 0)$, $O(0, 0)$ તથા $B(0, b)$ મળે.

$\therefore \quad m\angle SBS' = \frac{\pi}{2}$

$\therefore$ ($\overline{SB}$ નો ઢાળ) ($\overline{S'B}$ નો ઢાળ) = -1

$\therefore \quad \left(\frac{b-0}{0-ae}\right)\left(\frac{b-0}{0+ae}\right) = -1$

$\therefore \quad b^2 = a^2e^2$

$\therefore \quad a^2\left(1-e^2\right) = a^2e^2 \qquad (a > b)$

$\therefore \quad 2e^2 = 1$ આથી, $e = \frac{1}{\sqrt{2}}$ **જવાબ : (B)**

(104) ઉપવલય $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{36}=1$ની નાભિઓ $\left(0, \pm\sqrt{32}\right)$ છે, તો ઉપવલય $\frac{x^2}{4+k^2}+\frac{y^2}{36+k^2}=1$ની નાભિઓના યામ ......

(A) $\left(k^2, \pm\sqrt{32}+k^2\right)$ (B) $\left(-k^2, \pm\sqrt{32}-k^2\right)$ (C) $\left(0, \pm\sqrt{32}\right)$ (D) એક પણ નહિ.

ઉકેલ : આપેલ ઉપવલય $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{36}=1$ પરથી, $a^2 = 4$, $b^2 = 36$

$\therefore$ ઉપવલયની નાભિઓનાં યામ = $\left(0, \pm\sqrt{b^2-a^2}\right) = \left(0, \pm\sqrt{32}\right)$ જે આપેલ છે.

ઉપવલય $\frac{x^2}{4+k^2}+\frac{y^2}{36+k^2}=1$ માટે $a^2 = 4+k^2$, $b^2 = 36+k^2$

$\therefore$ માંગેલ નાભિઓનાં યામ = $\left(0, \pm\sqrt{b^2-a^2}\right)$

$= \left(0, \pm\sqrt{32}\right)$ **જવાબ : (C)**

(105) ઉપવલય પરના કોઈ બિંદુ P માંથી ઉપવલયને મહત્તમ કેટલા અભિલંબો મળે ?

(A) 0 (B) 4 (C) 2 (D) 1

ઉકેલ : ઉપવલય પરના બિંદુ $P(\theta)$ આગળના અભિલંબનું સમીકરણ

$ax\sec\theta - by\operatorname{cosec}\theta = a^2 - b^2$. તે (x_1, y_1) માંથી પસાર થાય, તો

$$\therefore\ ax_1 \frac{1+tan^2\frac{\theta}{2}}{1-tan^2\frac{\theta}{2}} - by_1 \frac{1+tan^2\frac{\theta}{2}}{2tan\frac{\theta}{2}} = a^2 - b^2$$

$$\therefore\ ax_1\left(\frac{1+t^2}{1-t^2}\right) - by_1\left(\frac{1+t^2}{2t}\right) = a^2 - b^2 \qquad (tan\frac{\theta}{2} = t \text{ લેતાં})$$

$$\therefore\ ax_1 2t + ax_1 2t^3 - by_1 + by_1 t^4 = \left(a^2 - b^2\right)\left(2t - 2t^3\right)$$

જે t માં ચતુર્થ ઘાતનું સમીકરણ છે.

નિશ્ચિત બિંદુ (x_1, y_1) માંથી પસાર થતાં મહત્તમ 4 અભિલંબો દોરી શકાય. **જવાબ : (B)**

(106) ઉપવલય $3x^2 - 18x + 2y^2 - 8y + 29 = 0$ ના પ્રધાન અક્ષની લંબાઈ અને ગૌણ અક્ષની લંબાઈનો ગુણોત્તર = ...

(A) $\sqrt{2}:\sqrt{3}$ (B) $2\sqrt{2}:\sqrt{3}$ (C) $\sqrt{3}:\sqrt{2}$ (D) $2\sqrt{3}:\sqrt{2}$

ઉકેલ : આપેલ ઉપવલય $3x^2 - 18x + 2y^2 - 8y + 29 = 0$

$\therefore\ 3x^2 - 18x + 27 + 2y^2 - 8y + 8 - 6 = 0$

$\therefore\ 3\left(x^2 - 6x + 9\right) + 2\left(y^2 - 4y + 4\right) = 6$

$$\therefore\ \frac{(x-3)^2}{2} + \frac{(y-2)^2}{3} = 1$$

$\therefore\ a^2 = 2 \quad b^2 = 3$. આથી, $a < b$

પ્રધાન અક્ષની લંબાઈ $= 2b = 2\sqrt{3}$, ગૌણ અક્ષની લંબાઈ $= 2a = 2\sqrt{2}$

માંગેલ ગુણોત્તર $= \sqrt{3}:\sqrt{2}$ **જવાબ : (C)**

(107) ઉપવલય $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ના નાભિલંબનાં અંત્યબિંદુઓએ મળતા ઉત્કેન્દ્રીકોણ = ... $(a > b)$

