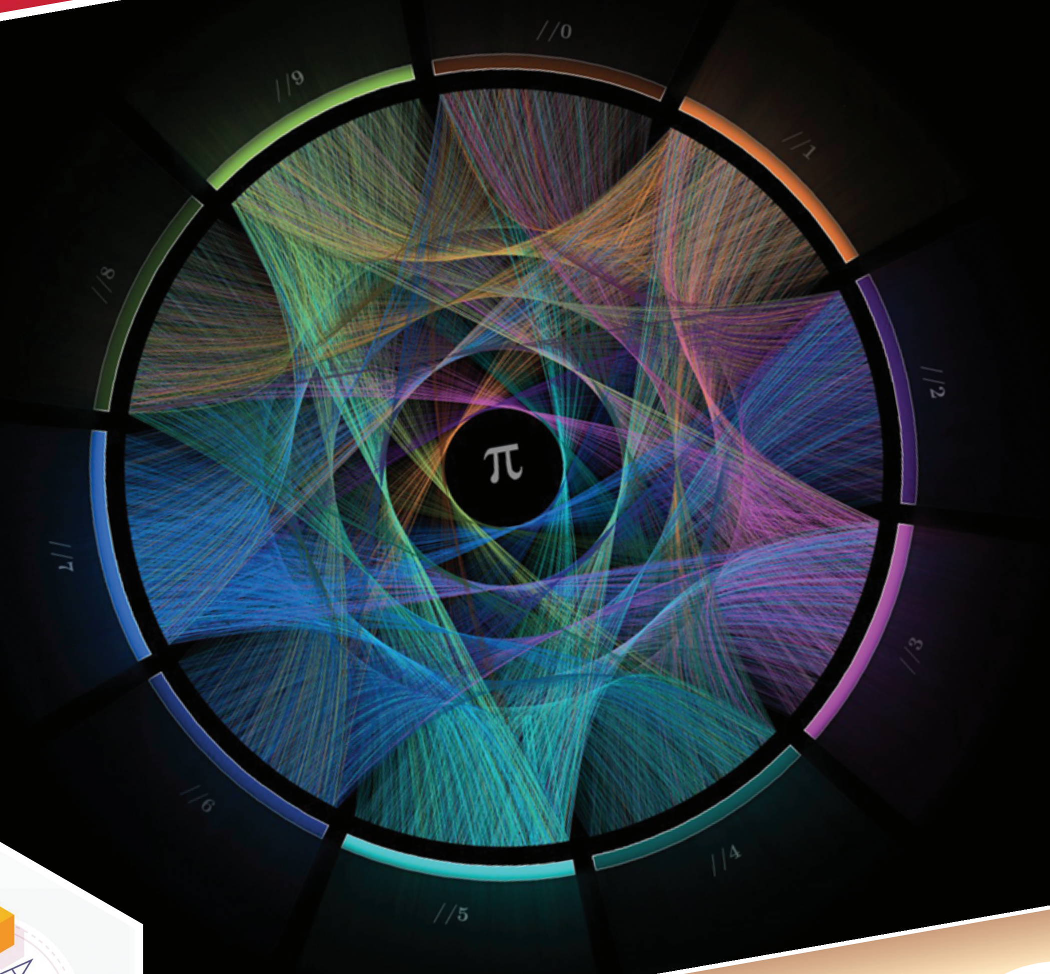
తెలంగాణ రాష్ట్ర విద్యామండలి

ఇంటర్మీడియట్ - ద్వితీయ సంవత్సరం

గణితశాస్త్రం-IIA



ప్రాథమిక అభ్యసన దీపిక

(BASIC LEARNING MATERIAL)

విద్యా సంవత్సరం: **2021-2022**

తెలంగాణ రాష్ట్ర విద్యామండలి
ఇంటర్మీడియట్ ద్వితీయ సంవత్సరం

గణితశాస్త్రం-II A

(తెలుగు మీడియం)

ప్రాథమిక అభ్యసన దీపిక
(BASIC LEARNING MATERIAL)

విద్యా సంవత్సరం
2021-2022

Coordinating Committee

Sri Syed Omer Jaleel, IAS
Commissioner, Intermediate Education &
Secretary, Telangana State Board of Intermediate Education
Hyderabad

Dr. Md. Abdul Khaliq
Controller of Examinations
Telangana State Board of Intermediate Education

Educational Research and Training Wing

Ramana Rao Vudithyala
Reader

Mahendar Kumar Taduri
Assistant Professor

Vasundhara Devi Kanjarla
Assistant Professor

Learning Material Contributors

M. Vijaya Sekhar
J.L. in Maths
GJC, BHEL, R.R. Dist.

D. Arundhathi
J.L. in Maths
GJC, Pochampally, Yadadri Bhongir Dist.

V. Aruna Kumari
J.L. in Maths
GJC, Toopran, Medak Dist.

D. Srilatha
J.L. in Maths, RLD. GJC,
S.P. Road, Secunderabad

ప్రవేశిక

సమస్త ప్రపంచాన్ని అతలాకుతలం చేస్తూ ఉన్న కరోనా మహమ్మారి మన జీవితంలోని ప్రతి రంగాన్ని ప్రభావితం చేసింది. విద్యారంగం కూడా దానికి అతీతమేమీ కాదు. భౌతికంగా తరగతులను పూర్తిగా నిర్వహించడానికి వీలుకాని పరిస్థితుల్లో, తెలంగాణా ప్రభుత్వ ఇంటర్మీడియట్ విద్యాశాఖ దూరదర్శన్ పాఠాల ద్వారా విద్యను మారుమూల ప్రాంతాలకు సైతం అందించింది. కరోనా మహమ్మారి వల్ల తలెత్తిన ఈ సంక్షోభ పరిస్థితుల నేపథ్యంలో తెలంగాణ ఇంటర్మీడియట్ విద్యాశాఖ బోధనకూ మరియు పరీక్షలకూ కేవలం 70% సిలబస్ ను మాత్రమే పరిగణనలోకి తీసుకోవడం ద్వారా విద్యార్థులపై పాఠ్యప్రణాళికా భారాన్ని తగ్గించింది. విద్యార్థుల సౌకర్యార్థం వార్షిక పరీక్షల ప్రశ్నాపత్రాలలో గణనీయంగా ఛాయిస్‌ను పెంచింది.

విద్యార్థులు పరీక్షల భయాన్ని, ఒత్తిడిని తట్టుకుని ఇంత తక్కువ సమయంలో వార్షిక పరీక్షలను విజయవంతంగా ఎదుర్కోవడానికి తెలంగాణ రాష్ట్ర ఇంటర్మీడియట్ విద్యా శాఖ "ప్రాథమిక అభ్యసన దీపిక" (Basic Learning Material) ను రూపొందించింది. ఇది విద్యార్థులు పరీక్షలను ధైర్యంగా ఎదుర్కొనే ఒక కరదీపికగా పనిచేస్తుంది. ఇక్కడ గమనించాల్సిన విషయం ఏమిటంటే ఈ అభ్యసన దీపిక సమగ్రమైనది కాదు. అదెంత మాత్రమూ పాఠ్య పుస్తకానికి ప్రత్యామ్నాయం కాదు. నిజం చెప్పాలంటే ఇది విద్యార్థులు తమ వార్షిక పరీక్షలలో రాయాల్సిన సమాధానాలలోని అత్యావశ్యకమైన సోపానాలను అందించి వాటి ఆధారంగా తమ తమ సమాధానాలను మరింత మెరుగ్గా మార్చుకోవడానికి తోడ్పడుతుంది. మీరు మీ పాఠ్య పుస్తకాలను క్షుణ్ణంగా చదివిన తర్వాత ఈ అభ్యసన దీపికను చదివితే అప్పుడది పాఠ్య పుస్తకాల నుండి, ఉపాధ్యాయుల నుండి మీరు నేర్చుకున్న భావనలను, విషయాలను బలోపేతం చేయడంలో తోడ్పడుతుంది. అతి తక్కువ వ్యవధిలో ఈ అభ్యసన దీపికను మీ ముందుంచడంలో అహర్నిశలూ శ్రమించిన ERTW బృందాన్ని, విషయ నిపుణుల బృందాన్ని మనస్ఫూర్తిగా అభినందిస్తున్నాను.

ఈ అభ్యసన దీపికను మరింత సుసంపన్నం చేయడంలోనూ, ఏ అంశంలోనైనా ఒక్క లోపం కూడా లేకుండా ఈ దీపికను తీర్చిదిద్దడంలోను విద్యావ్యవస్థతో ముడిపడివున్న అందరి నుండీ సూచనలను, సలహాలను కోరుకొంటున్నాను.

ఈ అభ్యసన దీపికల్ని మన వెబ్‌సైట్ www.tsbie.cgg.gov.in ద్వారా పొందవచ్చు.

కమీషనర్ & సెక్రెటరీ

ఇంటర్మీడియట్ విద్యాశాఖ, తెలంగాణ

CONTENTS

యూనిట్ - 1	**సంకీర్ణ సంఖ్యలు**	**01 - 10**
యూనిట్ - 2	**డిమోయర్ సిద్ధాంతం**	**11 - 18**
యూనిట్ - 3	**వర్గ సమాసాలు**	**19 - 32**
యూనిట్ - 4	**సమీకరణ వాదం**	**33 - 52**
యూనిట్ - 5	**ప్రస్తారాలు - సంయోగాలు**	**53 - 64**
యూనిట్ - 6	**ద్విపద సిద్ధాంతము**	**65 - 71**
యూనిట్ - 7	**పాక్షిక భిన్నాలు**	**72 - 79**
యూనిట్ - 8	**విస్తరణ కొలతలు**	**80 - 81**
యూనిట్ - 9	**సంభావ్యత**	**82 - 95**
యూనిట్ - 10	**యాదృచ్ఛిక చలరాశులు & సంభావ్యతా విభాజనాలు**	**96 - 107**

యూనిట్ **1**

సంకీర్ణ సంఖ్యలు

వాస్తవ సంఖ్యల క్రమయుగ్మాన్ని సంకీర్ణ సంఖ్య అంటారు. వీటిని C చే సూచిస్తారు.

$C = \{(a, b) / a \in R, b \in R\} = R \times R$

Note :- i) $Z = (a, b) = a + ib$ ఇక్కడ $i = \sqrt{-1}$ or $i^2 = -1$

ii) $(a, b) = (c, d) \Rightarrow a = c; b = d$

iii) **సంకలనం :** $Z_1 = (a, b)$, $Z_2 = (c, d)$ అయితే $Z_1 + Z_2 = (a+c, b+d)$

iv) $Z = (a, b)$ అయితే $-Z = (-a, -b)$

v) **వ్యవకలనం :** $Z_1 = (a, b)$, $Z_2 = (c, d)$ అయితే $Z_1 - Z_2 = (a-c, b-d)$

vi) **గుణకారం :** $Z_1 = (a, b)$, $Z_2 = (c, d)$ అయితే $Z_1 . Z_2 = (a, b).(c, d) = (ac - bd, ad + bc)$

vii) **భాగహారం :** $\alpha = (a, b), \beta = (c, d)$ & $\beta \neq (0, 0)$ అయితే $\frac{\alpha}{\beta} = \left(\frac{ac+bd}{c^2+d^2}, \frac{bc-ad}{c^2+d^2}\right)$

viii) $\beta \neq (0, 0)$, $\beta = (a, b)$ అయితే β గుణకార విలోమం $\beta^{-1} = \left(\frac{a}{a^2+b^2}, \frac{-b}{a^2+b^2}\right)$

సంకీర్ణ సంఖ్య యొక్క సంయుగ్మం :

ఏదైనా సంకీర్ణ సంఖ్య $Z = a + ib$ యొక్క సంయుగ్మం $\overline{Z} = a - bi$

Note: $\alpha, \beta \in C$ అయితే

(i) $\overline{\alpha + \beta} = \overline{\alpha} + \overline{\beta}$, ii) $\overline{\alpha . \beta} = \overline{\alpha} . \overline{\beta}$, iii) $\overline{\overline{\alpha}} = \alpha$, iv) $\beta \neq 0$ అయితే $\left(\overline{\alpha / \beta}\right) = \overline{\alpha} / \overline{\beta}$

సంకీర్ణ సంఖ్య యొక్క వర్గమూలం :

$Z = a + ib$ అయితే Z యొక్క వర్గమూలము

$$Z^{1/2} \text{ or } \sqrt{Z} = \sqrt{a+ib} = \begin{cases} \pm\left[\sqrt{\frac{\sqrt{a^2+b^2}+a}{2}} + i\sqrt{\frac{\sqrt{a^2+b^2}-a}{2}}\right], & \text{if } b > 0 \\ \pm\left[\sqrt{\frac{\sqrt{a^2+b^2}+a}{2}} - i\sqrt{\frac{\sqrt{a^2+b^2}-a}{2}}\right], & \text{if } b < 0 \end{cases}$$

VERY SHORT ANSWER TYPE QUESTIONS (2 MARKS)

1. $Z_1=(2, -1), Z_2=(6, 3)$ అయితే $Z_1 - Z_2$ ను కనుక్కోండి.

Sol. $Z_1=(2, -1), Z_2=(6, 3)$

$Z_1 - Z_2 = (2-6, -1-3) = (-4, -4)$.

2. $(-6, 5) + (10, -4)$ సంకీర్ణ సంఖ్యకు సంకలన విలోమాన్ని కనుక్కోండి.

Sol. $(-6, 5) + (10, -4) = (-6+10, 5-4) = (4, 1) = 4 + i$.

$4 + i$ యొక్క సంకలన విలోమము $= -(4 + i) = -4 - i$.

3. $Z=(\cos\theta, \sin\theta)$ అయితే $z - \frac{1}{z}$ ను కనుక్కోండి.

Sol. $z = (\cos\Theta, \sin\Theta) = \cos\Theta + i\sin\Theta$

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{\cos\Theta + i\sin\Theta} \times \frac{\cos\Theta - i\sin\Theta}{\cos\Theta - i\sin\Theta} = \frac{\cos\Theta - i\sin\Theta}{\cos^2\Theta + \sin^2\Theta} = \cos\Theta - i\sin\Theta$$

$$z - \frac{1}{z} = (\cos\Theta + i\sin\Theta) - (\cos\Theta - i\sin\Theta) = \cos\Theta + i\sin\Theta - \cos\Theta + i\sin\Theta$$

$$= 2i\sin\Theta = (0, 2\sin\Theta).$$

4. (3, 4) సంకీర్ణ సంఖ్య యొక్క గుణన విలోమాన్ని కనుక్కోండి.

Sol. (3, 4) యొక్క గుణన విలోమము $= \left(\frac{3}{3^2+4^2}, \frac{-4}{3^2+4^2}\right) = \left(\frac{3}{25}, \frac{-4}{25}\right)$.

5. (7, 24) సంకీర్ణ సంఖ్య యొక్క గుణన విలోమాన్ని కనుక్కోండి.

Sol. (7, 24) యొక్క గుణన విలోమము $= \left(\frac{7}{7^2+24^2}, \frac{-24}{7^2+24^2}\right) = \left(\frac{7}{625}, \frac{-24}{625}\right)$.

6. $Z_1 = (3, 5), Z_2 = (2, 6)$ అయితే $Z_1 . Z_2$ ను కనుక్కోండి.

Sol. $(a, b).(c, d)=(ac-bd, ad+bc)$

$Z_1.Z_2=(3, 5).(2, 6)=(6-30, 18+10)=(-24, 28)$

i.e., $(3+5i)(2+6i)=-24+28i$

7. $Z_1=(6, 3), Z_2=(2, -1)$ అయితే Z_1/Z_2 ను కనుక్కోండి.

Sol. $\alpha = (a, b), \beta = (c, d)$ అయితే $\frac{\alpha}{\beta} = \left(\frac{ac+bd}{c^2+d^2}, \frac{bc-ad}{c^2+d^2}\right)$

$$\frac{Z_1}{Z_2} = \left(\frac{12-3}{4+1}, \frac{6+6}{4+1}\right) = \left(\frac{9}{5}, \frac{12}{5}\right) \text{ or } \frac{9}{5} + \frac{12}{5}i$$

8. **$(2-3i)(3+4i)$ సంకీర్ణసంఖ్యను A + iB రూపంలో రాయండి.**

Sol. $(2-3i)(3+4i) = 6 + 8i - 9i + 12 = 18 - i$

$= 18 + i(-1).$

9. **$3(7+7i) + i(7+7i)$ సంకీర్ణసంఖ్యను A + iB రూపంలో రాయండి.**

Sol. $3(7+7i) + i(7+7i) = 21 + 21i + 7i - 7$

$= 14 + 28i.$

10. **$\dfrac{4+3i}{(2+3i)(4-3i)}$ సంకీర్ణసంఖ్యను A + iB రూపంలో రాయండి.**

Sol. $\dfrac{4+3i}{(2+3i)(4-3i)} = \dfrac{4+3i}{8-6i+12i+9}$

$= \dfrac{4+3i}{17+6i}$

$= \dfrac{(4+3i)(17-6i)}{(17+6i)(17-6i)}$

$= \dfrac{68-24i+51i+18}{289+36}$

$= \dfrac{86+27i}{325} = \dfrac{86}{325} + \dfrac{27}{325}i$

11. **$\dfrac{2+5i}{3-2i} + \dfrac{2-5i}{3+2i}$ సంకీర్ణసంఖ్యను A + iB రూపంలో రాయండి.**

Sol. $\dfrac{2+5i}{3-2i} + \dfrac{2-5i}{3+2i} = \dfrac{(2+5i)(3+2i)}{(3-2i)(3+2i)} + \dfrac{(2-5i)(3-2i)}{(3+2i)(3-2i)}$

$= \dfrac{6+4i+15i-10}{9+4} + \dfrac{6-4i-15i-10}{9+4}$

$= \dfrac{-4+19i}{13} + \dfrac{-4-19i}{13}$

$= \dfrac{-4+19i-4-19i}{13}$

$= \dfrac{-8}{13} + i(0)$

12. i^{-19} సంకీర్ణసంఖ్యను A + iB రూపంలో రాయండి.

Sol. $i^{-19} = \frac{1}{i^{19}}$

$= \frac{1}{i^{18}.i}$

$= \frac{1}{\left(i^2\right)^9 i}$

$= \frac{1}{\left(-1\right)^9 i} \quad \left(\because i^2 = -1\right)$

$= \frac{1}{-i}$

$= \frac{1(i)}{-i(i)}$

$= i \quad \left(\because i^2 = -1\right)$

$= 0 + i.1$

13. (3 + 4i) సంకీర్ణ సంఖ్యకు సంయుగ్మాన్ని రాయండి.

Sol. (3 + 4i) సంకీర్ణసంఖ్యకు సంయుగ్మం (3 – 4i).

14. $\frac{5i}{7+i}$ సంకీర్ణ సంఖ్యకు సంయుగ్మాన్ని రాయండి.

Sol. $\frac{5i}{7+i} = \frac{5i(7-i)}{(7+i)(7-i)} = \frac{35i - 5i^2}{7^2 - i^2}$

$= \frac{35i+5}{50} = \frac{7i+1}{10} = \frac{1+7i}{10}.$

ఈ సంకీర్ణసంఖ్యకు సంయుగ్మం $\frac{1-7i}{10}$.

15. (2 + 5i)(-4 + 6i) యొక్క సంయుగ్మ సంకీర్ణ సంఖ్యను కనుక్కోండి.

Sol. $(2+5i)(-4+6i) = -8 + 12i - 20i + 30 =$

$= 22 - 8i$.

$\therefore$ దీని సంయుగ్మం $= 22 + 8i$.

16. $i^2+i^4+i^6+.......(2n+1)$ పదాలు సూక్ష్మీకరించండి.

Sol. $i^2+i^4=-1+(-1)^2=0$

అదేవిధంగా $i^6+i^8=(i^2)^3+(i^2)^4=0$

ఏవేని రెండు వరుస సంఖ్యల మొత్తం శూన్యం.

$\therefore$ చివరి పదం $=\left(i^2\right)^{2n+1}=\left(-1\right)^{2n+1}=-1$

$\therefore$ $i^2+i^4+i^6+.....+(2n+1)$ పదాలు = -1

17. i^{-35} యొక్క గుణకార విలోమం కనుక్కోండి.

Sol. $i^{-35}=\dfrac{1}{i^{35}}$

$=\dfrac{1}{\left(i^2\right)^{17}i}$

$=\dfrac{1}{-i}$

$=\dfrac{1.i}{-i.i}=i$

a+ib యొక్క గుణకార విలోమం $=\dfrac{a-ib}{a^2+b^2}$

$\therefore$ 'i' యొక్క గుణకార విలోమం $=\dfrac{-i}{(1)^2}=-i$

Problems for Practice

(i) సంకీర్ణసంఖ్య i^9 ను $A+iB$ రూపంలోకి మార్చండి. Ans: $0+i.1$

(ii) $(-i)(2i)$ సంకీర్ణసంఖ్యను $A+iB$ రూపంలోకి మార్చండి. Ans: $2+i.0$

SHORT ANSWER TYPE QUESTIONS (4 MARKS)

1. 7 + 24i సంకీర్ణసంఖ్యకు వర్గమూలాన్ని కనుక్కోండి.

Sol:- $\sqrt{7+24i}=\pm(x+iy)$ అనుకొనుము.

$y=24>0$ కావున $\sqrt{x+iy}=\pm\left[\sqrt{\dfrac{\sqrt{x^2+y^2}+x}{2}}+i\sqrt{\dfrac{\sqrt{x^2+y^2}-x}{2}}\right]$

$$\sqrt{7+24i}=\pm\left[\sqrt{\frac{\sqrt{7^2+24^2}+7}{2}}+i\sqrt{\frac{\sqrt{7^2+24^2}-7}{2}}\right]$$

$$=\pm\left(\sqrt{\frac{32}{2}}+i\sqrt{\frac{18}{2}}\right)=\pm(4+3i)$$

2. $\mathbf{\frac{2-i}{(1-2i)^2}, \frac{-2-11i}{25}}$ **అనే సంకీర్ణ సంఖ్యలు సంయుగ్మాలని చూపండి ?**

Sol:- $\frac{2-i}{(1-2i)^2} = \frac{2-i}{1+4i^2-4i}$

$$= \frac{2-i}{-3-4i}$$

$$= \frac{(2-i)(-3+4i)}{(-3-4i)(-3+4i)} = \frac{-6+8i+3i-4i^2}{9+16}$$

$$= \frac{-2+11i}{25} = \frac{-2}{25} + \frac{11i}{25}$$

దీని సంయుగ్మం $\frac{-2}{25} - \frac{11i}{25} = \frac{-2-11i}{25}$

$\therefore \frac{2-i}{(1-2i)^2}, \frac{-2-11i}{25}$ లు ఒకదానికొకటి సంయుగ్మాలగును.

3. $\mathbf{\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^n = 1}$ **అయ్యేట్లుగా 'n' అనే కనిష్ఠ ధన పూర్ణాంకాన్ని కనుక్కోండి.**

Sol. $\frac{1+i}{1-i} = \frac{(1+i)(1+i)}{(1-i)(1+i)}$

$$= \frac{(1+i)^2}{(1+1)}$$

$$= \frac{1+i^2+2i}{2}$$

$$= \frac{1-1+2i}{2}$$

$$= \frac{2i}{2} = i$$

$\therefore i^n = 1$ అయ్యేట్లుగా కనిష్ఠ ధన పూర్ణాంకం $n = 4$ అగును.

4. $\mathbf{x+iy = \frac{1}{1+\cos\theta + i\sin\theta}}$ **అయితే** $\mathbf{4x^2 - 1 = 0}$ **అని చూపండి.**

Sol. $x+iy = \frac{1}{1+Cos\theta + i\,Sin\theta}$

$$= \frac{1}{2Cos^2\frac{\theta}{2} + i(2)Sin\frac{\theta}{2}.Cos\frac{\theta}{2}}$$

$$= \frac{1}{2Cos\frac{\theta}{2}\left[Cos\frac{\theta}{2} + i\,Sin\frac{\theta}{2}\right]}$$

$$= \frac{Cos\frac{\theta}{2} - i\,Sin\frac{\theta}{2}}{2Cos\frac{\theta}{2}\left(Cos\frac{\theta}{2} + i\,Sin\frac{\theta}{2}\right)\left(Cos\frac{\theta}{2} - i\,Sin\frac{\theta}{2}\right)}$$

$$= \frac{Cos\frac{\theta}{2} - i\,Sin\frac{\theta}{2}}{2Cos\frac{\theta}{2}\left(Cos^2\frac{\theta}{2} + Sin^2\frac{\theta}{2}\right)}$$

$$= \frac{Cos\frac{\theta}{2} - i\,Sin\frac{\theta}{2}}{2Cos\frac{\theta}{2}}$$

$$x + iy = \frac{1}{2} - \frac{i\,Tan\frac{\theta}{2}}{2}$$

వాస్తవ భాగాలను సమానం చేయగా $x = \frac{1}{2}$

$\Rightarrow 2x = 1$, ఇరువైపులా వర్గం చేయగా

$\Rightarrow 4x^2 = 1$

$\Rightarrow 4x^2 - 1 = 0$

5. $\mathbf{x + iy = \frac{3}{2 + Cos\,\theta + i\,Sin\,\theta}}$ **అయితే** $\mathbf{x^2 + y^2 = 4x - 3}$ **అని చూపండి.**

Sol. $x + iy = \dfrac{3}{2 + Cos\,\theta + i\,Sin\,\theta}$

$$= \frac{3\left[(2 + Cos\theta) - i\,Sin\theta\right]}{\left[(2 + Cos\theta) + i\,Sin\theta\right]\left[(2 + Cos\theta) - i\,Sin\theta\right]}$$

$$= \frac{(6 + 3Cos\theta) - 3i\,Sin\theta}{(2 + Cos\theta)^2 + Sin^2\theta}$$

$$= \frac{6 + 3Cos\theta - 3i\,Sin\theta}{4 + 4Cos\theta + (Sin^2\theta + Cos^2\theta)}$$

$$= \frac{6 + 3Cos\theta - 3i\,Sin\theta}{5 + 4Cos\theta}$$

$$x+iy=\frac{6+3Cos\theta}{5+4Cos\theta}-\frac{i(3\,Sin\theta)}{5+4Cos\theta}$$

ఇరువైపుల వాస్తవ, సంకీర్ణ భాగాలను సమానం చేయగా $x=\frac{6+3Cos\theta}{5+4Cos\theta},\ y=\frac{-3\,Sin\theta}{5+4Cos\theta}$

L.H.S:- x^2+y^2

$$=\left(\frac{6+3Cos\theta}{5+4Cos\theta}\right)^2+\left(\frac{-3\,Sin\theta}{5+4Cos\theta}\right)^2$$

$$=\frac{36+9Cos^2\theta+36Cos\theta}{(5+4Cos\theta)^2}+\frac{9Sin^2\theta}{(5+4Cos\theta)^2}$$

$$=\frac{36+9Cos^2\theta+9Sin^2\theta+36Cos\theta}{(5+4Cos\theta)^2}$$

$$=\frac{36+36Cos\theta+9\left(Cos^2\theta+Sin^2\theta\right)}{(5+4Cos\theta)^2}$$

$$=\frac{45+36Cos\theta}{(5+4Cos\theta)^2}$$

$$=\frac{9(5+4Cos\theta)}{(5+4Cos\theta)^2}$$

$$=\frac{9}{(5+4Cos\theta)}$$

R.H.S:- $4x-3$

$$=4\left(\frac{6+3Cos\theta}{5+4Cos\theta}\right)-3$$

$$=\frac{24+12\,Cos\theta-15-12\,Cos\theta}{(5+4Cos\theta)}$$

$$=\frac{9}{(5+4Cos\theta)}$$

$\therefore L.H.S.=R.H.S.$

6. $z = 3 - 5i$ అయితే $z^3 - 10z^2 + 58z - 136 = 0$ అని చూపండి.

Sol. $z = 3 - 5i \Rightarrow z - 3 = -5i$

$\Rightarrow (z-3)^2 = (-5i)^2$

$\Rightarrow z^2 - 6z + 9 = -25$

$\Rightarrow z^2 - 6z + 34 = 0.$

$z^3 - 10z^2 + 58z - 136 = z(z^2 - 6z + 34) - 4(z^2 - 6z + 34)$

$= z(0) - 4(0) = 0.$

7. $\dfrac{3+2i\sin\theta}{1-2i\sin\theta}$ **ఒక (ఎ) వాస్తవ సంఖ్య, (బి) శుద్ధ కల్పిత సంఖ్య అయినప్పుడుθ కి వాస్తవ విలువలను కనుక్కోండి.**

Sol:- $\dfrac{3+2i\sin\Theta}{1-2i\sin\Theta}$

$$= \frac{(3+2i\sin\Theta)(1+2i\sin\Theta)}{(1-2i\sin\Theta)(1+2i\sin\Theta)}$$

$$= \frac{3+4i^2\sin^2\Theta + 8i\sin\Theta}{1+4\sin^2\Theta)}$$

$$= \frac{3-4\sin^2\Theta}{1+4\sin^2\Theta} + \frac{8\sin\Theta}{1+4\sin^2\Theta}i$$

ఎ) ఇచ్చిన సంకీర్ణ సంఖ్య పూర్తిగా వాస్తవ సంఖ్య అయితే $\dfrac{8\sin\Theta}{1+4\sin^2\Theta} = 0$

$\Rightarrow \sin\Theta = 0 \Rightarrow \Theta = n\pi, n \in Z$

బి) ఇచ్చిన సంకీర్ణ సంఖ్య శుద్ధ కల్పిత సంఖ్య అయితే $\dfrac{3-4\sin^2\Theta}{1+4\sin^2\Theta} = 0$

$\Rightarrow 3 - 4\sin^2\Theta = 0$

$\Rightarrow \sin^2\Theta = \dfrac{3}{4}$

$$\Rightarrow \sin^2\Theta = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = \sin^2\left(\frac{\pi}{3}\right)$$

$$\Rightarrow \theta = 2n\pi \pm \frac{\pi}{3}, n \in Z$$

Problems for Practice

(i) $-8-6i$ యొక్క వర్గమూలం కనుక్కోండి. Ans: $\pm(1-3i)$

Hint : $b=-6<0$, $b<0$ అయితే, ఇక్కడ $\sqrt{a+ib} = \pm\left(\sqrt{\dfrac{r+a}{2}} - i\sqrt{\dfrac{r-a}{2}}\right)$

(ii) $(-5+12i)$ యొక్క వర్గమూలం కనుక్కోండి.

Ans: $\pm(2+3i)$

Hint : Refer Ex.3 from page 14 of text book

(iii) $Z_1 = \frac{2+11i}{25}$, $Z_2 = \frac{-2+i}{(1-2i)^2}$ లు ఒకదానికొకటి సంయుగ్మాలని చూపండి.

Hint : Refer Example '2' from page No. 13 of text book.

❖ ❖ ❖ ❖ ❖

యూనిట్ **2**

డిమోయర్ సిద్ధాంతం

1) **పూర్ణాంక ఘతానికి డిమోయర్ సిద్ధాంతం :** 'n' ఒక పూర్ణాంకం, $\theta \in R$ అయితే

$\left(\text{Cos}\theta + i\,\text{Sin}\theta\right)^{n} = \text{Cos}\left(n\theta\right) + i\,\text{Sin}\left(n\theta\right)$ అవుతుంది

2) $\left(\text{Cos}\theta + i\,\text{Sin}\theta\right)$ ను '$\text{Cis}\theta$' అని వ్రాస్తారు.

3) $\left(\text{Cos}\theta + i\,\text{Sin}\theta\right)^{-n} = \text{Cos}\,n\theta - i\,\text{Sin}\,n\theta$, 'n' ఒక పూర్ణాంకం.

4) $\cos\theta + i\sin\theta = \dfrac{1}{\cos\theta - i\sin\theta}$ మరియు $\cos\theta - i\sin\theta = \dfrac{1}{\cos\theta + i\sin\theta}$

5) $\left(\text{Cos}\theta - i\,\text{Sin}\theta\right)^{n} = \left(\dfrac{1}{\text{Cos}\theta + i\,\text{Sin}\theta}\right)^{n} = \left(\text{Cos}\theta + i\,\text{Sin}\theta\right)^{-n} = \text{Cos}\,n\theta - i\,\text{Sin}\,n\theta$.

ఇక్కడ 'n' ఒక పూర్ణాంకం.

6) $\text{Cis}\theta.\text{Cis}\phi = \text{Cis}\left(\theta + \phi\right)$, ఏ $\theta, \phi \in R$ కైనా.

7) 'ఒకటి' యొక్క ఘనమూలాలు $1, \omega, \omega^2$ ఇక్కడ $\omega = \dfrac{-1 + i\sqrt{3}}{2}$ and $\omega^2 = \dfrac{-1 - i\sqrt{3}}{2}$

8) $1 + \omega + \omega^2 = 0$ మరియు $\omega^3 = 1$

VERY SHORT ANSWER TYPE QUESTIONS (2 MARKS)

1. A, B, C లు త్రిభుజంలోని కోణాలు $x = cis\,A, y = cis\,B, z = cis\,C$ అయితే xyz విలువను కనుక్కోండి.

Sol:- $xyz = cis\,A\,cis\,B\,cis\,C = cis(A + B + C) = \cos\pi + i\sin\pi = -1.$

$\because xyz = -1$

2. $x = \cos\theta + i\sin\theta$ అయితే $x^6 + \dfrac{1}{x^6}$ విలువను కనుక్కోండి.

Sol:- $x^6 = (\cos\Theta + i\sin\Theta)^6 = \cos 6\Theta + i\sin 6\Theta$, $\dfrac{1}{x^6} = \cos 6\Theta - i\sin 6\Theta.$

$\therefore x^6 + \dfrac{1}{x^6} = 2\cos 6\Theta.$

3. ఏకకపు (ఒకటి) ఘన మూలాలు $1, \omega, \omega^2$ అయితే $(1-\omega+\omega^2)^3$ విలువను కనుక్కోండి.

Sol:- $(1-\omega+\omega^2)^3 = (1+\omega^2-\omega)^3$ $\left[\because 1+\omega+\omega^2=0 \Rightarrow 1+\omega^2=-\omega,\ \omega^3=1\right]$

$= (-\omega-\omega)^3 = (-2\omega)^3 = -8\omega^3 = -8$

4. ఏకకపు (ఒకటి) ఘన మూలాలు $1, \omega, \omega^2$ అయితే $(1+\omega)^3+(1+\omega^2)^3$ విలువను కనుక్కోండి.

Sol:- $(1+\omega)^3+(1+\omega^2)^3 = (-\omega^2)^3+(-\omega)^3 = -(\omega^3)^2-\omega^3 = -1-1 = -2$.

5. '8' యొక్క ఘనమూలాలు కనుక్కోండి.

Sol:- $8^{\frac{1}{3}} = \left[(8)(1)\right]^{\frac{1}{3}} = 8^{\frac{1}{3}}(1)^{\frac{1}{3}} = \left(2^3\right)^{\frac{1}{3}}(1)^{\frac{1}{3}}$

$= 2(1)^{\frac{1}{3}}$

$= 2(1),\ 2(\omega), 2(\omega^2)$

$\therefore$ '8' యొక్క ఘనమూలాలు $2,\ 2\omega,\ 2\omega^2$

6. $\left(1+i\sqrt{3}\right)^3$ విలువను కనుక్కోండి.

Sol:- $1+i\sqrt{3} = 2\left[\left(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right] = 2\left[\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right]$

$\left(1+i\sqrt{3}\right)^3 = \left[2\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)\right]^3 = 2^3\left[\cos\pi+i\sin\pi\right] = 8[-1+i(0)] = -8$

SHORT ANSWER TYPE QUESTIONS (4 MARKS)

1. $\dfrac{(\mathrm{Cos}\,\alpha+\mathrm{i}\,\mathrm{Sin}\,\alpha)^4}{(\mathrm{Sin}\,\beta+\mathrm{i}\,\mathrm{Cos}\,\beta)^8}$ ను సూక్ష్మీకరించండి.