(A) $tan^{-1}\left(\pm\frac{ae}{b}\right)$ (B) $tan^{-1}\left(\pm\frac{a}{be}\right)$ (C) $tan^{-1}\left(\pm\frac{be}{a}\right)$ (D) $tan^{-1}\left(\pm\frac{b}{ae}\right)$

ઉકેલ : ઉપવલયના નાભિલંબનાં અંત્યબિંદુઓ $\left(ae, \pm\frac{b^2}{a}\right), \left(-ae, \pm\frac{b^2}{a}\right)$. જો ઉપવલય પરના બિંદુ $\left(ae, \frac{b^2}{a}\right)$ આગળ ઉત્કેન્દ્રીકોણ θ હોય, તો

$$(a\cos\theta, b\sin\theta) = \left(ae, \frac{b^2}{a}\right) \text{ લઈએ.}$$

$\therefore\ a\cos\theta = ae,\ b\sin\theta = \frac{b^2}{a}$

$\therefore\ \frac{b}{a}\tan\theta = \frac{b^2}{a^2 e}$ આથી, $\tan\theta = \frac{b}{ae}$ આથી, $\theta = \tan^{-1}\frac{b}{ae}$

તે જ રીતે $\left(ae, \frac{-b^2}{a}\right)$ માટે $a\cos\theta = ae,\ b\sin\theta = \frac{-b^2}{a}$

$\therefore$ P(θ) ચોથા ચરણમાં છે. આથી $\theta = \tan^{-1}\left(\frac{-b}{ae}\right)$

$\left(-ae, \frac{b^2}{a}\right)$ માટે $a\cos\theta = -ae,\ b\sin\theta = \frac{b^2}{a}$.

$P(\theta)$ દ્વિતીય ચરણમાં હોવાથી,

$\therefore\ \theta = \cos^{-1}(-e) = \pi - \cos^{-1} e$

$\left(-ae, \frac{-b^2}{a}\right)$ માટે $a\cos\theta = -ae,\ b\sin\theta = \frac{-b^2}{a},\ \tan\theta = \frac{b}{ae}$

$P(\theta)$ ત્રીજા ચરણમાં હોવાથી $\theta = \pi + \tan^{-1}\frac{b}{ae}$ **જવાબ : (D)**

(108) જો ઉપવલય $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{4}=1$ની ઉત્કેન્દ્રતા $\frac{\sqrt{5}}{4}$ હોય, તો ઉપવલય $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{16}=1$ની ઉત્કેન્દ્રતા = ...

(A) $\frac{\sqrt{7}}{2}$ (B) $\frac{7}{\sqrt{11}}$ (C) $\sqrt{\frac{7}{11}}$ (D) $\frac{7}{11}$

ઉકેલ : ઉપવલય $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{4}=1$ પરથી, $b^2 = 4,\ e^2 = \frac{5}{16}$. ધારો કે $a > b$

હવે, $b^2 = a^2(1-e^2)$ પરથી, $4 = a^2\left(1-\frac{5}{16}\right)$. આથી, $a^2 = \frac{64}{11}$

અહીં $a > b$ છે.

હવે, ઉપવલય $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{16}=1$ માં $a^2 = \frac{64}{11},\ b^2 = 16$ લેતાં,

$a^2 < b^2$ હોવાથી $a^2 = b^2(1-e^2)$ પરથી, $\frac{64}{11} = 16(1-e^2)$

$\therefore\ \frac{4}{11} = 1-e^2$ આથી, $e^2 = 1-\frac{4}{11} = \frac{7}{11}$

$\therefore\ e = \sqrt{\frac{7}{11}}$ **જવાબ : (C)**

નોંધ : $a < b$ હોય તો $a^2 = b^2(1-e^2) = 4\left(1-\frac{5}{16}\right) = \frac{44}{16} = \frac{11}{4}$

આ વિકલ્પમાં $\frac{x^2}{\frac{11}{4}}+\frac{y^2}{16}=1$ માં $a^2<b^2$

$\therefore \frac{11}{4}=16\left(1-e^2\right)\Rightarrow 1-e^2=\frac{11}{64}\Rightarrow e^2=\frac{53}{64}\Rightarrow e=\frac{\sqrt{53}}{8}$ પરંતુ આ વિકલ્પ નથી.