Sol:- $\dfrac{(Cos\,\alpha+i\,Sin\,\alpha)^4}{(Sin\,\beta+i\,Cos\,\beta)^8} = \dfrac{(Cos\,\alpha+i\,Sin\,\alpha)^4}{\left(-i^2 Sin\,\beta+i\,Cos\,\beta\right)^8}$

$= \dfrac{(Cos\,\alpha+i\,Sin\,\alpha)^4}{\left[i(Cos\,\beta-i\,Sin\,\beta)\right]^8}$

$= \dfrac{(Cos\,\alpha+i\,Sin\,\alpha)^4}{(i)^8(Cos\,\beta-i\,Sin\,\beta)^8}$

$= (Cos\,\alpha+i\,Sin\,\alpha)^4(Cos\,\beta-i\,Sin\,\beta)^{-8}$ $\left(\because i^8 = \left(i^2\right)^4 = (-1)^4 = 1\right)$

$= (Cos\,4\alpha+i\,Sin\,4\alpha)(Cos\,8\beta+i\,Sin\,8\beta)$

$= Cos(4\alpha + 8\beta) + i\,Sin(4\alpha + 8\beta)$ or

$= Cis(4\alpha + 8\beta)$

2. $(1-i)^8$ యొక్క విలువను కనుక్కోండి.

Sol:- $a + ib = 1 - 1i$

$\Rightarrow a = 1,\ b = -1,\ \sqrt{a^2+b^2} = \sqrt{(1)^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}$

$(1-i)^8 = \left[\sqrt{2}\left(\frac{1-i}{\sqrt{2}}\right)\right]^8$

$= \left(\sqrt{2}\right)^8 \left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{i}{\sqrt{2}}\right)^8$

$= \left(\sqrt{2}\right)^8 \left(Cos\,45^0 - i\,Sin\,45^0\right)^8$

$= 2^4\left[Cos(8\times 45) - i\,Sin(8\times 45)\right] = 16\left[Cos\,(360^0) - i\,Sin(360^0)\right] = 16\left[1 - i(0)\right] = 16$

3. $\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{i}{2}\right)^5 - \left(\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{i}{2}\right)^5$ యొక్క విలువను కనుక్కోండి.

Sol:- $\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{i}{2}\right)^5 - \left(\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{i}{2}\right)^5 = \left(Cos\,30^0 + i\,Sin\,30^0\right)^5 - \left(Cos\,30^0 - i\,Sin\,30^0\right)^5$

$= \left(Cos\,150^0 + i\,Sin\,150^0\right) - \left(Cos\,150^0 - i\,Sin\,150^0\right)$

$= Cos\,150^0 + i\,Sin\,150^0 - Cos\,150^0 + i\,Sin\,150^0$

$= 2i\,Sin\,150^0$ $\left[\therefore Sin150^0 = Sin\left(180^0 - 30^0\right) = Sin30^0 = \frac{1}{2}\right]$

$= 2i\left(\frac{1}{2}\right) = i$

4. ఏకకపు (ఒకటి) ఘన మూలాలు $1, \omega, \omega^2$ అయితే $\left(1-\omega+\omega^2\right)^5 + \left(1+\omega-\omega^2\right)^5$ యొక్క విలువను కనుక్కోండి.

Sol:- $1, \omega, \omega^2$ లు ఏకకపు ఘనమూలాలు, కావున $1+\omega+\omega^2 = 0$ మరియు $\omega^3 = 1$

$\left(1-\omega+\omega^2\right)^5 + \left(1+\omega-\omega^2\right)^5 = \left[\left(1+\omega^2\right) - \omega\right]^5 + \left[\left(1+\omega\right) - \omega^2\right]^5$

$= \left[-\omega - \omega\right]^5 + \left[-\omega^2 - \omega^2\right]^5$

$= \left[-2\omega\right]^5 + \left[-2\omega^2\right]^5$

$= (-2)^5\left[\omega^5 + \omega^{10}\right]$

$= -32\left[\omega^3.\omega^2 + \left(\omega^3\right)^3.\,\omega\right]$

$$= -32\left[\omega^2 + \omega\right] \qquad \begin{bmatrix} \because \omega^3 = 1 \\ 1+\omega+\omega^2 = 0 \end{bmatrix}$$

$$= -32\left[-1\right]$$

$$= 32$$

$\therefore \left(1-\omega+\omega^2\right)^5 + \left(1+\omega-\omega^2\right)^5$ విలువ = 32

5. ఏకకపు (ఒకటి) ఘన మూలాలు $1, \omega, \omega^2$ అయితే కింది వాటిని నిరూపించండి.

i) $\dfrac{1}{1+2\omega} + \dfrac{1}{2+\omega} = \dfrac{1}{1+\omega}$

ii) $(2-\omega)(2-\omega^2)(2-\omega^{10})(2-\omega^{11}) = 49$

Sol:- i) $\dfrac{1}{1+2\omega} + \dfrac{1}{2+\omega} = \dfrac{1}{1+\omega} \Rightarrow \dfrac{1}{1+2\omega} + \dfrac{1}{2+\omega} - \dfrac{1}{1+\omega} = 0$

$$\text{L.H.S.} = \frac{1}{1+2\omega} + \frac{1}{2+\omega} - \frac{1}{1+\omega} = \frac{1+2\omega+2+\omega}{(1+2\omega)(2+\omega)} - \frac{1}{(1+\omega)}$$

$$= \frac{3+3\omega}{2+4\omega+\omega+2\omega^2} - \frac{1}{-\omega^2} = \frac{3(1+\omega)}{2+2\omega+2\omega^2+3\omega} + \frac{1}{\omega^2}$$

$$= \frac{3(1+\omega)}{2(1+\omega+\omega^2)+3\omega} + \frac{\omega^3}{\omega^2}$$

$$= \frac{3(1+\omega)}{3\omega} + \omega = \frac{-\omega^2}{\omega} + \omega = -\omega + \omega = 0 = \text{RHS.} \qquad \begin{bmatrix} \because 1+\omega+\omega^2 = 0 \\ \omega^3 = 1 \end{bmatrix}$$

ii) $(2-\omega)(2-\omega^2)(2-\omega^{10})(2-\omega^{11}) = (2-\omega)(2-\omega^2)(2-\omega)(2-\omega^2)$

$$= (2-\omega)^2(2-\omega^2)^2 = \left[(2-\omega)(2-\omega^2)\right]^2 = [4-2\omega^2-2\omega+\omega^3]^2 \qquad [\because \omega^3 = 1]$$

$$= [5-2(\omega^2+\omega)]^2 = [5-2(-1)]^2 = (5+2)^2 = 49$$

6. ఏకకపు ఘన మూలాలు $1, \omega, \omega^2$ అయితే $(1-\omega)(1-\omega^2)(1-\omega^4)(1-\omega^8)$ యొక్క విలువను కనుక్కోండి.

Sol: $(1-\omega)(1-\omega^2)(1-\omega^4)(1-\omega^8) = (1-\omega)(1-\omega^2)(1-\omega)(1-\omega^2)$

$$= \left[(1-\omega)(1-\omega^2)\right]^2 = (1-\omega-\omega^2+\omega^3)^2 = (2+1)^2 = 9. \qquad \begin{bmatrix} \because \omega^3 = 1 \\ 1+\omega+\omega^2 = 0 \\ 1 = -\omega-\omega^2 \end{bmatrix}$$

LONG ANSWER TYPE QUESTIONS (7 MARKS)

1. 'n' ఒక పూర్ణ సంఖ్య అయితే $(1+i)^{2n} + (1-i)^{2n} = 2^{n+1}\text{Cos}\left(\dfrac{n\pi}{2}\right)$ అని చూపండి.

Sol:- $1+i = a+ib$ అనుకొనుము $\Rightarrow a = 1, b = 1$ మరియు $\sqrt{a^2+b^2} = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$

$$(1+i)^{2n} = \left(\sqrt{2}\right)^{2n}\left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^{2n}$$

$$= 2^{\frac{2n}{2}}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}+i\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{2n}$$

$$= 2^{n}\left(Cos\frac{\pi}{4}+i\,Sin\frac{\pi}{4}\right)^{2n}$$

$$= 2^{n}\left(Cos\frac{2n\pi}{4}+i\,Sin\frac{2n\pi}{4}\right)$$

$$\therefore (1+i)^{2n} = 2^{n}\left(Cos\frac{n\pi}{2}+i\,Sin\frac{n\pi}{2}\right) \text{ ....(i)}$$

$1-i = x+iy$ అనుకొనుము $\Rightarrow x=1,\ y=-1$ మరియు $\sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{1+1}=\sqrt{2}$

$$(1-i)^{2n} = \left(\sqrt{2}\right)^{2n}\left(\frac{1-i}{\sqrt{2}}\right)^{2n}$$

$$= 2^{\frac{2n}{2}}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}-i\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{2n}$$

$$= 2^{n}\left(Cos\frac{\pi}{4}-i\,Sin\frac{\pi}{4}\right)^{2n}$$

$$= 2^{n}\left(Cos\frac{2n\pi}{4}-i\,Sin\frac{2n\pi}{4}\right)$$

$$= 2^{n}\left(Cos\frac{n\pi}{2}-i\,Sin\frac{n\pi}{2}\right) \text{ ....(ii)}$$

(i) & (ii) లను కూడగా

$$(1+i)^{2n}+(1-i)^{2n} = 2^{n}\left(Cos\frac{n\pi}{2}+i\,Sin\frac{n\pi}{2}\right)+2^{n}\left(Cos\frac{n\pi}{2}-i\,Sin\frac{n\pi}{2}\right)$$

$$= 2^{n}\left[Cos\frac{n\pi}{2}+i\,Sin\frac{n\pi}{2}+Cos\frac{n\pi}{2}-i\,Sin\frac{n\pi}{2}\right]$$

$$= 2^{n}\left[2.\ Cos\frac{n\pi}{2}\right]$$

$$= 2^{n+1}Cos\frac{n\pi}{2} = R.H.S \quad \text{Hence Proved.}$$

2. 'n' అనేది ధనపూర్ణ సంఖ్య అయితే $(1+i)^n+(1-i)^n = 2^{\frac{n+2}{2}}Cos\left(\frac{n\pi}{4}\right)$ అని చూపండి.

Sol:- $1+i=a+ib$ అనుకొనుము $\Rightarrow a=1,\ b=1$ మరియు $\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{1+1}=\sqrt{2}$

కావున $(1+i)^n = \left(\sqrt{2}\right)^n \left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^n$

$$= \left(\sqrt{2}\right)^n \left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{i}{\sqrt{2}}\right)^n$$

$$= \left(\sqrt{2}\right)^n \left(Cos\frac{\pi}{4} + i\,Sin\frac{\pi}{4}\right)^n$$

$\therefore (1+i)^n = 2^{\frac{n}{2}}\left(Cos\frac{n\pi}{4} + i\,Sin\frac{n\pi}{4}\right)$ ....(i)

$1-i = x+iy$ అనుకొనుము $\Rightarrow x=1,\ y=-1$ మరియు $\sqrt{x^2+y^2} = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$

కావున $(1-i)^n = \left(\sqrt{2}\right)^n \left(\frac{1-i}{\sqrt{2}}\right)^n$

$$= 2^{\frac{n}{2}}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} - i\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n$$

$$= 2^{\frac{n}{2}}\left(Cos\frac{\pi}{4} - i\,Sin\frac{\pi}{4}\right)^n$$

$\therefore (1-i)^n = 2^{\frac{n}{2}}\left(Cos\frac{n\pi}{4} - i\,Sin\frac{n\pi}{4}\right)$ ....(ii)

(i) & (ii) లను కూడగా

$$(1+i)^n + (1-i)^n = 2^{\frac{n}{2}}\left(Cos\frac{n\pi}{4} + i\,Sin\frac{n\pi}{4}\right) + 2^{\frac{n}{2}}\left(Cos\frac{n\pi}{4} - i\,Sin\frac{n\pi}{4}\right)$$

$$= 2^{\frac{n}{2}}\left(Cos\frac{n\pi}{4} + i\,Sin\frac{n\pi}{4} + Cos\frac{n\pi}{4} - i\,Sin\frac{n\pi}{4}\right)$$

$$= 2^{\frac{n}{2}}\left(2.Cos\frac{n\pi}{4}\right)$$

$$= 2^{\frac{n}{2}+1}\,Cos\frac{n\pi}{4}$$

$$= 2^{\frac{n+2}{2}}\,Cos\frac{n\pi}{4} = R.H.S.\ \text{Hence Proved}$$

3. సమీకరణం $x^2-2x+4=0$, $n \in N$ యొక్క మూలాలు α, β అయితే $\alpha^n + \beta^n = 2^{n+1}\cos\left(\frac{n\pi}{3}\right)$ అని చూపండి.

Sol:- $x^2-2x+4=0 \Rightarrow x = \frac{2\pm\sqrt{4-16}}{2} = 1\pm\sqrt{3}\,i$

$\alpha = 1+\sqrt{3}i, \beta = 1-\sqrt{3}i$ అనుకొనుము.

$$\alpha^n+\beta^n=(1+\sqrt{3}i)^n+(1-\sqrt{3}i)^n=\left[2\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)\right]^n+\left[2\left(\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)\right]^n$$

$$=2^n\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)^n+2^n\left(\cos\frac{\pi}{3}-i\sin\frac{\pi}{3}\right)^n$$

$$=2^n\left[\cos\frac{n\pi}{3}+i\sin\frac{n\pi}{3}+\cos\frac{n\pi}{3}-i\sin\frac{n\pi}{3}\right]=2^n.2\cos\frac{n\pi}{3}=2^{n+1}\cos\frac{n\pi}{3}.$$

4. 'n' పూర్ణాంకం, $Z=Cis\theta$, $\left(\theta\neq(2n+1)\frac{\pi}{2}\right)$ అయితే $\frac{Z^{2n}-1}{Z^{2n}+1}=i\,Tan(n\theta)$ అని చూపండి.

Sol:- $Z=Cis(\theta)=Cos\theta+i\,Sin\theta$

L.H.S:- $\frac{Z^{2n}-1}{Z^{2n}+1}$

$$=\frac{(Cos\theta+i\,Sin\theta)^{2n}-1}{(Cos\theta+i\,Sin\theta)^{2n}+1}$$

$$=\frac{Cos\,2n\theta+i\,Sin\,2n\theta-1}{Cos\,2n\theta+i\,Sin\,2n\theta+1}$$

$$=\frac{-[1-Cos\,2n\theta]+i\,Sin\,2n\theta}{[1+Cos\,2n\theta]+i\,Sin\,2n\theta}$$

$$=\frac{-2\,Sin^2n\theta+i(2)Sin\,n\theta.Cos\,n\theta}{2\,Cos^2n\theta+i(2)\,Sin\,n\theta.Cos\,n\theta}$$

$$=\frac{2i^2Sin^2n\theta+2i\,Sin\,n\theta.Cos\,n\theta}{2\,Cos^2n\theta+2i\,Sin\,n\theta.Cos\,n\theta}\qquad(\because i^2=-1)$$

$$=\frac{2i\,Sin\,n\theta\,[Cos\,n\theta+i\,Sin\,n\theta]}{2\,Cos\,n\theta\,[Cos\,n\theta+i\,Sin\,n\theta]}$$

$=i\,Tan(n\theta)=R.H.S.$ Hence Proved.

5. 'n' ఒక పూర్ణ సంఖ్య అయితే

$(1+Cos\theta+i\,Sin\theta)^n+(1+Cos\theta-i\,Sin\theta)^n=2^{n+1}Cos^n\left(\frac{\theta}{2}\right)Cos\left(\frac{n\theta}{2}\right)$ అని చూపండి.

Sol:- L.H.S:- $(1+Cos\theta+i\,Sin\theta)^n+(1+Cos\theta-i\,Sin\theta)^n$

$$=\left[2\,Cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right)+i(2)\,Sin\left(\frac{\theta}{2}\right)Cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\right]^n+\left[2\,Cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right)-i(2)\,Sin\left(\frac{\theta}{2}\right)Cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\right]^n$$

$$=2^n\,Cos^n\left(\frac{\theta}{2}\right)\left[Cos\left(\frac{\theta}{2}\right)+i\,Sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\right]^n+2^n\,Cos^n\left(\frac{\theta}{2}\right)\left[Cos\left(\frac{\theta}{2}\right)-i\,Sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\right]^n$$

$$= 2^n\, Cos^n\left(\frac{\theta}{2}\right)\left[\left(Cos\left(\frac{\theta}{2}\right)+i\,Sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\right)^n+\left(Cos\left(\frac{\theta}{2}\right)-i\,Sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\right)^n\right]$$

$$= 2^n\, Cos^n\left(\frac{\theta}{2}\right)\left[Cos\left(\frac{n\theta}{2}\right)+i\,Sin\left(\frac{n\theta}{2}\right)+Cos\left(\frac{n\theta}{2}\right)-i\,Sin\left(\frac{n\theta}{2}\right)\right]$$

$$= 2^n\, Cos^n\left(\frac{\theta}{2}\right)\left[2\,Cos\left(\frac{n\theta}{2}\right)\right]$$

$$= 2^{n+1}\, Cos^n\left(\frac{\theta}{2}\right).Cos\left(\frac{n\theta}{2}\right) = R.H.S.$$ Hence Proved.

6. ఏకకపు ఘన మూలాలు $1,\omega,\omega^2$ అయితే

$(1-\omega+\omega^2)^6+(1-\omega^2+\omega)^6 = 128 = (1-\omega+\omega^2)^7+(1+\omega-\omega^2)^7$ అని చూపండి.