(109) પ્રચલ સમીકરણો $x=6(1+\cos\alpha), y=4(1+\sin\alpha)$ કયા ઉપવલયનાં સમીકરણો દર્શાવે છે ? $\alpha \in [0, 2\pi)$

(A) $\frac{(x-6)^2}{16}+\frac{(y-4)^2}{36}=1$ (B) $\frac{(x-6)^2}{36}+\frac{(y-4)^2}{16}=1$

(C) $\frac{(x+6)^2}{36}+\frac{(y+4)^2}{16}=1$ (D) $\frac{(x-6)^2}{36}+\frac{(y+4)^2}{16}=1$

ઉકેલ : અહીં $x=6(1+cos\alpha), \ y=4(1+sin\alpha)$

$\therefore \ cos\alpha=\frac{x-6}{6}, \ sin\alpha=\frac{y-4}{4}$

હવે, $cos^2\alpha+sin^2\alpha=1$

$\therefore \ \frac{(x-6)^2}{36}+\frac{(y-4)^2}{16}=1$ **જવાબ : (B)**

(110) ઉપવલયના સહાયક વૃત્તનું ક્ષેત્રફળ એ ઉપવલયના ક્ષેત્રફળના ત્રણ ગણા જેટલું હોય, તેવા ઉપવલયની ઉત્કેન્દ્રતા ...... (જ્યાં પ્રધાન અક્ષ X-અક્ષ છે.)

(A) $\frac{1}{\sqrt{2}}$ (B) $\frac{1}{2\sqrt{2}}$ (C) $\frac{\sqrt{2}}{3}$ (D) $\frac{2\sqrt{2}}{3}$

ઉકેલ : ધારો કે ઉપવલય $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ છે. જ્યાં $a>b$ છે.

તેથી ઉપવલયનું ક્ષેત્રફળ $=\pi ab$

હવે, ઉપવલયના સહાયક વૃત્તનું સમીકરણ $x^2+y^2=a^2$ થશે અને તેનું ક્ષેત્રફળ $=\pi a^2$ મળે.

આપેલ શરત મુજબ, $\pi a^2=3\pi ab$

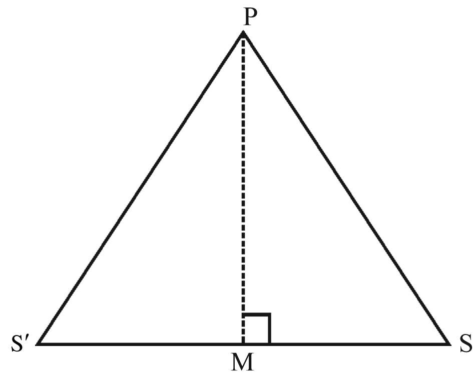
$\therefore \ a=3b$

હવે, $b^2=a^2\left(1-e^2\right)$

$\therefore \ b^2=9b^2\left(1-e^2\right)$. આથી, $e=\frac{2\sqrt{2}}{3}$ **જવાબ : (D)**

(111) ઉપવલય $\frac{x^2}{81}+\frac{y^2}{49}=1$ પર કોઈ બિંદુ P છે તથા S અને S′ ઉપવલયની નાભિઓ છે, તો Δ PSS′ નું મહત્તમ ક્ષેત્રફળ ......

(A) $2\sqrt{2}$ (B) $7\sqrt{2}$ (C) $14\sqrt{2}$ (D) $28\sqrt{2}$



આકૃતિ 9.59

ઉકેલ : આપેલ ઉપવલય $\frac{x^2}{81}+\frac{y^2}{49}=1$ પરથી $a^2=81,\ b^2=49$ અને $a>b$ છે.

હવે, $b^2=a^2\left(1-e^2\right) \Rightarrow e^2=1-\frac{49}{81}=\frac{32}{81}$ આથી, $e=\frac{\sqrt{32}}{9}=\frac{4\sqrt{2}}{9}$

$\therefore$ નાભિ $(\pm ae, 0)=\text{S}\left(4\sqrt{2}, 0\right),\ \text{S}'\left(-4\sqrt{2}, 0\right)$

બિંદુ P ઉપવલય પર હોવાથી $P(9\cos\theta, 7\sin\theta)$ થશે.

$\therefore$ Δ PSS′નું ક્ષેત્રફળ $=\frac{1}{2}SS'\times PM=\frac{1}{2}\times 8\sqrt{2}\times 7|\sin\theta|=28\sqrt{2}|\sin\theta|$

$\therefore$ માંગેલ મહત્તમ ક્ષેત્રફળ $=28\sqrt{2}$ ($\sin\theta$નો વિસ્તાર $=[-1, 1]$)

જવાબ : (D)

(112) ઉપવલય $9x^2+16y^2-90x+32y+97=0$નું કેન્દ્ર = ...