Sol:- ఏకకపు ఘనమూలాలు 1, ω, ω^2 కావున $1+\omega+\omega^2=0 \Rightarrow 1+\omega^2=-\omega$ మరియు $1+\omega=-\omega^2$

$$(1-\omega+\omega^2)^6+(1-\omega^2+\omega)^6 = (-\omega-\omega)^6+(-\omega^2-\omega^2)^6 = 2^6(\omega^6+\omega^{12}) \qquad [\because \omega^3=1]$$

$$= 2^6(2) = 128 \qquad ....(1)$$

$$(1-\omega+\omega^2)^7+(1+\omega-\omega^2)^7 = (-\omega-\omega)^7+(-\omega^2-\omega^2)^7$$

$$= (-2)^7(\omega^7+\omega^{14}) = (-2)^7(\omega+\omega^2).$$

$$= (-128)(-1) = 128 \qquad ....(2)$$

(1), (2) ల నుండి

$$(1-\omega+\omega^2)^6+(1-\omega^2+\omega)^6 = 128 = (1-\omega+\omega^2)^7+(1+\omega-\omega^2)^7$$

7. ఏకకపు ఘన మూలాలు $1,\omega,\omega^2$ అయితే

$(x+y+z)(x+y\omega+z\omega^2)(x+y\omega^2+z\omega) = x^3+y^3+z^3-3xyz$ అని చూపండి.

Sol:- 1, ω, ω^2 లు ఏకకపు ఘన మూలాలు.

$$\therefore 1+\omega+\omega^2=0 \Rightarrow \omega+\omega^2=-1,\quad \omega^3=1 \Rightarrow \omega^4=\omega^3.\omega=1\omega=\omega$$

Consider $(x+y\omega+z\omega^2)(x+y\omega^2+z\omega)$

$$= x^2+xy\omega^2+xz\omega+xy\omega+y^2\omega^3+yz\omega^2+xz\omega^2+yz\omega^4+z^2\omega^3$$

$$= x^2+(xy+yz+zx)\omega+(xy+yz+zx)\omega^2+y^2+z^2$$

$$= x^2+y^2+z^2+(xy+yz+zx)(\omega+\omega^2)$$

$$= x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx \quad (\therefore \omega+\omega^2=-1)$$

L.H.S :- $(x+y+z)(x+y\omega+z\omega^2)(x+y\omega^2+z\omega)$

$$= (x+y+z)(x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx)$$

$$= x^3+y^3+z^3-3xyz = R.H.S.$$

❖ ❖ ❖ ❖ ❖

యూనిట్ **3**

వర్గ సమాసాలు

➪ **వర్గ సమాసము :** $ax^2 + bx + c$ (a, b, c లు వాస్తవ లేదా సంకీర్ణ సంఖ్యలు) రూపంలో ఉండే బహుపదిని చలరాశి x లో వర్గ సమాసం అంటారు.

ఉదా: $3x^2+2x+7$, $3x^2-7$ లు వర్గ సమాసాలు

➪ **వర్గ సమీకరణము :** $ax^2 + bx + c = 0$ (a, b, c లు వాస్తవ లేదా సంకీర్ణ సంఖ్యలు) అనేది చలరాశి"x" లో వర్గ సమీకరణం అంటారు.

ఉదా: $3x^2+2x-5=0$, $3x^2+2 = x+7$ లు వర్గ సమీకరణాలు

➪ $ax^2 + bx + c = 0$ వర్గ సమీకరణ మూలాలు $\dfrac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

➪ **విచక్షణి :** $\Delta = b^2 - 4ac$

వర్గ సమీకరణ మూలాల స్వభావం

$ax^2 + bx + c = 0$ వర్గ సమీకరణ మూలాలు α, β ఇక్కడ a, b, c లు వాస్తవసంఖ్యలు.

Case (i) :- $\Delta = 0 \Leftrightarrow \alpha = \beta = \dfrac{-b}{2a}$ మూలాలు సమానాలు, వాస్తవాలు

Case (ii) :- $\Delta > 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ మూలాలు విభిన్నాలు, వాస్తవాలు

Case (iii) :- $\Delta < 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{-b \pm i\sqrt{4ac-b^2}}{2a}$ మూలాలు అవాస్తవాలు లేదా సంకీర్ణాలు

a, b, c లు అకరణీయ సంఖ్యలు, α, β లు వర్గ సమీకరణం $ax^2 + bx + c = 0$ మూలాలు అయితే

(i) $\Delta = 0 \Leftrightarrow \alpha, \beta$ లు సమానాలు మరియు అకరణీయాలు.

(ii) Δ అనేది శూన్యేతర అకరణీయ సంఖ్య యొక్క వర్గము $\Leftrightarrow \alpha, \beta$ లు విభిన్న అకరణీయ సంఖ్యలు.

(iii) $\Delta > 0$ మరియు Δ అనేది శూన్యేతర అకరణీయ సంఖ్య వర్గం కాదు $\Leftrightarrow \alpha, \beta$ లు సంయుగ్మ కరణులగును.

వర్గ సమీకరణ మూలాలకు, గుణకాలకు మధ్య సంబంధం

$ax^2 + bx + c = 0$ వర్గ సమీకరణ మూలాలు α, β అనుకొనుము.

మూలాల మొత్తం

$$\alpha+\beta=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}+\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=\frac{-2b}{2a}=\frac{-b}{a}$$

మూలాల లబ్ధం

$$\alpha\beta=\left(\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right)\left(\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right)=\frac{(-b)^2-(b^2-4ac)}{4a^2}=\frac{4ac}{4a^2}=\frac{c}{a}$$

➪ α, β లు వర్గ సమీకరణం $ax^2+bx+c=0$ యొక్క మూలాలు అయితే వర్గసమీకరణాన్ని

$$a\left(x^2-(\alpha+\beta)x+\alpha\beta\right)=0$$

i.e., $a(x-\alpha)(x-\beta)=0$ గా రాయవచ్చు.

ఉమ్మడి మూలం (Common root)

$a_1x^2+b_1x+c_1=0$ మరియు $a_2x^2+b_2x+c_2=0$ అనే సమీకరణాలకు ఉమ్మడి మూలం ఉండే ఆవశ్యక, పర్యాప్త నియమం $(c_1a_2-c_2a_1)^2=(a_1b_2-a_2b_1)(b_1c_2-b_2c_1)$

వర్గ సమీకరణం కొన్ని ధర్మాలు :

$f(x)=ax^2+bx+c=0$ అనే వర్గ సమీకరణం యొక్క మూలాలు α, β లు అయితే

(i) $c\neq 0$, $\alpha\beta\neq 0$, $f\left(\frac{1}{x}\right)=0$ అనేది $\frac{1}{\alpha}, \frac{1}{\beta}$ లు మూలాలుగా గల వర్గ సమీకరణం.

(ii) $f(x-k)=0$ అనేది $\alpha+k, \beta+k$ లు మూలాలుగా గల వర్గ సమీకరణం.

(iii) $f(-x)=0$ అనేది $-\alpha$, $-\beta$ లు మూలాలుగా గల వర్గ సమీకరణం.

(iv) $f(\frac{x}{k})=0$ అనేది $k\alpha, k\beta$ లు మూలాలుగా గల వర్గ సమీకరణం.

వర్గ సమాసం యొక్క గుర్తు (Sign of quadratic expressions)

α, β లు వర్గ సమీకరణం $ax^2+bx+c=0$ యొక్క మూలాలు మరియు $\alpha<\beta$ అయితే

(i) $\alpha<x<\beta$ లకు ax^2+bx+c మరియు a లకు వ్యతిరేక గుర్తులుంటాయి.

(ii) $x<\alpha, x>\beta$ లకు ax^2+bx+c మరియు a లకు ఒకే గుర్తులుంటాయి.

(iii) $ax^2+bx+c=0$, $(a,b,c\in R)$ మరియు $a\neq 0$ వర్గ సమీకరణం $ax^2+bx+c=0$ యొక్క మూలాలు అవాస్తవ లేదా సంకీర్ణ సంఖ్యలైతే $\Leftrightarrow \forall x\in R$ లకు ax^2+bx+c గుర్తు, 'a' గుర్తు ఒకటే ఉంటుంది.

(iv) $a,b,c\in R$, $a\neq 0$ మరియు $ax^2+bx+c=0$ వర్గ సమీకరణం మూలాలు సమానమైతే $\Leftrightarrow x=\frac{-b}{2a}$ కు తప్ప $\forall x\in R$ ax^2+bx+c గుర్తు, 'a' గుర్తు ఒకటే ఉంటుంది.

గరిష్ఠ మరియు కనిష్ఠ విలువలు (Maximum and minimum values)

గరిష్ఠ విలువ : $ax^2 + bx + c$ వర్గ సమాసంలో a<0 మరియు $a, b, c \in R$ ఐనపుడు $x = \frac{-b}{2a}$ వద్ద గరిష్ఠ విలువ ఉంటుంది. ఆ గరిష్ఠ విలువ $= \frac{4ac - b^2}{4a}$

కనిష్ఠ విలువ : $ax^2 + bx + c$ వర్గ సమాసంలో a>0 మరియు $a, b, c \in R$ ఐనపుడు $x = \frac{-b}{2a}$ వద్ద కనిష్ఠ విలువ ఉంటుంది. ఆ కనిష్ఠ విలువ $= \frac{4ac - b^2}{4a}$

VERY SHORT ANSWER TYPE QUESTIONS (2 MARKS)

1. 2, 5 మూలాలుగా గల వర్గసమీకరణం కనుక్కోండి.

Sol:- మూలాలు $\alpha = 2, \beta = 5$

$\alpha + \beta = 2 + 5 = 7, \alpha\beta = 2 \times 5 = 10$

కావలసిన సమీకరణం $x^2 - (\alpha + \beta)x + \alpha\beta = 0$

$\Rightarrow x^2 - 7x + 10 = 0$

2. $\frac{m}{n}, -\frac{n}{m}$ $(m \neq 0, n \neq 0)$ మూలాలుగా గల వర్గసమీకరణం కనుక్కోండి.

Sol:- మూలాలు $\alpha = \frac{m}{n}, \beta = -\frac{n}{m}$

$\alpha + \beta = \frac{m}{n} - \frac{n}{m} = \frac{m^2 - n^2}{mn}$

$\alpha\beta = \left(\frac{m}{n}\right)\left(-\frac{n}{m}\right) = -\frac{mn}{mn} = -1$

కావలసిన సమీకరణం $x^2 - (\alpha + \beta)x + \alpha\beta = 0$

$\Rightarrow x^2 - \left(\frac{m^2 - n^2}{mn}\right)x - 1 = 0$

$\Rightarrow mnx^2 - (m^2 - n^2)x - mn = 0$

3. $2 + \sqrt{3}, 2 - \sqrt{3}$ మూలాలుగా గల వర్గసమీకరణం కనుక్కోండి.

Sol:- $\alpha = 2 + \sqrt{3}, \beta = 2 - \sqrt{3}$ అనుకొనుము.

$\alpha + \beta = \left(2 + \sqrt{3}\right) + \left(2 - \sqrt{3}\right) = 4$

$\alpha\beta = \left(2 + \sqrt{3}\right)\left(2 - \sqrt{3}\right) = 4 - 3 = 1$

$\therefore x^2 - (\alpha + \beta)x + \alpha\beta = 0$

$\therefore$ కావలసిన సమీకరణం $x^2 - 4x + 1 = 0$.

4. $\mathbf{2\sqrt{3}-5}$, $\mathbf{-2\sqrt{3}-5}$ **మూలాలుగా గల వర్గసమీకరణం కనుక్కోండి.**

Sol:- $\alpha = 2\sqrt{3}-5,\ \beta = -2\sqrt{3}-5$ అనుకొనుము.

$\alpha+\beta = 2\sqrt{3}-5+\left(-2\sqrt{3}-5\right) = -10$

$\alpha\beta = \left(2\sqrt{3}-5\right)\left(-2\sqrt{3}-5\right) = -12+25 = 13$

$\therefore\ x^2-(\alpha+\beta)x+\alpha\beta = 0$

$x^2-(-10)x+13 = 0 \Rightarrow x^2+10x+13 = 0.$

5. $\mathbf{-x^2+x+2=0}$ **సమీకరణం మూలాలు కనుక్కోండి.**

Sol:- $ax^2+b+c=0$ వర్గ సమీకరణ మూలాలు $= \dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

ఇక్కడ $a=-1,\ b=1,\ c=2$

$\therefore$ ఇచ్చిన సమీకరణానికి మూలాలు

$$\frac{-1\pm\sqrt{1^2-4(-1)(2)}}{2(-1)} = \frac{-1\pm\sqrt{1+8}}{-2}$$

$$= \frac{-1\pm\sqrt{9}}{-2} = \frac{-1\pm3}{-2} = \frac{-1+3}{-2} \text{ or } \frac{-1-3}{-2} = -1 \text{ or } 2$$

6. $\mathbf{4x^2-4x+17=3x^2-10x-17}$ **సమీకరణం మూలాలు కనుక్కోండి.**

Sol:- $4x^2-4x+17=3x^2-10x-17 \Rightarrow x^2+6x+34=0$.........(1)

$ax^2+b+c=0$ వర్గ సమీకరణ మూలాలు $= \dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

ఇక్కడ $a=1,\ b=6,\ c=34$

$\therefore$ ఇచ్చిన సమీకరణానికి మూలాలు $= \dfrac{-6\pm\sqrt{36-4(1)(34)}}{2(1)}$

$$= \frac{-6\pm\sqrt{-100}}{2} = \frac{-6\pm10i}{2}$$

$$= -3+5i,\ -3-5i$$

కావున ఇచ్చిన సమీకరణానికి మూలాలు $-3+5i,\ -3-5i$

7. $\mathbf{2x^2-5x+6=0}$ **యొక్క విచక్షణి కనుక్కోండి.**

Sol:- విచక్షణి $\Delta = b^2-4ac = (-5)^2-4(2)(6)$

$$= 25-48 = -23$$

8. $\mathbf{x^2 - 12x + 32 = 0}$ **మూలాల స్వభావం కనుక్కోండి.**

Sol:- వర్గ సమాసము $x^2 - 12x + 32 = 0,\quad \Delta = b^2 - 4ac = (-12)^2 - 4(1)(32) = 144 - 128 = 16 > 0$

$\Delta > 0 \Rightarrow$ మూలాలు వాస్తవాలు, విభిన్నాలు.

$a = 1, b = -1, c = 32$ లు అకరణీయాలు. $\Delta = 16$ అనేది శూన్యేతర అకరణీయ సంఖ్య యొక్క వర్గము.

$\therefore$ మూలాలు విభిన్న అకరణీయ సంఖ్యలగును.

9. α, β **లు** $\mathbf{ax^2 + bx + c = 0}$ **సమీకరణ మూలాలైతే ఈ క్రింది సమాసాల విలువలను a, b, c పదాలలో కనుక్కోండి:**

(i) $\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta}$ **(ii)** $\frac{1}{\alpha^2} + \frac{1}{\beta^2}$ **(iii)** $\alpha^2 + \beta^2$ **(iv)** $\alpha^3 + \beta^3$ **(v)** $\alpha^4\beta^7 + \alpha^7\beta^4$

(vi) $\left(\frac{\alpha}{\beta} - \frac{\beta}{\alpha}\right)^2$ **(vii)** $\frac{\alpha^2 + \beta^2}{\alpha^{-2} + \beta^{-2}}$

Sol:- దత్తాంశం నుండి $\alpha + \beta = \frac{-b}{a},\ \alpha\beta = \frac{c}{a}$

(i)* $\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = \frac{\beta + \alpha}{\alpha\beta} = \frac{-b/a}{c/a} = \frac{-b}{c}$

(ii)* $\frac{1}{\alpha^2} + \frac{1}{\beta^2} = \frac{\beta^2 + \alpha^2}{\alpha^2\beta^2} = \frac{(\alpha+\beta)^2 - 2\alpha\beta}{(\alpha\beta)^2} = \frac{\left(-b/a\right)^2 - 2\,c/a}{\left(c/a\right)^2}$

$= \frac{\left(b^2/a^2\right) - 2\,c/a}{\left(c^2/a^2\right)} = \frac{b^2 - 2ac}{c^2}$

(iii) $\alpha^2 + \beta^2 = (\alpha+\beta)^2 - 2(\alpha\beta) = \left(\frac{-b}{a}\right)^2 - 2\left(\frac{c}{a}\right) = \frac{b^2}{a^2} - \frac{2c}{a} = \frac{b^2 - 2ac}{a^2}$

(iv) $\alpha^3 + \beta^3 = (\alpha+\beta)(\alpha^2 + \beta^2 - \alpha\beta)$

$= (\alpha+\beta)\left((\alpha+\beta)^2 - 2\alpha\beta - \alpha\beta\right) = (\alpha+\beta)\left((\alpha+\beta)^2 - 3\alpha\beta\right)$

$= \left(\frac{-b}{a}\right)\left(\left(\frac{-b}{a}\right)^2 - 3\frac{c}{a}\right) = \frac{-b}{a}\left[\frac{b^2}{a^2} - \frac{3c}{a}\right] = \frac{3abc - b^3}{a^3}$

(v) $\alpha^4\beta^7 + \alpha^7\beta^4 = (\alpha\beta)^4\left(\alpha^3 + \beta^3\right)$

$= \left(\frac{c}{a}\right)^4\left(\frac{3abc - b^3}{a^3}\right) = \frac{bc^4(3ac - b^2)}{a^7}$

(vi) $\left(\frac{\alpha}{\beta}-\frac{\beta}{\alpha}\right)^2=\left(\frac{\alpha^2-\beta^2}{\alpha\beta}\right)^2=\left[\frac{(\alpha+\beta)(\alpha-\beta)}{\alpha\beta}\right]^2=\frac{(\alpha+\beta)^2(\alpha-\beta)^2}{(\alpha\beta)^2}$

$$=\frac{\left(\frac{-b}{a}\right)^2}{\left(\frac{c}{a}\right)^2}\left[(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta\right]=\frac{b^2}{c^2}\left[\left(\frac{-b}{a}\right)^2-4\frac{c}{a}\right]=\frac{b^2}{c^2}\left[\frac{b^2-4ac}{a^2}\right]=\frac{b^2\left(b^2-4ac\right)}{a^2c^2}$$

(vii) $\frac{\alpha^2+\beta^2}{\alpha^{-2}+\beta^{-2}}=\frac{\alpha^2+\beta^2}{\frac{1}{\alpha^2}+\frac{1}{\beta^2}}=\frac{\alpha^2+\beta^2}{\frac{\beta^2+\alpha^2}{\alpha^2\beta^2}}=(\alpha\beta)^2=\frac{c^2}{a^2}$

10. $(x-a)(x-b)=h^2$ యొక్క మూలాలు వాస్తవాలని చూపండి.