(A) $(5,-1)$ (B) $(5,1)$ (C) $(1,5)$ (D) $(1,-5)$

ઉકેલ : આપેલ ઉપવલય $9x^2+16y^2-90x+32y+97=0$

તેથી, $9x^2-90x+225+16y^2+32y+16+97-241=0$

$\therefore\ 9\left(x^2-10x+25\right)+16\left(y^2+2y+1\right)=144$

$\therefore\ \frac{(x-5)^2}{16}+\frac{(y+1)^2}{9}=1$

તેથી સ્પષ્ટ છે કે ઉપવલયનું કેન્દ્ર = $(5,-1)$ છે.

જવાબ : (A)

(113) ઉપવલયના નાભિલંબની લંબાઈ એ તેની બે નાભિઓ વચ્ચેનાં અંતર જેટલી હોય, તો ઉપવલયની ઉત્કેન્દ્રતા = ...

(A) $\frac{\sqrt{5}+1}{2}$ (B) $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$ (C) $\frac{\sqrt{5}\pm1}{2}$ (D) એક પણ નહિ.

ઉકેલ : ઉપવલય માટે ધારો કે પ્રધાન અક્ષ X-અક્ષ છે.

હવે, ઉપવલયના નાભિલંબની લંબાઈ = બે નાભિઓ વચ્ચેનું અંતર

$\therefore\ \frac{2b^2}{a}=2ae$

$\therefore\ b^2=a^2.e$

$\therefore \quad a^2(1-e^2) = a^2 \times e$ [$a > $ b લેતાં $b^2 = a^2(1-e^2)$]

$\therefore \quad e^2 + e - 1 = 0$

$\therefore \quad e = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$ પરંતુ ઉપવલય માટે હંમેશાં $0 < e < 1$

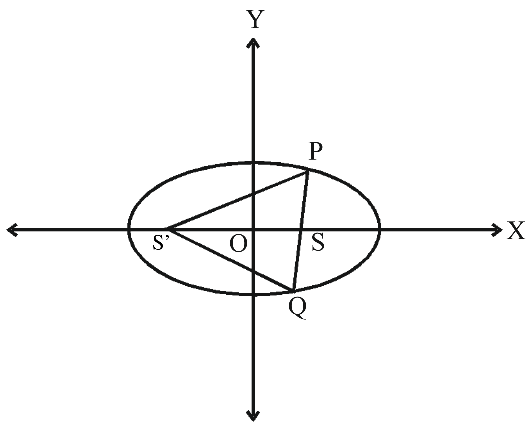
$\therefore \quad e = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$ **જવાબ : (B)**

(114) ઉપવલય $\frac{x^2}{100} + \frac{y^2}{64} = 1$ની નાભિઓ S અને S' હોય તથા $\overline{PQ}$ એ નાભિ Sમાંથી પસાર થતી જીવા હોય, તો $\Delta S'PQ$ની પરિમિતિ = ...

(A) 10 (B) 40 (C) 8 (D) 32

ઉકેલ : અહીં, $a^2 = 100, \ b^2 = 64$.

તેથી $a = 10, \ b = 8$ હોવાથી $a > b$ છે.



આકૃતિ 9.60

હવે, S અને S' ઉપવલયની નાભિઓ હોય તથા $\overline{PQ}$ એ નાભિ Sમાંથી પસાર થતી જીવા હોય, તો

$\therefore$ માંગેલ $\Delta S'PQ$ની પરિમિતિ $= SP + S'P + SQ + S'Q = 4a = 40$ **જવાબ : (B)**

(115) ઉપવલય $\frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$ (જ્યાં $a > b$)ની નાભિના યામ = ...

(A) $(h \pm ae, k)$ (B) $(h \pm ae, k \pm ae)$ (C) (h, k) (D) $(-h, k \pm ae)$

ઉકેલ : ઊગમબિંદુનું સ્થાનાંતર (h, k) આગળ કરતાં, $x' = x - h, \quad y' = y - k$ મળે.

$\therefore \quad \frac{x'^2}{a^2} + \frac{y'^2}{b^2} = 1$

$\therefore$ આ ઉપવલયની નાભિના યામ $= (\pm ae, 0) = (x', y')$

$\therefore$ મૂળ ઉપવલય માટે, $\pm ae = x - h, \quad 0 = y - k$

$\therefore \quad x = \pm ae + h, \quad y = k$

$\therefore$ માંગેલ નાભિના યામ $= (h \pm ae, k)$ **જવાબ : (A)**

(116) ઉપવલય $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{36}=1$ના સહાયક વૃત્તનું સમીકરણ ......

(A) $x^2+y^2=25$ (B) $x^2+y^2=36$ (C) $x^2+y^2=11$ (D) $x^2+y^2=61$

ઉકેલ : આપેલ ઉપવલય પરથી $a^2=25,\ b^2=36$.

આથી, $a=5,\ b=6$ હોવાથી, $a<b$ છે.