Sol:- $(x-a)(x-b)=h^2 \Rightarrow x^2-(a+b)x+ab-h^2=0$

$$\Delta=\left[-(a+b)\right]^2-4(1)\left(ab-h^2\right)=(a+b)^2-4ab+4h^2=(a-b)^2+(2h)^2>0$$

$\Delta>0 \Rightarrow$ మూలాలు ఎల్లప్పుడూ వాస్తవాలే.

11. $x \in R$ ఐనపుడు ఈ క్రింది సమాసాల గరిష్ఠ, కనిష్ఠ విలువలు కనుక్కోండి.

(i) x^2-x+7 (ii) $2x-7-5x^2$

Sol:- (i) x^2-x+7

ax^2+bx+c అనే సమాసంతో పోల్చగా $a=1, b=-1, c=7$

$$\frac{4ac-b^2}{4a}=\frac{4(1)(7)-(-1)^2}{4(1)}=\frac{28-1}{4}=\frac{27}{4}$$

$\because a=1>0$ కావున, x^2-x+7 నకు పరమ కనిష్ఠ విలువ $\frac{27}{4}$.

(ii) $2x-7-5x^2$

Sol:- ax^2+bx+c అనే సమాసంతో పోల్చగా $a=-5, b=2, c=-7$

$$\frac{4ac-b^2}{4a}=\frac{4(-5)(-7)-(2)^2}{4(-5)}=\frac{140-4}{-20}=\frac{-136}{20}=\frac{-34}{5}$$

$\because a=-5<0$ కావున, $2x-7-5x^2$ నకు పరమ గరిష్ఠ విలువ $\frac{-34}{5}$

Problems for Practice

(i) రెండు వరుస ధనాత్మక సరిపూర్ణ సంఖ్యల యొక్క వర్గాల మొత్తం340 అయ్యేటట్లు రెండు వరుస సరిసంఖ్యలను కనుక్కోండి.

Ans: 12, 14

(ii) $x \in R$ ఐనపుడు ఈ క్రింది సమాసాల గరిష్ట, కనిష్ట విలువలు కనుక్కోండి.

(a) $3x^2 + 2x + 11$ Ans:- కనిష్ఠ విలువ $\frac{32}{3}$

(b) $12x - x^2 - 32$ Ans:- గరిష్ఠ విలువ = 4

SHORT ANSWER TYPE QUESTIONS (4 MARKS)

1. m యొక్క ఏయే విలువలకు $x^2 - 15 - m(2x - 8) = 0$ కు సమాన మూలాలుంటాయి ?

Sol:- $x^2 - 2mx + 8m - 15 = 0$ నకు సమాన మూలాలుంటాయి. కావున

$\Delta = b^2 - 4ac = 0$

$\Delta = 0 \Rightarrow (-2m)^2 - 4(1)(8m - 15) = 0$

$\Rightarrow 4m^2 - 32m + 60 = 0$

$\Rightarrow m^2 - 8m + 15 = 0$

$\Rightarrow (m-3)(m-5) = 0$

$\Rightarrow m = 3$ or $m = 5$

2. m యొక్క ఏ విలువలకు $x^2 + (m+3)x + (m+6) = 0$ కు సమాన మూలాలుంటాయి ?

Sol:- $x^2 + (m+3)x + (m+6) = 0$ నకు సమాన మూలాలుంటాయి. కావున

$\Delta = b^2 - 4ac = 0$

$\Delta = 0 \Rightarrow (m+3)^2 - 4(1)(m+6) = 0$

$\Rightarrow m^2 + 6m + 9 - 4m - 24 = 0$

$\Rightarrow m^2 + 2m - 15 = 0$

$\Rightarrow (m+5)(m-3) = 0$

$\Rightarrow m = -5$ or $m = 3$

3. $x^2 - 6x + 5 = 0$, $x^2 - 12x + p = 0$ వర్గ సమీకరణాలకు ఉమ్మడి మూలం ఉంటే p విలువ కనుక్కోండి.

Sol:- $x^2 - 6x + 5 = 0$, $x^2 - 12x + p = 0$ లకు ఉమ్మడి మూలం α అనుకొనుము.

$\Rightarrow \alpha^2 - 6\alpha + 5 = 0$,

$\Rightarrow (\alpha - 1)(\alpha - 5) = 0 \Rightarrow \alpha = 1$ or 5

$\alpha = 1$ అయితే $\alpha^2 - 12\alpha + p = 0 \Rightarrow 1 - 12 + p = 0 \Rightarrow p = 11$

$\alpha = 5$ అయితే $\alpha^2 - 12\alpha + p = 0 \Rightarrow 25 - 60 + p = 0 \Rightarrow p = 35$

$\therefore p = 11$ or 35

4. $ax^2 + 2bx + c = 0$, $ax^2 + 2cx + b = 0$ $(b \neq c)$ వర్గ సమీకరణాలకు ఉమ్మడి మూలం ఉంటే $a + 4b + 4c = 0$ అని చూపండి.

Sol:- $ax^2+2bx+c=0$, $ax^2+2cx+b=0$ లకు ఉమ్మడి మూలం α అనుకొనుము.

$a\alpha^2+2b\alpha+c=0$............(1) $a\alpha^2+2c\alpha+b=0$...........(2)

$(1)-(2)\Rightarrow(2b-2c)\alpha+c-b=0$

$\Rightarrow 2(b-c)\alpha=b-c=0\Rightarrow\alpha=\frac{1}{2}$

$\alpha=\frac{1}{2}$ ను (1)లో ప్రతిక్షేపించగా

$a\left(\frac{1}{2}\right)^2+2b\left(\frac{1}{2}\right)+c=0\Rightarrow\frac{a}{4}+b+c=0\Rightarrow a+4b+4c=0$

Problems for Practice

(i) m యొక్క ఏ విలువలకు $x^2-2(1+3m)x+7(3+2m)=0$ కు సమాన మూలాలుంటాయి ?

Ans:- $m=\frac{-10}{9}$ or 2

(ii) $x^2-6x+5=0$, $x^2-3ax+35=0$ వర్గ సమీకరణాలకు ఉమ్మడి మూలం ఉంటే a విలువను కనుక్కోండి.

Ans:- a = 4 or 12

LONG ANSWER TYPE QUESTIONS (7 MARKS)

1. ఈ క్రింది సమాసాల వ్యాప్తిని కనుక్కోండి.

(i) $\frac{x^2+x+1}{x^2-x+1}$

Sol:- $y=\frac{x^2+x+1}{x^2-x+1}$ అనుకొనుము.

$\Rightarrow y(x^2-x+1)=x^2+x+1$

$\Rightarrow x^2y-xy+y=x^2+x+1$

$\Rightarrow (y-1)x^2-(y+1)x+y-1=0$

$\because x\in R,\ \Delta=b^2-4ac\geq 0$

$\Rightarrow\left[-(y+1)\right]^2-4(y-1)(y-1)\geq 0$

$\Rightarrow (y+1)^2-4(y-1)^2\geq 0$

$\Rightarrow y^2+2y+1-4\left[y^2-2y+1\right]\geq 0$

$\Rightarrow -3y^2+10y-3\geq 0$

$\Rightarrow -3y^2+9y+y-3\geq 0$

$\Rightarrow -3y(y-3)+1(y-3)\geq 0$

$\Rightarrow (y-3)(1-3y) \ge 0 \Rightarrow \frac{1}{3} \le y \le 3$ ($\because$ $a = y^2$ గుణకం $= -3 < 0$)

$\Rightarrow y \in \left[\frac{1}{3}, 3\right]$

$\therefore \frac{x^2+x+1}{x^2-x+1}$ యొక్క వ్యాప్తి $\left[\frac{1}{3}, 3\right]$ అగును.

2. $\forall x \in R$ **కు** $\frac{1}{3x+1}+\frac{1}{x+1}-\frac{1}{(3x+1)(x+1)}$ **సమాస విలువ 1, 4 మధ్య ఉండదని చూపండి.**

Sol:- $y = \frac{1}{3x+1}+\frac{1}{x+1}-\frac{1}{(3x+1)(x+1)}$ అనుకొనుము.

$\Rightarrow y = \frac{x+1+3x+1-1}{(3x+1)(x+1)} = \frac{4x+1}{3x^2+4x+1}$

$\Rightarrow y(3x^2+4x+1) = 4x+1$

$\Rightarrow 3yx^2+4xy+y = 4x+1$

$\Rightarrow 3yx^2+4(y-1)x+(y-1) = 0$

$\because x \in R \Rightarrow \Delta = b^2-4ac \ge 0$

$\Rightarrow [4(y-1)]^2-4(3y)(y-1) \ge 0$

$\Rightarrow 16(y-1)^2-12y(y-1) \ge 0$

$\Rightarrow 4(y-1)[4(y-1)-3y] \ge 0$

$\Rightarrow 4(y-1)[4y-4-3y] \ge 0$

$\Rightarrow 4(y-1)(y-4) \ge 0$

$\Rightarrow (y-1)(y-4) \ge 0 \Rightarrow y \le 1$ లేదా $y \ge 4$ ($\because$ $a = y^2$ గుణకం $= 1 > 0$)

$\Rightarrow$ y విలువ 1, 4 ల మధ్య ఉండదు.

3. **x వాస్తవ సంఖ్య అయితే,** $\frac{x}{x^2-5x+9}$ **విలువ** $\frac{-1}{11}$**, 1 మధ్య వుంటుందని నిరూపించండి.**

Sol:- $\frac{x}{x^2-5x+9} = y$

$\Rightarrow x = yx^2-5yx+9y$

$\Rightarrow yx^2 + (-5y-1)x + 9y = 0$

$\Rightarrow yx^2 + (-5y-1)x + 9y = 0$

$\therefore x \in R \Rightarrow \Delta = b^2 - 4ac \geq 0$

$\Rightarrow (-5y-1)^2 - 4(y)(9y) \geq 0$

$\Rightarrow 25y^2 + 1 + 10y - 36y^2 \geq 0$

$\Rightarrow -11y^2 + 10y + 1 \geq 0$

$\Rightarrow 11y^2 - 10y - 1 \leq 0$

$\Rightarrow 11y^2 - 11y + y - 1 \leq 0$

$\Rightarrow (11y+1)(y-1) \leq 0$

$\Rightarrow -\frac{1}{11} \leq y \leq 1$

y విలువ $-\frac{1}{11}, 1$ ల మధ్య వుంటుంది.

4. $\forall x \in R$ **లకు** $\frac{x-p}{x^2-3x+2}$ **సమాసం వాస్తవమైతే p యొక్క వ్యాప్తిని కనుక్కోండి.**

Sol:- $y = \frac{x-p}{x^2-3x+2}$ అనుకొనుము.

$\Rightarrow x^2y - 3xy + 2y = x - p$

$\Rightarrow x^2y - (3y+1)x + (2y+p) = 0$

$\therefore x \in R \Rightarrow \Delta = b^2 - 4ac \geq 0$

$\Rightarrow [-(3y+1)]^2 - 4y(2y+p) \geq 0$

$\Rightarrow 9y^2 + 6y + 1 - 8y^2 - 4py \geq 0$

$\Rightarrow y^2 + 2(3-2p)y + 1 \geq 0$

a = 1>0, సమాసం ధనాత్మకం $\Rightarrow$ మూలాలు అవాస్తవ లేదా సంకీర్ణ సంఖ్యలు.

$\Rightarrow b^2 - 4ac < 0$

$\Rightarrow [2(3-2p)]^2 - 4(1)(1) < 0$

$\Rightarrow 4(3-2p)^2 - 4 < 0$

$\Rightarrow (3-2p)^2 - 1 < 0$

$\Rightarrow 9 + 4p^2 - 12p - 1 < 0$

$\Rightarrow 4p^2 - 12p + 8 < 0$

$\Rightarrow p^2 - 3p + 2 < 0$

$\Rightarrow (p-1)(p-2) < 0$

$\Rightarrow$ P విలువ 1, 2 ల మధ్య వుంటుంది.

i.e., $1 < p < 2$

5. $4^{x-1} - 3.2^{x-1} + 2 = 0$ అనే సమీకరణాన్ని సాధించండి.

Sol:- $2^{x-1} = a$ అనుకొనుము.

$4^{x-1} - 3.2^{x-1} + 2 = 0$

$\Rightarrow (2^2)^{x-1} - 3.2^{x-1} + 2 = 0$

$\Rightarrow (2^{x-1})^2 - 3.2^{x-1} + 2 = 0$

$\Rightarrow a^2 - 3a + 2 = 0$

$\Rightarrow (a-1)(a-2) = 0$

$\Rightarrow a = 1 \text{or } 2$

Case (i) $a = 1$ అయితే

$2^{x-1} = 1 = 2^0 \Rightarrow x - 1 = 0 \Rightarrow x = 1$

Case (ii) $a = 2$ అయితే

$2^{x-1} = 2 = 2^1 \Rightarrow x - 1 = 1 \Rightarrow x = 2$

$\therefore x = 1 \text{ or } 2$

6. $\sqrt{\dfrac{x}{x-3}}+\sqrt{\dfrac{x-3}{x}}=\dfrac{5}{2}$ **ను సాధించండి.** $(x \neq 0, x \neq 3)$

Sol:- $\sqrt{\dfrac{x}{x-3}}=a$ అనుకొనుము.

$a+\dfrac{1}{a}=\dfrac{5}{2}$ అగును.

$\Rightarrow \dfrac{a^2+1}{a}=\dfrac{5}{2} \Rightarrow 2(a^2+1)=5a$

$\Rightarrow 2a^2-5a+2=0$

$\Rightarrow 2a^2-4a-a+2=0$

$\Rightarrow 2a(a-2)-1(a-2)=0$

$\Rightarrow (a-2)(2a-1)=0$

$\Rightarrow a=2 \text{ or } a=\dfrac{1}{2}$

Case (i) $a=2$ అయితే

$\sqrt{\dfrac{x}{x-3}}=2 \Rightarrow \dfrac{x}{x-3}=4$

$\Rightarrow x=4x-12$

$\Rightarrow 3x=12 \Rightarrow x=4$

Case (ii) $a=\dfrac{1}{2}$ అయితే $\sqrt{\dfrac{x}{x-3}}=\dfrac{1}{2} \Rightarrow \dfrac{x}{x-3}=\dfrac{1}{4}$

$\Rightarrow 4x=x-3 \Rightarrow 3x=-3 \Rightarrow x=-1$

$\therefore x=-1 \text{ or } 4$

7. $2\left(x+\dfrac{1}{x}\right)^2-7\left(x+\dfrac{1}{x}\right)+5=0$ **సాధించండి.** $(x \neq 0)$

Sol:- $\left(x+\dfrac{1}{x}\right)=a$ అనుకుంటే $2a^2-7a+5=0$ అగును.

$\Rightarrow 2a^2-2a-5a+5=0$

$\Rightarrow 2a(a-1)-5(a-1)=0$

$\Rightarrow (a-1)(2a-5)=0 \;\Rightarrow a=1 \text{ or } \frac{5}{2}$

Case (i) :- $a=1$ అయితే

$x+\frac{1}{x}=1 \Rightarrow x^2-x+1=0$

$x=\frac{-(-1)\pm\sqrt{(-1)^2-4(1)(1)}}{2(1)}=\frac{1\pm\sqrt{1-4}}{2}=\frac{1\pm\sqrt{3}i}{2}$

Case (ii) :- $a=\frac{5}{2}$ అయితే

$x+\frac{1}{x}=\frac{5}{2} \Rightarrow \frac{x^2+1}{x}=\frac{5}{2} \Rightarrow 2x^2-5x+2=0$

$\Rightarrow 2x^2-4x-x+2=0 \Rightarrow 2x(x-2)-1(x-2)=0$

$\Rightarrow (x-2)(2x-1)=0$

$\Rightarrow x=\frac{1}{2} \text{ or } 2$

$\therefore x=\frac{1}{2}, \frac{1\pm i\sqrt{3}}{2}, 2$

8. $\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)-5\left(x+\frac{1}{x}\right)+6=0$ **సాధించండి.** $(x \neq 0)$

Sol:- $\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)-5\left(x+\frac{1}{x}\right)+6=0$

$\left[\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-2\right]-5\left(x+\frac{1}{x}\right)+6=0$

$x+\frac{1}{x}=a$ అనుకొనుము.

$\Rightarrow \left(a^2-2\right)-5a+6=0$

$\Rightarrow a^2-5a+4=0$

$\Rightarrow (a-1)(a-4)=0$

$\Rightarrow a=1 \text{ or } 4$

$\Rightarrow x+\frac{1}{x}=1 \text{ or } x+\frac{1}{x}=4$

$\Rightarrow x^2-x+1=0 \text{ or } x^2-4x+1=0$

$$\Rightarrow x = \frac{1 \pm \sqrt{(1-4)}}{2} \text{ or } x = \frac{4 \pm \sqrt{(16-4)}}{2}$$

$$\Rightarrow x = \frac{1 \pm \sqrt{3}\,i}{2} \text{ or } x = 2 \pm \sqrt{3}$$

9. **$c^2 \neq ab$ మరియు $(c^2 - ab)x^2 - 2(a^2 - bc)x + (b^2 - ac) = 0$ యొక్క మూలాలు సమానమైతే $a^3 + b^3 + c^3 = 3abc$ లేదా $a = 0$ అని చూపండి.**

Sol:- విచక్షణి $\Delta = b^2 - 4ac = 0$.

$$\left[-2\left(a^2 - bc\right)\right]^2 - 4(c^2 - ab)(b^2 - ac) = 0$$

$$\Leftrightarrow \left(a^2 - bc\right)^2 = (c^2 - ab)(b^2 - ac)$$

$$\Leftrightarrow a^4 + b^2c^2 - 2a^2bc = b^2c^2 - ab^3 - ac^3 + a^2bc$$

$$\Leftrightarrow a(a^3 + b^3 + c^3) = 3a(abc)$$

$\Leftrightarrow a^3 + b^3 + c^3 = 3abc$ లేదా $a = 0$

Problems for Practice

(i) $\dfrac{x+2}{2x^2 + 3x + 6}$ వ్యాప్తిని కనుక్కోండి. Ans: $\left[-\dfrac{1}{13}, \dfrac{1}{3}\right]$

(ii) $\dfrac{2x^2 - 6x + 5}{x^2 - 3x + 2}$ వ్యాప్తిని కనుక్కోండి. Ans: $(-\infty, -2] \cup [2, \infty)$

(iii) $3^{1+x} + 3^{1-x} = 10$ ను సాధించండి. Ans: $x = -1$ or 1

(iv) x వాస్తవ సంఖ్య అయిన, $7^{1+x} + 7^{1-x} = 50$ ను సాధించండి. Ans: $x = -1$ or 1

(v) $x^{\frac{2}{3}} + x^{\frac{1}{3}} - 2 = 0$ ను సాధించండి. Ans: $x = -8$ or 1

(vi) $\sqrt{\dfrac{3x}{x+1}} + \sqrt{\dfrac{x+1}{3x}} = 2$ ను సాధించండి. $(x \neq 0,\ x \neq -1)$ Ans: $x = \dfrac{1}{2}$

❖ ❖ ❖ ❖ ❖

యూనిట్ **4**

సమీకరణ వాదం

- ➪ $f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+................+a_n$ ఇక్కడ $a_0, a_1, a_2, ...a_n \in R$ లేదా C మరియు $a_0 \neq 0$ అనే సమాసాన్ని 'x' లో 'n' వ తరగతి బహుపది అంటారు.
- ➪ $f(x)$ అనేది 'x' లో n వ తరగతి బహుపది, $n>0$ అయితే $f(x)=0$ ను 'x' లో n వ తరగతి బీజీయ సమీకరణం అంటారు.
- ➪ 'α' సంకీర్ణ సంఖ్య $f(\alpha)=0$, ఐతే 'α' ను $f(x)=0$ సమీకరణం యొక్క మూలం అంటారు.
- ➪ **సమీకరణ మూలాలకు గుణకాలకు మధ్య సంబంధం:**

(i) $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ అనేవి $x^3+p_1x^2+p_2x+p_3=0$ అనే ఘన సమీకరణం యొక్క మూలాలైతే,

$S_1=\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3=-p_1$

$S_2=\alpha_1\alpha_2+\alpha_2\alpha_3+\alpha_3\alpha_1=p_2$

$S_3=\alpha_1\alpha_2\alpha_3=-p_3$

(ii) $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ అనేవి $x^4+p_1x^3+p_2x^2+p_3x+p_4=0$ అనే ద్వివర్గసమీరణ మూలాలైతే

$S_1=\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4=-p_1$

$S_2=\alpha_1\alpha_2+\alpha_2\alpha_3+\alpha_3\alpha_4+\alpha_1\alpha_3+\alpha_1\alpha_4+\alpha_2\alpha_4=p_2$

$S_3=\alpha_1\alpha_2\alpha_3+\alpha_2\alpha_3\alpha_4+\alpha_3\alpha_4\alpha_1+\alpha_1\alpha_2\alpha_4=-p_3$

$S_4=\alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4=p_4$

- ➪ ఒక ఘన సమీకరణ మూలాలు

(i) A.P. లో ఉంటే $a-d, a, a+d$ అనుకుందాం.

(ii) G.P. లో ఉంటే $\frac{a}{r}, a, ar$ అనుకుందాం.

(iii) H.P. లో ఉంటే $\frac{1}{a-d}, \frac{1}{a}, \frac{1}{a+d}$ అనుకుందాం.

- ➪ **సమీకరణాల పరివర్తనాలు :**

(i) మారిన గుర్తులు గల మూలాలు :

$f(x)=0$ సమీకరణ మూలాలు $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, ..., \alpha_n$ ఐతే $f(-x)=0$ మూలాలు $-\alpha_1, -\alpha_2, -\alpha_3, ..., -\alpha_n$ అగును.

(ii) దత్త సంఖ్యతో గుణించబడిన మూలాలు :

$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, ..., \alpha_n$ అనేవి $f(x)=0$ మూలాలైతే ఏదైనా శూన్యేతర సంకీర్ణ సంఖ్య 'k' నకు $f(\frac{x}{k})=0$ యొక్క మూలాలు $k\alpha_1, k\alpha_2, ..., k\alpha_n$ అవుతాయి.

(iii) $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, ..., \alpha_n$ అనేవి బహుపదీయ సమీకరణం $f(x)=0$ మూలాలైతే, $\alpha_1 - h, \alpha_2 - h, ..., \alpha_n - h$ లు $f(x+h)=0$ యొక్క మూలాలగును.

(iv) $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, ..., \alpha_n$ అనేవి బహుపదీయ సమీకరణం $f(x)=0$ మూలాలైతే, $\alpha_1 + h, \alpha_2 + h, ..., \alpha_n + h$ అనేవి $f(x-h)=0$ యొక్క మూలాలగును.

(v) వ్యుత్క్రమ మూలాలు :

$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, ..., \alpha_n$ అనేవి బహుపదీయ సమీకరణం $f(x)=0$ మూలాలైతే $\frac{1}{\alpha_1}, \frac{1}{\alpha_2}, ..., \frac{1}{\alpha_n}$ అనేవి బహుపదీయ సమీకరణం $x^n.f\left(\frac{1}{x}\right)=0$ సమీకరణానికి మూలాలు అవుతాయి.

(vi) 'α' అనేది $f(x)=0$ యొక్క మూలమైతే α^2 అనేది $f\left(\sqrt{x}\right)=0$ సమీకరణానికి మూలం అగును.

Note :- ఒక సమీకరణంలో 'x' బదులుగా $\frac{1}{x}$ ప్రతిక్షేపిస్తే ఆ సమీకరణం మారకుంటే, దానిని వ్యుత్క్రమ సమీకరణం అంటారు.

VERY SHORT ANSWER TYPE QUESTIONS (2 MARKS)

1. $x^3 - 6x^2 + 9x - 4 = 0$ మూలాలు 1, 1, α అయితే, α విలువ కనుక్కోండి.

Sol:- $x^3 - 6x^2 + 9x - 4 = 0$

$(a_0 = 1, a_1 = -6, a_2 = 9, a_3 = -4)$

$S_1 = \frac{-a_1}{a_0} \Rightarrow S_1 = 1 + 1 + \alpha = \frac{-(-6)}{1}$

$\Rightarrow 2 + \alpha = 6$

$\Rightarrow \alpha = 6 - 2 = 4$

$\therefore \alpha = 4$

2. $2x^3 + x^2 - 7x - 6 = 0$ మూలాలు -1, 2, α అయితే, α విలువ కనుక్కోండి.

Sol:- $2x^3 + x^2 - 7x - 6 = 0$

$(a_0 = 2, a_1 = 1, a_2 = -7, a_3 = -6)$

$S_1 = \frac{-a_1}{a_0} \Rightarrow S_1 = -1 + 2 + \alpha = \frac{-1}{2}$

$\Rightarrow \alpha + 1 = \frac{-1}{2}$

$\Rightarrow \alpha = \frac{-1}{2} - 1 = \frac{-3}{2}$ $\qquad \therefore \alpha = \frac{-3}{2}$

3. $x^3 - 2x^2 + ax + 6 = 0$ మూలాలు 1, -2, 3 అయితే, 'a' విలువ కనుక్కోండి.

Sol:- $x^3 - 2x^2 + ax + 6 = 0$

$(a_0 = 1, a_1 = -2, a_3 = a, a_4 = 6)$

$S_2 = \frac{a_2}{a_0} \Rightarrow \alpha\beta + \alpha\gamma + \beta\gamma = \frac{a}{1}$

$(1)(-2) + (1)(3) + (-2)(3) = a$

$-2 + 3 - 6 = a$

$\therefore a = -5$

4. $x^3 - 2x^2 - 5x + 6 = 0$ మూలాలు α, β, 1 అయితే, α, β విలువ కనుక్కోండి.

Sol:- $x^3 - 2x^2 - 5x + 6 = 0$

$(a_0 = 1, a_1 = -2, a_2 = -5, a_3 = 6)$

$S_1 = \frac{-a_1}{a_0} \Rightarrow \alpha + \beta + 1 = \frac{-(-2)}{1}$

$\Rightarrow \alpha + \beta = 1$ ....(1)

$S_3 = \frac{-a_3}{a_1} \Rightarrow (\alpha)(\beta)(1) = \frac{-6}{1}$

$\Rightarrow \alpha\beta = -6$ ....(2)

(1) నుండి $\beta = 1 - \alpha$ సమీకరణం (2) లో ప్రతిక్షేపించగా

$\alpha(1-\alpha) = -6$

$\alpha - \alpha^2 = -6$

$-\alpha^2 + \alpha + 6 = 0$

$\alpha^2 - \alpha - 6 = 0$

$\alpha^2 - 3\alpha + 2\alpha - 6 = 0$

$\alpha(\alpha - 3) + 2(\alpha - 3) = 0$

$(\alpha - 3)(\alpha + 2) = 0$

$\alpha = -2 \; or \; 3$

$\alpha\beta = -6$ కావున

$\alpha = -2$ అయితే $\beta = 3$

$\alpha = 3$ అయితే $\beta = -2$

5. $4x^3 + 16x^2 - 9x - a = 0$ మూలాల లబ్ధం '9' ఐతే 'a' విలువ ఎంత?

Sol:- $4x^3 + 16x^2 - 9x - a = 0$

$(a_0 = 4, a_1 = 16, a_2 = -9, a_3 = -a)$

మూలాల లబ్ధం $S_3 = \frac{-a_3}{a_1} = 9$

$\Rightarrow \frac{-(-a)}{4} = 9$

$\Rightarrow a = 36$

6. $\mathbf{x^4 - 6x^3 + 7x^2 - 2x + 1 = 0}$ **సమీకరణ మూలాలకు వ్యతిరేక గుర్తులు కలిగిన సంఖ్యలు మూలాలుగా గల రూపాంతర సమీకరణం కనుక్కోండి.**

Sol:- $x^4 - 6x^3 + 7x^2 - 2x + 1 = 0$

$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, ..., \alpha_n$ అనేవి $f(x) = 0$ మూలాలైతే, $-\alpha_1, -\alpha_2, -\alpha_3, ..., -\alpha_n$ అనేవి $f(-x) = 0$ యొక్క మూలాలగును.

$x^4 - 6x^3 + 7x^2 - 2x + 1 = 0$

$x = -x$ ప్రతిక్షేపించగా

$(-x)^4 - 6(-x)^3 + 7(-x)^2 - 2(-x) + 1 = 0$

$x^4 + 6x^3 + 7x^2 + 2x + 1 = 0$

7. $\mathbf{x^4 + 3x^3 - 6x^2 + 2x - 4 = 0}$ **మూలాలకు వ్యుత్క్రమాలు మూలాలుగా గల బహుపది సమీకరణం కనుక్కోండి.**

Sol:- $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, ..., \alpha_n$ అనేవి $f(x) = 0$ మూలాలు అయితే $\frac{1}{\alpha_1}, \frac{1}{\alpha_2}, \frac{1}{\alpha_3}, ..., \frac{1}{\alpha_n}$ అనేవి $f\left(\frac{1}{x}\right) = 0$ కు మూలాలగును.

$x^4 + 3x^3 - 6x^2 + 2x - 4 = 0$

$x = \frac{1}{x}$ ప్రతిక్షేపించగా

$\left(\frac{1}{x}\right)^4 + 3\left(\frac{1}{x}\right)^3 - 6\left(\frac{1}{x}\right)^2 + \frac{2}{x} - 4 = 0$

$\Rightarrow \frac{1}{x^4} + \frac{3}{x^3} - \frac{6}{x^2} + \frac{2}{x} - 4 = 0$

$\Rightarrow 1 + 3x - 6x^2 + 2x^3 - 4x^4 = 0$

$\Rightarrow -4x^4 + 2x^3 - 6x^2 + 3x + 1 = 0$

$\Rightarrow 4x^4 - 2x^3 + 6x^2 - 3x - 1 = 0$

8. $\mathbf{x^5 - 2x^4 + 3x^3 - 2x^2 + 4x + 3 = 0}$ **సమీకరణం మూలాలకు 2 రెట్లున్న మూలాలుగా గల బీజీయ సమీకరణాన్ని కనుక్కోండి.**

Sol:- $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, ..., \alpha_n$ అనేవి $f(x) = 0$ మూలాలైతే $k\alpha_1,\ k\alpha_2,\ k\alpha_3, ..., k\alpha_n$ అనేవి $f\left(\frac{x}{k}\right) = 0$ సమీకరణానికి మూలాలగును.

$x^5 - 2x^4 + 3x^3 - 2x^2 + 4x + 3 = 0$

$x = \frac{x}{2}$ ప్రతిక్షేపించగా

$$\Rightarrow \left(\frac{x}{2}\right)^5 - 2\left(\frac{x}{2}\right)^4 + 3\left(\frac{x}{2}\right)^3 - 2\left(\frac{x}{2}\right)^2 + 4\left(\frac{x}{2}\right) + 3 = 0$$

$$\Rightarrow \frac{x^5}{32} - 2\frac{x^4}{16} + 3\frac{x^3}{8} - 2\frac{x^2}{4} + \frac{4x}{2} + 3 = 0$$

$$\Rightarrow \frac{x^5 - 4x^4 + 12x^3 - 16x^2 + 64x + 96}{32} = 0$$

$$\Rightarrow x^5 - 4x^4 + 12x^3 - 16x^2 + 64x + 96 = 0$$

Problems for Practice

(i) క్రింద ఇచ్చిన మూలాలు గల కనిష్ఠ తరగతి బహుపది సమీకరణాలను రూపొందించండి.

(a) 1, -1, 3 Ans: $x^3 - 3x^2 - x + 3 = 0$

(b) $2 \pm \sqrt{3}, 1 \pm 2i$ Ans: $x^4 - 6x^3 + 14x^2 - 22x + 5 = 0$

(c) $0, 1, \frac{-3}{2}, \frac{-5}{2}$ Ans: $4x^4 + 12x^3 - x^2 - 15x = 0$

(ii) $x^3 - 6x^2 + 3x + 10 = 0$ ఒక మూలం 2 అయితే మిగతా మూలాలు కనుక్కోండి.

Ans: $-1, 5$ (Hint : దీని మూలాలు α, β, 2 అనుము.)

(iii) $x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ కు మూలాలు 1, 2, 3, 4 అయితే a, b, c, d విలువలు కనుక్కోండి.

Ans: a = –10, b = 35, c = –50, d = 24

(iv) $x^4 + 5x^3 + 11x + 3 = 0$ సమీకరణ మూలాలకు వ్యతిరేక గుర్తులు కల్గిన సంఖ్యలు మూలాలుగా గల రూపాంతర సమీకరణం కనుక్కోండి.

Ans: $x^4 - 5x^3 + 11x + 3 = 0$

(v) $x^5 + 11x^4 + x^3 + 4x^2 - 13x + 6 = 0$ యొక్క మూలాలకు వ్యుత్క్రమాలు మూలాలుగా గల బహుపది సమీకరణం కనుక్కోండి.

Ans: $6x^5 - 13x^4 + 4x^3 + x^2 + 11x + 1 = 0$

(vi) $x^4 - 3x^3 + 7x^2 + 5x - 2 = 0$ సమీకరణం యొక్క మూలాలకు వ్యుత్క్రమాలు మూలాలుగా గల బహుపది సమీకరణం కనుక్కోండి.

Ans: $2x^4 - 5x^3 - 7x^2 + 3x - 1 = 0$

(vii) $x^3 + 2x^2 - 4x + 1 = 0$ సమీకరణం మూలాలకు 3 రెట్లున్న మూలాలుగా గల బీజీయ సమీకరణాన్ని కనుక్కోండి.

Ans: $x^3 + 6x^2 - 36x + 27 = 0$ (Hint : put $x = \frac{x}{3}$)

(viii) $6x^4 - 7x^3 + 8x^2 - 7x + 2 = 0$ సమీకరణం మూలాలకు 3 రెట్లున్న మూలాలుగా గల నాలుగో తరగతి బీజీయ సమీకరణం కనుక్కోండి.

Ans: $6x^4 - 21x^3 + 72x^2 - 189x + 162 = 0$ (Refer Text Book Page No. 136. Ex.2)

(ix) $x^3 + \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{16}x + \frac{1}{72} = 0$ సమీకరణం మూలాలకు m రెట్లున్న మూలాలు గల మూడో తరగతి సమీకరణాన్ని రూపొందించి, m = 12 సందర్భానికి సమీకరణాన్ని రాబట్టండి.

Ans: $x^3 + 3x^2 - 9x + 24 = 0$ (Refer Text Book Page No. 136. Ex.3)

SHORT ANSWER TYPE QUESTIONS (4 MARKS)

1. $x^3 - 3x^2 - 16x + 48 = 0$ సమీకరణం రెండు మూలాల మొత్తం శూన్యం ఐతే, సమీకరణాన్ని సాధించండి.

Sol:- $\alpha, -\alpha, \beta$ లు $x^3 - 3x^2 - 16x + 48 = 0$ యొక్క మూలాలు అనుకుందాం.

$(a_0 = 1,\ a_1 = -3,\ a_2 = -16,\ a_3 = 48)$

$S_1 = \frac{-a_1}{a_0} \Rightarrow \alpha + (-\alpha) + \beta = \frac{-(-3)}{1} \quad \Rightarrow \beta = 3$

$S_2 = \frac{a_2}{a_0} \Rightarrow \alpha(-\alpha) + (-\alpha)\beta + \beta\alpha = -16$

$\Rightarrow -\alpha^2 - \alpha\beta + \alpha\beta = -16$

$\Rightarrow \alpha^2 = 16$

$\Rightarrow \alpha = 4$

$\therefore$ మూలాలు $\alpha, -\alpha, \beta$ i.e., 4, -4, 3

2. $x^4 + 2x^3 - 5x^2 + 6x + 2 = 0$ సమీకరణానికి $1 + i$ ఒక మూలం ఐతే, సమీకరణాన్ని సాధించండి.