$\therefore$ માંગેલ સહાયક વૃત્તનું સમીકરણ $x^2+y^2=b^2$ પરથી, $x^2+y^2=36$ **જવાબ : (B)**

(117) ઉપવલય $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{4}=1$ના સહાયક વૃત્તનું સમીકરણ ......

(A) $x^2+y^2=20$ (B) $x^2+y^2=12$ (C) $x^2+y^2=4$ (D) $x^2+y^2=16$

ઉકેલ : આપેલ ઉપવલય પરથી $a=4,\ b=2$ હોવાથી, $a>b$ છે.

$\therefore$ માંગેલ સહાયક વૃત્તનું સમીકરણ $x^2+y^2=a^2$ પરથી,

$x^2+y^2=16$ **જવાબ : (D)**

(118) ઉપવલય $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$ના નિયામિકા વૃત્તનું સમીકરણ ......

(A) $x^2+y^2=25$ (B) $x^2+y^2=16$ (C) $x^2+y^2=41$ (D) $x^2+y^2=9$

ઉકેલ : આપેલ ઉપવલય પરથી $a^2=25,\ b^2=16$ હોવાથી $a>b$ છે.

$\therefore$ માંગેલ નિયામિકા વૃત્તનું સમીકરણ $x^2+y^2=a^2+b^2$ પરથી, $x^2+y^2=41$ **જવાબ : (C)**

(119) ઉપવલય $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$ના નિયામિકા વૃત્તનું પ્રચલબિંદુ = ...

(A) $(3cos\theta, 3sin\theta)$ (B) $(2cos\theta, 2sin\theta)$ (C) $(\sqrt{13}cos\theta, \sqrt{13}sin\theta)$ (D) એક પણ નહિ

ઉકેલ : આપેલ ઉપવલય પરથી, $a^2=9,\ b^2=4$. તેથી, $a>b$

નિયામિકા વૃત્તનું સમીકરણ $x^2+y^2=a^2+b^2$ પરથી, $x^2+y^2=13$

$\therefore$ માંગેલ પ્રચલબિંદુ = $(r\,cos\theta, r\,sin\theta)$ = $(\sqrt{13}cos\theta, \sqrt{13}sin\theta)$ **જવાબ : (C)**

(120) એક બિંદુનું $(-2,0)$થી અંતર તેના રેખા $x=\frac{-9}{2}$થી મળતાં અંતર કરતાં $\frac{2}{3}$ ગણું છે, તો તેનો બિંદુગણ = ...

(A) રેખા (B) વર્તુળ (C) ઉપવલય (D) અતિવલય

ઉકેલ : ધારો કે બિંદુ (α,β) છે. તેથી આપેલ માહિતી પરથી,

બિંદુ (α,β)થી $(-2,0)$ સુધીનું અંતર $=\frac{2}{3}$ (બિંદુ (α,β)થી $x=\frac{-9}{2}$ સુધીનું લંબ અંતર)

$\therefore\ \sqrt{(\alpha+2)^2+\beta^2}=\frac{2}{3}\left|\alpha+\frac{9}{2}\right|$

$\therefore \quad \alpha^2 + \beta^2 + 4\alpha + 4 = \frac{4\alpha^2 + 36\alpha + 81}{9}$

$\therefore \quad 9\alpha^2 + 9\beta^2 + 36\alpha + 36 - 4\alpha^2 - 36\alpha - 81 = 0$

$\therefore \quad 5\alpha^2 + 9\beta^2 = 45$

વ્યાપક રીતે બિંદુગણ $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{5} = 1$ ઉપવલય દર્શાવે છે. **જવાબ : (C)**

(121) જો રેખા $y = 3x + k$ એ વક્ર $\frac{x^2}{5} + \frac{y^2}{2} = 1$ને સ્પર્શે, તો $k =$ ......

(A) $\pm\sqrt{47}$ (B) $\pm\sqrt{63}$ (C) $\pm\sqrt{53}$ (D) ન મળે.

ઉકેલ : આપેલ રેખા $y = 3x + k$ પરથી $m = 3, \quad c = k$

આપેલ ઉપવલય $\frac{x^2}{5} + \frac{y^2}{2} = 1$ પરથી, $a^2 = 5,\ b^2 = 2$

રેખા એ ઉપવલયને સ્પર્શે, તો $c^2 = a^2m^2 + b^2$ પરથી,

$k^2 = 5(9) + 2 = 47$. આથી $k = \pm\sqrt{47}$ **જવાબ : (A)**

(122) ઉપવલય $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ના પરસ્પર લંબ સ્પર્શકોના છેદબિંદુનો બિંદુગણ ...... દર્શાવે છે.

(A) પરવલય (B) વર્તુળ (C) ઉપવલય (D) અતિવલય

ઉકેલ : ઉપવલય $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ના પરસ્પર લંબ સ્પર્શકોના છેદબિંદુનો બિંદુગણ નિયામિકા વૃત્ત $x^2 + y^2 = a^2 + b^2$ મળે છે. તેથી માંગેલ બિંદુગણ વર્તુળ દર્શાવે છે. **જવાબ : (B)**

(123) સમીકરણો $x = 7\cos\theta + 7\sin\theta$ અને $y = 10\cos\theta - 10\sin\theta$ દ્વારા દર્શાવાતો વક્ર ......

(A) વર્તુળ (B) પરવલય (C) ઉપવલય (D) અતિવલય

ઉકેલ : $x = 7(\cos\theta + \sin\theta), \quad y = 10(\cos\theta - \sin\theta)$

$\therefore \left(\frac{x}{7}\right)^2 + \left(\frac{y}{10}\right)^2 = (\cos\theta + \sin\theta)^2 + (\cos\theta - \sin\theta)^2 = 2$

$\therefore \frac{x^2}{49} + \frac{y^2}{100} = 2$

$\therefore$ માંગેલ બિંદુગણ $\frac{x^2}{98} + \frac{y^2}{200} = 1$ ઉપવલય દર્શાવે છે. **જવાબ : (C)**

(124) ઉપવલયની નાભિઓ $(\pm 2\sqrt{2}, 0)$ તથા શિરોબિંદુઓ $(\pm 3\sqrt{3}, 0)$ હોય, તો તે ઉપવલયના ગૌણ અક્ષની લંબાઈ = ...

(A) $\sqrt{19}$ (B) $2\sqrt{19}$ (C) $3\sqrt{19}$ (D) $4\sqrt{19}$

ઉકેલ : અહીં $ae = 2\sqrt{2}$, $a = 3\sqrt{3}$. આથી, $e = \frac{2\sqrt{2}}{3\sqrt{3}}$

હવે $b^2 = a^2(1-e^2) = 27\left(1-\frac{8}{27}\right) = 19$

$\therefore\ b = \sqrt{19}$

$\therefore$ ગૌણ અક્ષની લંબાઈ $= 2\sqrt{19}$ **જવાબ : (B)**

(125) ઉપવલય $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ પરના બિંદુ P આગળનો અભિલંબ X-અક્ષને Q અને Y-અક્ષને Rમાં છેદે છે, તો PQ : PR = ...

(A) $a : b$ (B) $a^2 : b^2$ (C) $b : a$ (D) $b^2 : a^2$

ઉકેલ : ધારો કે $P(a\cos\theta, b\sin\theta)$ એ ઉપવલય $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ પરનું બિંદુ છે.

બિંદુ $P(a\cos\theta, b\sin\theta)$ આગળના અભિલંબનું સમીકરણ $(a\sec\theta)x-(b\operatorname{cosec}\theta)y = a^2-b^2$ થશે.

તે X-અક્ષને $Q\left(\frac{a^2-b^2}{a}\cos\theta,\ 0\right)$ અને Y-અક્ષને $R\left(0,\ -\frac{a^2-b^2}{b}\sin\theta\right)$ માં છેદશે.

$$\therefore\ PQ^2 = \left(a\cos\theta - \frac{a^2-b^2}{a}\cos\theta\right)^2 + b^2\sin^2\theta$$

$$= \frac{b^2}{a^2}\left(b^2\cos^2\theta + a^2\sin^2\theta\right)$$

તે જ રીતે, $PR^2 = \frac{a^2}{b^2}\left(b^2\cos^2\theta + a^2\sin^2\theta\right)$

$\therefore\ PQ^2 : PR^2 = \frac{b^2}{a^2} : \frac{a^2}{b^2}$

$\therefore\ PQ : PR = b^2 : a^2$ **જવાબ : (D)**

(126) ઉપવલય $3x^2+6x+12y^2+48y+15=0$ની ઉત્કેન્દ્રતા ......

(A) $\frac{1}{\sqrt{3}}$ (B) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ (C) $\frac{1}{\sqrt{2}}$ (D) $\frac{1}{2}$

ઉકેલ : અહીં $3x^2+6x+12y^2+48y+15=0$

$\therefore\ 3x^2+6x+3+12y^2+48y+48-36=0$

$\therefore\ 3(x^2+2x+1)+12(y^2+4y+4)=36$

$$\therefore\ \frac{(x+1)^2}{12}+\frac{(y+2)^2}{3}=1$$

$\therefore\ x' = x+1,\ y' = y+2$ લેતાં $\frac{(x')^2}{12}+\frac{(y')^2}{3}=1$

તેથી $a^2 = 12,\ \ b^2 = 3$ હોવાથી $a > b$.