Sol:- 1+i ఒక మూలం (ఇచ్చినవి)

$\Rightarrow 1 - i$ ఇంకొక మూలం అవుతుంది.

$\therefore\ 1 \pm i$ మూలాలుగా గల సమీకరణం

$[x - (1+i)][x - (1-i)] = 0$

$\Rightarrow [(x-1) - i][(x-1) + i] = 0$

$\Rightarrow (x-1)^2 - i^2 = 0$

$\Rightarrow x^2 - 2x + 1 + 1 = 0$

$\Rightarrow x^2 - 2x + 2 = 0$

$\therefore x^2 - 2x + 2$ అనేది $x^4 + 2x^3 - 5x^2 + 6x + 2 = 0$ సమీకరణానికి కారణాంకం అగును.

	1	2	–5	6	2
2	0	2	8	2	0
–2	0	0	–2	–8	–2
	1	4	1	0	0

$\Rightarrow x^2+4x+1=0$

$\Rightarrow x=\frac{-4\pm\sqrt{16-4}}{2}=\frac{-4\pm 2\sqrt{3}}{2}$

$\Rightarrow x=\frac{2(-2\pm\sqrt{3})}{2}$

$\Rightarrow x=(-2\pm\sqrt{3})$

$\therefore$ దత్త సమీకరణానికి మూలాలు $\left\{1\pm i,\ -2\pm\sqrt{3}\right\}$

3. $\mathbf{x^4-6x^3+11x^2-10x+2=0}$ సమీకరణానికి $\mathbf{2+\sqrt{3}}$ ఒక మూలం ఐతే, సమీకరణాన్ని సాధించండి.

Sol:- $2+\sqrt{3}$ దత్త సమీకరణానికి ఒక మూలం (ఇవ్వబడినది)

$\Rightarrow 2-\sqrt{3}$ ఇంకొక మూలం అవుతుంది.

$\therefore\ 2\pm\sqrt{3}$ మూలాలుగా గల సమీకరణం

$\left[x-(2+\sqrt{3})\right]\left[x-(2-\sqrt{3})\right]=0$

$\left[(x-2)-\sqrt{3})\right]\left[(x-2)+\sqrt{3})\right]=0$

$\Rightarrow (x-2)^2-\left(\sqrt{3}\right)^2=0$

$\Rightarrow x^2-4x+4-3=0$

$\Rightarrow x^2-4x+1=0$

$\therefore\ x^2-4x+1=0$ అనేది $x^4-6x^3+11x^2-10x+2=0$ సమీకరణానికి కారణాంకం అగును.

	1	–6	11	–10	2
4	0	4	–8	8	0
–1	0	0	–1	2	–2
	1	–2	2	0	0

$x^2-2x+2=0$

$\Rightarrow x=\frac{2\pm\sqrt{4-8}}{2}=\frac{2\pm 2i}{2}$

$\Rightarrow x=1\pm i$

$\therefore$ దత్త సమీకరణానికి మూలాలు $\left\{2+\sqrt{3},\ 2-\sqrt{3},\ 1+i,\ 1-i\right\}$

4. $\mathbf{-2+\sqrt{-7}}$ అనే సంకీర్ణ సంఖ్య $\mathbf{x^4+2x^2-16x+77=0}$ సమీకరణానికి ఒక మూలం అయితే, ఈ సమీకరణాన్ని పూర్తిగా సాధించండి.

Sol:- $-2+i\sqrt{7}$ అనేది దత్త సమీకరణానికి మూలం (ఇవ్వబడింది)

$\Rightarrow -2-i\sqrt{7}$ ఇంకొక మూలం అవుతుంది.

$\therefore\ -2\pm i\sqrt{7}$ మూలాలుగా గల సమీకరణం

$\left[x-(-2+i\sqrt{7})\right]\left[x-(-2-i\sqrt{7})\right]=0$

$\Rightarrow\left[(x+2)-i\sqrt{7})\right]\left[x+2+i\sqrt{7})\right]=0$

$\Rightarrow (x+2)^2-(i\sqrt{7})^2=0$

$\Rightarrow x^2+4x+4+7=0$

$\Rightarrow x^2+4x+11=0$

$\therefore x^2+4x+11=0$ అనేది $x^4+2x^2-16x+77=0$ సమీకరణానికి కారణాంకం అవుతుంది.

	1	0	2	–16	77
– 4	0	–4	16	–28	0
–11	0	0	–11	44	–77
	1	–4	7	0	0

$\therefore x^2-4x+7=0$

$$x=\frac{4\pm\sqrt{16-28}}{2}=\frac{4\pm i\sqrt{12}}{2}=\frac{2(2\pm i\sqrt{3})}{2}$$

$\therefore x=(2\pm i\sqrt{3})$

$\therefore$ దత్త సమీకరణ మూలాలు $\left\{2+i\sqrt{3},\ 2-i\sqrt{3},\ -2+i\sqrt{7},\ -2-i\sqrt{7}\right\}$

Problems for Practice

(i) $x^4-2x^3+4x^2+6x-21=0$ సమీకరణానికి రెండు మూలాల మొత్తం సున్న అయితే, ఈ సమీకరణం మూలాలు కనుక్కోండి.

Ans: $\sqrt{3},\ -\sqrt{3},\ 1+i\sqrt{6}, 1-i\sqrt{6}$

(ii) $4x^3+20x^2-23x+6=0$ సమీకరణానికి రెండు మూలాలు సమానం అయితే ఆ సమీకరణాన్ని సాధించండి.

Ans:- $\left\{\frac{1}{2},\frac{1}{2},-6\right\}$ (Hint : మూలాలు α,α,β అనుము)

(iii) $9x^3-15x^2+7x-1=0$ సమీకరణానికి రెండు మూలాలు సమానమైతే ఆ సమీకరణాన్ని సాధించండి.

Ans:- $\left\{\frac{1}{3},\frac{1}{3},1\right\}$

LONG ANSWER TYPE QUESTIONS (7 MARKS)

1. $\mathbf{x^3 - 9x^2 + 14x + 24 = 0}$ **సమీకరణానికి రెండు మూలాలు 3:2 నిష్పత్తిలో ఉంటే సమీకరణాన్ని సాధించండి.**

Sol:- $x^3 - 9x^2 + 14x + 24 = 0$

$(a_0 = 1,\ a_1 = -9,\ a_2 = 14, a_3 = 24)$

$3\alpha, 2\alpha, \beta$ దీని మూలాలు అనుము.

$S_1 = \frac{-a_1}{a_0} \Rightarrow 3\alpha + 2\alpha + \beta = -(-9) \Rightarrow 5\alpha + \beta = 9 \ldots\ldots\ldots\ldots(I)$

$S_2 = \frac{a_2}{a_0} \Rightarrow (3\alpha)(2\alpha) + (2\alpha)(\beta) + (\beta)(3\alpha) = 14$

$\Rightarrow 6\alpha^2 + 2\alpha\beta + 3\alpha\beta = 14$

$\Rightarrow 6\alpha^2 + 5\alpha\beta = 14 \ldots\ldots\ldots\ldots(II)$

$\beta = 9 - 5\alpha$ ను II సమీకరణంలో ప్రతిక్షేపించగా

$6\alpha^2 + 5\alpha(9 - 5\alpha) = 14$

$\Rightarrow 6\alpha^2 + 45\alpha - 25\alpha^2 - 14 = 0$

$\Rightarrow 19\alpha^2 - 45\alpha + 14 = 0$

$\Rightarrow 19\alpha^2 - 38\alpha - 7\alpha + 14 = 0$

$\Rightarrow 19\alpha(\alpha - 2) - 7(\alpha - 2) = 0$

$\Rightarrow (19\alpha - 7)(\alpha - 2) = 0$

$\Rightarrow \alpha = \frac{7}{19}, \quad \alpha = 2$

$\alpha = 2$ ను సమీ. (I) లో ప్రతిక్షేపించగా

$5(2) + \beta = 9 \Rightarrow \beta = -1$

$\therefore$ మూలాలు $3\alpha, 2\alpha, \beta$

$\Rightarrow 3(2), 2(2), -1$

$\Rightarrow \{6, 4, -1\}$

2. $\mathbf{8x^3 - 36x^2 - 18x + 81 = 0}$ **సమీకరణ మూలాలు A.P. లో ఉంటే, ఈ సమీకరణాన్ని సాధించండి.**

Sol:- $8x^3 - 36x^2 - 18x + 81 = 0$

$(a_0 = 8,\ a_1 = -36,\ a_2 = -18,\ a_3 = 81)$

A.P. లో ఉండే మూలాలు a-d, a, a+d అనుము.

$$S_1 = \frac{-a_1}{a_0} \Rightarrow (a-d)+(a)+(a+d) = \frac{-(-36)}{8}$$

$$\Rightarrow 3a = \frac{9}{2} \qquad \Rightarrow a = \frac{3}{2}$$

$$S_3 = \frac{-a_3}{a_1} \Rightarrow (a-d)(a)(a+d) = \frac{-81}{8}$$

$$\Rightarrow a(a^2 - d^2) = \frac{-81}{8}$$

$a = \frac{3}{2}$ ప్రతిక్షేపించగా

$$\frac{3}{2}\left[\frac{9}{4} - d^2\right] = \frac{-81}{8}$$

$$\Rightarrow \frac{3}{2}\left[\frac{9-4d^2}{4}\right] = \frac{-81}{8}$$

$$\Rightarrow \frac{3(9-4d^2)}{8} = \frac{-81}{8}$$

$$\Rightarrow (9-4d^2) = -27$$

$$\Rightarrow -4d^2 = -27-9$$

$$\Rightarrow 4d^2 = 36$$

$$\Rightarrow d = \pm 3$$

$a = \frac{3}{2}, \ d = 3$ ప్రతిక్షేపించగా

$\therefore$ మూలాలు a–d, a, a+d

$$\Rightarrow \frac{3}{2} - 3, \ \frac{3}{2}, \ \frac{3}{2} + 3$$

$$\Rightarrow \left\{\frac{-3}{2}, \ \frac{3}{2}, \ \frac{9}{2}\right\}$$

3. **$3x^3 - 26x^2 + 52x - 24 = 0$ సమీకరణ మూలాలు G.P. లో ఉంటే, ఈ సమీకరణాన్ని సాధించండి.**

Sol:- G.P. లో ఉండే మూలాలు *a/r, a, ar* అనుకొనుము.

$$\therefore \left(\frac{a}{r}\right)a(ar) = \frac{24}{3} \Rightarrow a^3 = 8 \Rightarrow a = 2$$

$\frac{a}{r}+a+ar=\frac{26}{3}\Rightarrow 2\left(\frac{1}{r}+1+r\right)=\frac{26}{3}$

$\Rightarrow \frac{1}{r}+1+r=\frac{13}{3}\Rightarrow \frac{1}{r}+r=\frac{10}{3}$

$\Rightarrow r=3$

$\therefore$ మూలాలు 2/3, 2, 6.

4. **$54x^3-39x^2-26x+16=0$ యొక్క మూలాలు G.P. లో ఉంటే ఈ సమీకరణాన్ని సాధించండి.**

Sol:- $54x^3-39x^2-26x+16=0$

$(a_0=54,\ a_1=-39,\ a_2=-26,\ a_3=16)$

G.P. లో ఉండే మూలాలు $\frac{a}{r}$, a, ar అనుకొనుము.

$S_1=\frac{-a_1}{a_0}\Rightarrow \frac{a}{r}+a+ar=\frac{-(-39)}{54}$

$\Rightarrow a\left[\frac{1}{r}+1+r\right]=\frac{13}{18}$.....................$(I)$

$S_3=\frac{-a_3}{a_0}\Rightarrow \left(\frac{a}{r}\right)(a)(ar)=\frac{-16}{54}$

$\Rightarrow a^3=\frac{-8}{27}\Rightarrow a^3=\left(\frac{-2}{3}\right)^3\Rightarrow a=\frac{-2}{3}$

$a=\frac{-2}{3}$ ను సమీకరణం I లో ప్రతిక్షేపించగా

$\frac{-2}{3}\left[\frac{1+r+r^2}{r}\right]=\frac{13}{18}$, అడ్డ గుణకారం చేయగా

$\Rightarrow -12-12r-12r^2-13r=0$

$\Rightarrow 12r^2+25r+12=0$

$\Rightarrow 12r^2+16r+9r+12=0$

$\Rightarrow 4r(3r+4)+3(3r+4)=0$

$\Rightarrow (4r+3)(3r+4)=0$

$\Rightarrow r=\frac{-3}{4}\ or\ r=\frac{-4}{3}$

$a=\frac{-2}{3},\ r=\frac{-3}{4}$ విలువలను $\frac{a}{r}$, a, ar లో ప్రతిక్షేపించగా

$$\Rightarrow \frac{-2}{3}\Big/\frac{-3}{4},\ \frac{-2}{3},\ \left(\frac{-2}{3}\right)\left(\frac{-3}{4}\right)$$

$$\Rightarrow \left\{\frac{8}{9}, \frac{-2}{3}, \frac{1}{2}\right\}$$

5. $\mathbf{x^4+4x^3+2x^2-4x-2=0}$ సమీకరణంలో x యొక్క రెండో అత్యధిక ఘాత గుణకం సున్నా అయ్యే విధంగా ఈ సమీకరణాన్ని పరివర్తన చేయండి.

Sol:- $f(x)=x^4+4x^3+2x^2-4x-2$ అనుము.

x^3 గుణకం సున్న అయ్యేవిధంగా 'h' ను $f(x+h)$ అగునట్లు కనుగొనాలి.

we have $f(x+h)=(x+h)^4+4(x+h)^3+2(x+h)^2-4(x+h)-2$

$f(x+h)$ లో x^3 గుణకం ${}^4C_1(h)+4=4h+4$

'h' ను $4h+4=0 \Rightarrow h=-1$ అగునట్లు

$\therefore$ కావలసిన సమీకరణం $f(x-1)=0$

i.e., $(x-1)^4+4(x-1)^3+2(x-1)^2-4(x-1)-2=0$

–1	1	4	2	–4	–2
	0	–1	–3	1	3
	1	3	–1	–3	1 = A_4
	0	–1	–2	3	
	1	2	–3	0 = A_3	
	0	–1	–1		
	1	1	–4 = A_2		
	0	–1			
	1 = A_0	0 = A_1			

కావలసిన సమీకరణం: $A_0x^4+A_1x^3+A_2x^2+A_3x+A_4=0$

$\therefore x^4-4x^2+1=0$ ఇది రూపాంతర సమీకరణం

6. –2 తో మార్పుచెందిన $\mathbf{x^4-5x^3+7x^2-17x+11=0}$ సమీకరణం మూలాల విలువలు మూలాలుగా గల బీజీయ సమీకరణాన్ని కనుక్కోండి.

Sol:- $f(x)=x^5-5x^3+7x^2-17x+11$ అనుకొనుము.

కావలసిన సమీకరణం $f(x+2)=0$.

2	1	–5	7	–17	11
	0	2	–6	2	–30
2	1	–3	1	–15	$-19 = A_4$
	0	2	–2	–2	
2	1	–1	–1	$-17 = A_3$	
	0	2	2		
2	1	1	$1 = A_2$		
	0	2			
2	1	$3 = A_1$			
	0				
	$1 = A_0$				

హార్నర్ పద్ధతి ప్రకారం $f(x+2) = A_0 x^4 + A_1 x^3 + A_2 x^2 + A_3 x + A_4$

$$\Rightarrow f(x+2) = x^4 + 3x^3 + x^2 - 17x - 19$$

కావలసిన సమీకరణం $x^4 + 3x^3 + x^2 - 17x - 19 = 0$

7. −3 తో మార్పుచెందిన $x^5 - 4x^4 + 3x^2 - 4x + 6 = 0$ సమీరణం మూలాల విలువలు మూలాలుగా గల బీజీయ సమీకరణాన్ని కనుక్కోండి.

Sol:- $f(x) = x^5 - 4x^4 + 3x^2 - 4x + 6 = 0$ అనుకొనుము.

కావలసిన సమీకరణం $f(x+3) = 0$.

3	1	–4	0	3	–4	6
	0	3	–3	–9	–18	–66
3	1	–1	–3	–6	–22	$-60 = A_5$
	0	3	6	9	9	
3	1	2	3	3	$-13 = A_4$	
	0	3	15	54		
3	1	5	18	$57 = A_3$		
	0	3	24			
3	1	8	$42 = A_2$			
	0	3				
3	1	$11 = A_1$				
	0					
	$1 = A_0$					

హార్నర్ పద్ధతి ప్రకారం $f(x+3) = A_0 x^5 + A_1 x^4 + A_2 x^3 + A_3 x^2 + A_4 x + A_5$

$$\Rightarrow f(x+3) = x^5 + 11x^4 + 42x^3 + 57x^2 - 13x - 60$$

$\therefore$ కావలసిన సమీకరణం $x^5 + 11x^4 + 42x^3 + 57x^2 - 13x - 60 = 0$.

8. $\mathbf{x^4 - 10x^3 + 26x^2 - 10x + 1 = 0}$ **సమీకరణాన్ని సాధించండి.**

Ans:- $x^4 - 10x^3 + 26x^2 - 10x + 1 = 0$

$$x^2\left(x^2 - 10x + 26 - \frac{10}{x} + \frac{1}{x^2}\right) = 0$$

$$\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) - 10\left(x + \frac{1}{x}\right) + 26 = 0 \text{ .... } *$$

$x + \frac{1}{x} = k$ ప్రతిక్షేపించగా .... (1)

ఇరువైపుల వర్గం చేయగా, $\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 = k^2$

$$x^2 + \frac{1}{x^2} + 2 = k^2$$

$x^2 + \frac{1}{x^2} = k^2 - 2$ ....(2)

(1) & (2) లను $*$ లో ప్రతిక్షేపించగా $\left(k^2 - 2\right) - 10k + 26 = 0$

$$k^2 - 10k + 24 = 0$$

$$k^2 - 6k - 4k + 24 = 0$$

$$k(k-6) - 4(k-6) = 0$$

$$(k-4)(k-6) = 0$$

$k - 4 = 0$	$k - 6 = 0$
$x + \frac{1}{x} - 4 = 0$	$x + \frac{1}{x} - 6 = 0$
$x^2 + 1 - 4x = 0$	$x^2 + 1 - 6x = 0$
$x^2 - 4x + 1 = 0$	$x^2 - 6x + 1 = 0$
$x = \frac{4 \pm \sqrt{16-4}}{2}$	$x = \frac{6 \pm \sqrt{36-4}}{2}$
$x = \frac{2\left(2 \pm \sqrt{3}\right)}{2}$	$x = \frac{2\left(3 \pm 2\sqrt{2}\right)}{2}$
$x = 2 \pm \sqrt{3}$	$x = 3 \pm 2\sqrt{2}$

సాధనలు $\left\{2 + \sqrt{3},\ 2 - \sqrt{3},\ 3 + 2\sqrt{2},\ 3 - 2\sqrt{2}\right\}$

9. $2x^5 + x^4 - 12x^3 - 12x^2 + x + 2 = 0$ సమీకరణాన్ని సాధించండి.