હવે, $b^2 = a^2\left(1-e^2\right)$. આથી, $\frac{3}{12} = 1-e^2$

$\therefore\ \ e^2 = 1-\frac{1}{4} = \frac{3}{4}$

તેથી, $e = \frac{\sqrt{3}}{2}$

જવાબ : (B)

(127) ઉપવલય $x^2 + 4y^2 = 100$ની ઉત્કેન્દ્રતા ......

(A) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ (B) $\frac{1}{\sqrt{3}}$ (C) $\frac{1}{\sqrt{2}}$ (D) $\frac{1}{2}$

ઉકેલ : $x^2 + 4y^2 = 100$ પરથી, $\frac{x^2}{100}+\frac{y^2}{25} = 1$ ઉપવલય દર્શાવે છે.

વળી $a^2 = 100,\ \ b^2 = 25$ અને $a > b$ છે.

હવે, $b^2 = a^2\left(1-e^2\right)$ પરથી, $\left(1-e^2\right) = \frac{1}{4}$ તેથી, $e^2 = \frac{3}{4}$

માટે $e = \frac{\sqrt{3}}{2}$

જવાબ : (A)

(128) ઉપવલય $5x^2 + 2y^2 = 7$ને બિંદુ (1, 2) માંથી દોરેલા સ્પર્શકો વચ્ચેના ખૂણાનું માપ = ...

(A) $tan^{-1}\left(4\sqrt{105}\right)$ (B) $tan^{-1}\left(\sqrt{105}\right)$ (C) $tan^{-1}\left(2\sqrt{105}\right)$ (D) $tan^{-1}\left(6\sqrt{105}\right)$

ઉકેલ : અહીં ઉપવલય $5x^2 + 2y^2 = 7$ પરથી,

$\frac{x^2}{\frac{7}{5}} + \frac{y^2}{\frac{7}{2}} = 1$. આથી, $a^2 = \frac{7}{5},\ \ b^2 = \frac{7}{2}$. આથી, $a < b$

$\therefore$ ઉપવલયના m ઢાળવાળા સ્પર્શકનું સમીકરણ

$y = mx \pm \sqrt{a^2m^2 + b^2}$ થશે અને તે (1, 2)માંથી પસાર થાય છે.

$\therefore\ \ 2 = m \pm \sqrt{\frac{7}{5}m^2 + \frac{7}{2}}$

$\therefore\ \ (2-m)^2 = \frac{7m^2}{5} + \frac{7}{2}$

$\therefore\ \ 4 - 4m + m^2 - \frac{7m^2}{5} - \frac{7}{2} = 0$

$\therefore\ \ \frac{-2m^2}{5} - 4m + \frac{1}{2} = 0$

$\therefore\ \ 4m^2 + 40m - 5 = 0$ એ mમાં દ્વિઘાત સમીકરણ છે.

$\therefore\ \ m_1 + m_2 = -10,\ \ m_1 \times m_2 = \frac{-5}{4}$

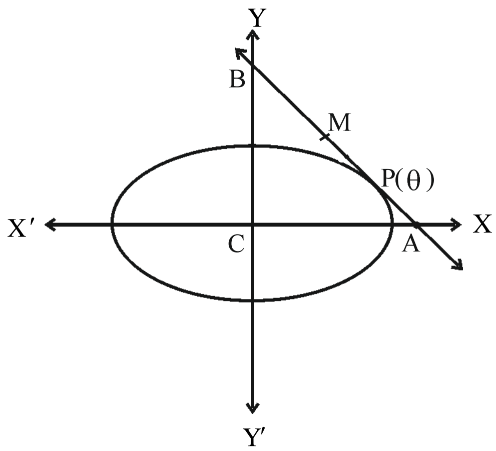
ધારો કે બે સ્પર્શકો વચ્ચેના ખૂણાનું માપ α હોય, તો

$$tan\,\alpha = \left|\frac{m_1 - m_2}{1 + m_1 m_2}\right| = \frac{\sqrt{(m_1+m_2)^2 - 4m_1m_2}}{1 + m_1m_2} = \left|\frac{\sqrt{100+5}}{1-\frac{5}{4}}\right| = \frac{\sqrt{105}}{\frac{1}{4}}.$$

આથી, $\alpha = tan^{-1} 4\sqrt{105}$ **જવાબ : (A)**

(129) ઉપવલય $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ના સ્પર્શકોના અક્ષો દ્વારા કપાતા રેખાખંડોનાં મધ્યબિંદુઓનો બિંદુગણ ......

(A) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 4$ (B) $\frac{a^2}{x^2} + \frac{b^2}{y^2} = 4$ (C) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 2$ (D) $\frac{a^2}{x^2} + \frac{b^2}{y^2} = 2$



આકૃતિ 9.61

ઉકેલ : ધારો કે ઉપવલય $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ પરના કોઈ બિંદુ $P(\theta)$ એટલે કે $P(a\,cos\theta, b\,sin\theta)$ આગળના સ્પર્શકનું સમીકરણ $\frac{x}{a}cos\theta + \frac{y}{b}sin\theta = 1$ છે. તે X-અક્ષને અને Y-અક્ષને અનુક્રમે A અને Bમાં છેદે, તો $A(a\,sec\theta, 0)$, $B(0, b\,cosec\theta)$ મળે.

$\overline{AB}$નું મધ્યબિંદુ $M(x, y)$ હોય, તો $x = \frac{a\,sec\theta}{2}$, $y = \frac{b\,cosec\theta}{2}$

$\therefore\ cos\theta = \frac{a}{2x}$, $sin\theta = \frac{b}{2y}$

હવે, $cos^2\theta + sin^2\theta = 1$ પરથી $\frac{a^2}{4x^2} + \frac{b^2}{4y^2} = 1$

$\therefore$ વ્યાપક રીતે, માંગેલ મધ્યબિંદુના બિંદુગણનું સમીકરણ, $\frac{a^2}{x^2} + \frac{b^2}{y^2} = 4$ **જવાબ : (B)**

(130) ઉપવલય $\frac{x^2}{100} + \frac{y^2}{25} = 1$ની નાભિઓ S અને S' હોય તથા P ઉપવલય પરનું કોઈ બિંદુ હોય, તો $PS + PS' =$ ......

(A) 10 (B) 20 (C) 25 (D) 100

ઉકેલ : અહીં આપેલ ઉપવલય પરથી $a^2 = 100,\ b^2 = 25$

જો P ઉપવલય પરનું બિંદુ હોય તથા S અને S′ નાભિઓ હોય, તો

$PS + PS' = 2a$ પરથી $PS + PS' = 20$ **જવાબ : (B)**

(131) ધારો કે $E: \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$ ઉપવલય દર્શાવે છે અને $C: x^2 + y^2 = 9$ વર્તુળ દર્શાવે છે તથા $P(1, 2)$ અને $Q(2, 1)$ હોય, તો

(A) બિંદુ Q એ Cની અંદરની બાજુ પણ Eની બહારની બાજુ હોય.

(B) બિંદુ Q એ C તથા E બંનેની બહારની બાજુ હોય.

(C) બિંદુ P એ C તથા E બંનેની અંદરની બાજુ હોય.

(D) બિંદુ P એ Cની અંદરની બાજુ તથા Eની બહારની બાજુ હોય.

ઉકેલ : બિંદુ P માટે, $1^2 + 2^2 = 5 < 9$, બિંદુ Q માટે, $2^2 + 1^2 = 5 < 9$

$\therefore$ બિંદુ P અને બિંદુ Q વર્તુળના અંદરના ભાગમાં આવેલ છે.

હવે, બિંદુ P માટે, $\frac{1^2}{9} + \frac{2^2}{4} = \frac{1}{9} + 1 = \frac{10}{9} > 1$

બિંદુ Q માટે, $\frac{2^2}{9} + \frac{1^2}{4} = \frac{4}{9} + \frac{1}{4} = \frac{25}{36} < 1$

$\therefore$ બિંદુ P એ ઉપવલય Eની બહારના ભાગમાં અને Q એ ઉપવલય Eના અંદરના ભાગમાં આવેલ બિંદુ છે.

આમ, બિંદુ P એ C ની અંદરના ભાગમાં અને Eના બહારના ભાગમાં આવેલ છે. **જવાબ : (D)**

(132) ઉપવલય $\frac{x^2}{121} + \frac{y^2}{16} = 1$ તથા ઉપવલય $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ની $(a > b)$ ઉત્કેન્દ્રતા સમાન હોય, તો $a : b =$ ......

(A) 11 : 16 (B) 11 : 4 (C) 4 : 11 (D) 16 : 11

ઉકેલ : ધારો કે ઉપવલય $\frac{x^2}{121} + \frac{y^2}{16} = 1$ની ઉત્કેન્દ્રતા e_1 તથા $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ની ઉત્કેન્દ્રતા e_2 છે.

$\therefore\ e_1 = \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}} \Rightarrow e_1 = \sqrt{1 - \frac{16}{121}} = \sqrt{\frac{105}{121}}$ તથા $e_2 = \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}}$

હવે, $e_1 = e_2$

$\therefore\ 1 - \frac{16}{121} = 1 - \frac{b^2}{a^2}$

$\therefore\ \frac{a^2}{b^2} = \frac{121}{16}$

$\therefore\ \frac{a}{b} = \frac{11}{4}$. આથી, $a : b = 11 : 4$ $(a > 0, b > 0)$ **જવાબ : (B)**