Sol:- దత్తసమీకరణం ఒకటో కోవకు చెందిన బేసి తరగతి వ్యుత్క్రమ దత్త సమీకరణం,

$\therefore$ ఈ సమీకరణానికి -1 ఒక మూలం.

$\therefore$ $x+1$ అనేది $2x^5 + x^4 - 12x^3 - 12x^2 + x + 2 = 0$ అనే సమీకరణానికి కారణాంకం అగును.

-1	2	1	-12	-12	1	2
	0	-2	1	11	1	-2
	2	-1	-11	-1	2	0

$\therefore 2x^4 - x^3 - 11x^2 - x + 2 = 0$

$x^2\left(2x^2 - x - 11 - \frac{1}{x} + \frac{2}{x^2}\right) = 0$

$\Rightarrow 2\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) - \left(x + \frac{1}{x}\right) - 11 = 0$ .... *

$x + \frac{1}{x} = k$ అనుకొనుము. .... (I)

ఇరువైపుల వర్గం చేయగా

$\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 = k^2$

$x^2 + \frac{1}{x^2} + 2 = k^2$

$x^2 + \frac{1}{x^2} = k^2 - 2$ .... (II)

I & II లను * లో ప్రతిక్షేపించగా

$2(k^2 - 2) - k - 11 = 0$

$2k^2 - 4 - k - 11 = 0$

$2k^2 - k - 15 = 0$

$2k^2 - 6k + 5k - 15 = 0$

$2k(k-3) + 5(k-3) = 0$

$(k-3)(2k+5) = 0$

$k - 3 = 0$ $\quad$ $2k + 5 = 0$

$x + \frac{1}{x} - 3 = 0$ $\quad$ $2\left(x + \frac{1}{x}\right) + 5 = 0$

$x^2 - 3x + 1 = 0$

$x = \frac{3 \pm \sqrt{9-4}}{2}$

$x = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}$

$2x + \frac{2}{x} + 5 = 0$

$2x^2 + 5x + 2 = 0$

$2x^2 + 4x + x + 2 = 0$

$2x(x+2) + 1(x+2) = 0$

$(x+2)(2x+1) = 0$

$x = \frac{-1}{2}, -2$

సాధనలు $\left\{-1, -2, \frac{-1}{2}, \frac{3+\sqrt{5}}{2}, \frac{3-\sqrt{5}}{2}\right\}$

10. $\mathbf{x^5 - 5x^4 + 9x^3 - 9x^2 + 5x - 1 = 0}$ **సమీకరణాన్ని సాధించండి.**

Sol:- దత్త సమీకరణం రెండో కోవకు చెందిన బేసి తరగతి వ్యుత్క్రమ సమీకరణం.

$\Rightarrow$ ఈ సమీకరణానికి ఒక మూలం 1 అగును.

$\therefore x - 1$ అనేది దత్త సమీకరణానికి కారణాంకం అగును.

x=1	1	–5	9	–9	5	–1
	0	1	–4	5	–4	1
	1	–4	5	–4	1	0

$\therefore x^4 - 4x^3 + 5x^2 - 4x + 1 = 0$

$x^2\left(x^2 - 4x + 5 - \frac{4}{x} + \frac{1}{x^2}\right) = 0$

$\Rightarrow \left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) - 4\left(x + \frac{1}{x}\right) = 0$

$x + \frac{1}{x} = k$ అనుకొనుము.

ఇరువైపుల వర్గం చేయగా

$\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 = k^2$

$x^2 + \frac{1}{x^2} + 2 = k^2$

$x^2 + \frac{1}{x^2} = k^2 - 2$

$\therefore (k^2 - 2) - 4k + 5 = 0$

$k^2 - 4k + 3 = 0$

$k^2 - 3k - k + 3 = 0$

$k(k-3) - 1(k-3) = 0$

$(k-3)(k-1) = 0$

$k - 3 = 0$ $\qquad$ $k - 1 = 0$

$x + \frac{1}{x} - 3 = 0$ $\qquad$ $\left(x + \frac{1}{x}\right) - 1 = 0$

$x^2 - 3x + 1 = 0$ $\qquad$ $x^2 - x + 1 = 0$

$x = \frac{3 \pm \sqrt{9-4}}{2}$ $\qquad$ $x = \frac{1 \pm i\sqrt{3}}{2}$

$x = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}$

సాధనలు $\left\{ \frac{1+i\sqrt{3}}{2}, \frac{1-i\sqrt{3}}{2}, \frac{3+\sqrt{5}}{2}, \frac{3-\sqrt{5}}{2} \right\}$

11. $\mathbf{6x^6 - 25x^5 + 31x^4 - 31x^2 + 25x - 6 = 0}$ **సమీకరణాన్ని సాధించండి.**

Sol:- దత్త సమీకరణం రెండో కోవకు, చెందిన సరి తరగతి వ్యుత్క్రమ సమీకరణం

$\therefore +1, -1$ లు దత్త సమీకరణానికి మూలాలు

$\therefore$ $x+1$ మరియు $x-1$ లు దత్త సమీకరణానికి కారణాంకాలు అగును.

x = –1	6	–25	31	0	–31	25	–6
	0	– 6	31	–62	62	–31	6
x = 1	6	–31	62	–62	31	–6	0
	0	6	–25	37	–25	6	
	6	–25	37	–25	6	0	

$\therefore 6x^4 - 25x^3 + 37x^2 - 25x + 6 = 0$

ఇరువైపుల x^2 చే భాగించగా

$6x^2 - 25x + 37 - \frac{25}{x} + \frac{6}{x^2} = 0$

$6\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) - 25\left(x + \frac{1}{x}\right) + 37 = 0$

$\mathrm{x} + \frac{1}{\mathrm{x}} = \mathrm{k}$ అనుము,

ఇరువైపుల వర్గం చేయగా

$\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 = k^2$

$x^2+\frac{1}{x^2}+2=k^2$

$x^2+\frac{1}{x^2}=k^2-2$

$\therefore 6(k^2-2)-25k+37=0$

$6k^2-25k+25=0$

$6k^2-15k-10k+25=0$

$3k(2k-5)-5(2k-5)=0$

$(2k-5)(3k-5)=0$

$2k-5=0$	$3k-5=0$
$2\left(x+\frac{1}{x}\right)-5=0$	$3\left(x+\frac{1}{x}\right)-5=0$
$2x+\frac{2}{x}-5=0$	$3x+\frac{3}{x}-5=0$
$2x^2-5x+2=0$	$3x^2-5x+3=0$
$2x^2-4x-x+2=0$	$x=\frac{5\pm\sqrt{25-36}}{6}$
$2x(x-2)-1(x-2)=0$	$x=\frac{5\pm\sqrt{-11}}{6}$
$(x-2)(2x-1)=0$	$x=\frac{5\pm i\sqrt{11}}{6}$

$x=\frac{1}{2},\ 2$

$\therefore$ సాధనలు $\left\{\pm1,\ \frac{1}{2},\ 2,\ \frac{5\pm i\sqrt{11}}{2}\right\}$

12. $\mathbf{x^4-10x^3+26x^2-10x+1=0}$ **సమీకరణాన్ని సాధించండి.**

Sol:- తరగతి $=4$

దత్త సమీకరణం ఒకటో కొనకు చెందిన సరి తరగతి వ్యుత్క్రమ సమీకరణం

$\therefore$ ఇరువైపుల x^2 చే భాగించగా $\frac{x^4-10x^3+26x^2-10x+1}{x^2}=\frac{0}{x^2}$

$\Rightarrow \frac{x^4}{x^2}-\frac{10x^3}{x^2}+\frac{26x^2}{x^2}-\frac{10x}{x^2}+\frac{1}{x^2}=0$

$\Rightarrow x^2-10x+26-\frac{10}{x}+\frac{1}{x^2}=0$

$\Rightarrow\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)-10\left(x+\frac{1}{x}\right)+26=0$................*

$x+\frac{1}{x}=k$ ప్రతిక్షేపించగా

ఇరువైపుల వర్గం చేయగా

$\left(x+\frac{1}{x}\right)^2=k^2$

$\Rightarrow x^2+\frac{1}{x^2}+2=k^2$

$\Rightarrow x^2+\frac{1}{x^2}=k^2-2$

(1), (2) లను * లో ప్రతిక్షేపించగా

$(k^2-2)-10k+26=0$

$k^2-10k+24=0$

$k^2-6k-4k+24=0$

$k(k-6)-4(k-6)=0$

$(k-4)(k-6)=0$

$k-4=0$

$\Rightarrow x+\frac{1}{x}-4=0$

$\Rightarrow \frac{x^2+1-4x}{x}=0$

$\Rightarrow x^2-4x+1=0$

(a = 1, b = -4, c = 1)

$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

$x=\frac{-(-4)\pm\sqrt{(-4)^2-4(1)(1)}}{2(1)}$

$x=\frac{4\pm\sqrt{12}}{2}$

$x=\frac{4\pm2\sqrt{3}}{2}$

$=\frac{2(2\pm\sqrt{3})}{2}$

$=2\pm\sqrt{3}$

$k-6=0$

$\Rightarrow x+\frac{1}{x}-6=0$

$\Rightarrow \frac{x^2+1-6x}{x}=0$

$\Rightarrow x^2-6x+1=0$

(a = 1, b = -6, c = 1)

$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

$x=\frac{-(-6)\pm\sqrt{(-6)^2-4(1)(1)}}{2(1)}$

$x=\frac{6\pm\sqrt{36-4}}{2}$

$x=\frac{6\pm\sqrt{32}}{2}$

$=\frac{6\pm4\sqrt{2}}{2}$

$=\frac{2\left(3\pm2\sqrt{2}\right)}{2}$

$= 2+\sqrt{3},\ 2-\sqrt{3}$ $\quad\quad = 3 \pm 2\sqrt{2}$

$= 3+2\sqrt{2},\ 3-2\sqrt{2}$

$\therefore$ సాధనలు $\{2+\sqrt{3},\ 2-\sqrt{3},\ 3+2\sqrt{2}, 3-2\sqrt{2}\}$

Problems for Practice

(i) $2x^3+3x^2-8x+3=0$ సమీకరణం యొక్క ఒక మూలం దాని రెండో మూలానికి రెట్టింపు ఐతే, దాని మూలాలు కనుక్కోండి.

Ans:- $\left\{\frac{1}{2}, 1, -3\right\}$ (Hint : దీని మూలాలు α, 2α, β అనుము.)

(ii) $x^3-7x^2+36=0$ సమీకరణం యొక్క ఒక మూలం దాని రెండో మూలానికి రెట్టింపు ఐతే ఈ సమీకరణాన్ని సాధించండి.

Ans:- $\{3, 6, -2\}$

(iii) $x^3-3x^2-6x+8=0$ సమీకరణం మూలాలు A.P. లో ఉంటే ఈ సమీకరణాన్ని సాధించండి.

Ans:- { 4, 1, -2 }

(iv) $4x^3-24x^2+23x+18=0$ సమీకరణం మూలాలు A.P. లో ఉంటే ఈ సమీకరణాన్ని సాధించండి.

Ans:- $\left\{\frac{-1}{2}, 2, \frac{9}{2}\right\}$

(v) $x^3-6x^2+10x-3=0$ సమీకరణంలో x^2 యొక్క రెండో అత్యధిక ఘాత గుణకం సున్న అయ్యేట్లుగా ఈ సమీకరణాన్ని పరివర్తనం చేయండి.

Ans:- $x^3-2x+1=0$

(vi) $x^4+8x^3+x-5=0$ సమీకరణాన్ని 'x' యొక్క మూడో ఘాతం యొక్క పదం సున్న అయ్యేట్లుగా ఈ సమీకరణాన్ని పరివర్తనం చేయండి.

Ans:- $x^4-24x^2+65x-55=0$

(vii) 2 తో మార్పుచెందిన $x^4-x^3-10x^2+4x+24=0$ సమీకరణం మూలాల విలువలు మూలాలుగా గల బీజీయ సమీకరణాన్ని కనుక్కోండి.

Ans:- $x^4-9x^3+40x^2-80x+80=0$

(viii) $6x^4-35x^3+62x^2-35x+6=0$ సమీకరణాన్ని సాధించండి.

Ans:- $\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{2}, 2 \text{ and } 3\right)$

(ix) $4x^3-13x^2-13x+4=0$ సమీకరణాన్ని సాధించండి.

Ans:- $\left\{-1, \frac{1}{4}, 4\right\}$

❖ ❖ ❖ ❖ ❖

యూనిట్ **5**

ప్రస్తారాలు - సంయోగాలు

ప్రస్తారాలు

- **ప్రాథమిక సూత్రం (Fundamental Principle) :** ఒక పనిని 'p' విభిన్న విధాలుగానూ, మరొక పనిని 'q' విభిన్న విధాలుగానూ చేయగలిగితే, ఈ రెండు పనులను ఒకేసారి pq విభిన్న విధాలుగా చేయవచ్చు.
- **ప్రస్తారాలు (Permutations) :** ఇచ్చిన వస్తువులనుంచి (ఒకే విధంగా లేక వేర్వేరు) కొన్ని లేదా అన్ని ఎంచుకొని (selection) ఒక వరుసలో (సరళరేఖలో) అమర్చడాన్నే(arrangement) ఒక 'రేఖీయ ప్రస్తారం' లేదా 'ప్రస్తారం' అంటారు.
- n అసరూప (వేర్వేరు) వస్తువుల నుంచి ఒక్కోసారి r వస్తువులు తీసుకుంటే వచ్చే ప్రస్తారాల సంఖ్యను ${}^{n}p_{r}$ చేత సూచిస్తాము.

$${}^{n}p_{r} = n(n-1)(n-2)\ldots\ldots\ldots(n-r+1) = \frac{n!}{(n-r)!}$$

- (i) 'n' వేర్వేరు అంకెలనుపయోగించి పునరావృతం లేకుండా ఏర్పరచగల 'r' అంకెల $(1 \le r \le n \le 9)$ సంఖ్యల మొత్తం = ${}^{n-1}P_{r-1} \times$ (దత్త అంకెల మొత్తం) × (1111..........1)(r సార్లు)

  (ii) వేర్వేరు పూర్ణాంకాలలో '0' కూడా ఉన్నపుడు ఏర్పరచగల 'r' అంకెల సంఖ్యల మొత్తం

  = ${}^{n-1}P_{r-1} \times$ (దత్త అంకెల మొత్తం) × (1111..............1)(r సార్లు)

  − ${}^{n-2}P_{r-2} \times$ (దత్త అంకెల మొత్తం) × (1111..............1) ((r−1) సార్లు)

సిద్ధాంతం: n, r లు సహజ సంఖ్యలు మరియు $1 \le r \le n$ ఐతే ${}^{n}P_{r} = {}^{n-1}P_{r} + r.{}^{n-1}P_{r-1}$ అవుతుంది.

Proof $${}^{n}P_{r} = \frac{n!}{(n-r)!}$$

$${}^{n-1}P_{r} + r.{}^{n-1}P_{r-1} = \frac{(n-1)!}{(n-r-1)!} + r.\frac{(n-1)!}{[(n-1)-(r-1)]!}$$

$$= \frac{(n-1)!}{(n-r-1)!} + r.\frac{(n-1)!}{(n-r)!}$$

$$= \frac{(n-1)!(n-r)}{(n-r)(n-r-1)!} + \frac{r(n-1)!}{(n-r)!} = \frac{(n-1)!(n-r)}{(n-r)!} + \frac{r.(n-1)!}{(n-r)!}$$

$$= \frac{(n-1)!}{(n-r)!}\left[n-r+r\right] = \frac{(n-1)!.n}{(n-r)!} = \frac{n!}{(n-r)!} = {}^{n}\mathrm{P}_{r}$$

VERY SHORT ANSWER TYPE QUESTIONS (2 MARKS)

1. $^{n}\mathrm{P}_4 = 1680$ అయితే 'n' విలువ కనుక్కోండి.

Sol:- $^{n}\mathrm{P}_4 = 1680$

$= 10 \times 168$

$= 10 \times 8 \times 21$

$= 10 \times 8 \times 7 \times 3$

$= 8 \times 7 \times 6 \times 5$

$\therefore n = 8$

2. $^{n}P_3 = 1320$ అయితే 'n' విలువ కనుక్కోండి.

Sol:- $^{n}\mathrm{P}_3 = 1320$

$= 10 \times 132$

$= 12 \times 11 \times 10$

$\therefore n = 12$

3. $^{n+1}\mathrm{P}_5 : {}^{n}\mathrm{P}_6 = 2:7$ అయితే 'n' విలువ కనుక్కోండి.

Sol:- $^{n+1}\mathrm{P}_5 : {}^{n}\mathrm{P}_6 = 2:7$

$$\frac{(n+1)!}{(n-4)!} : \frac{n!}{(n-6)!} = 2:7$$

$$\frac{(n+1)n!}{(n-4)(n-5)(n-6)!} \times \frac{(n-6)!}{n!} = \frac{2}{7}$$

$$\frac{(n+1)}{(n-4)(n-5)} = \frac{2}{7}$$

$$7(n+1) = 2(n^2 - 9n + 20)$$

$$2n^2 - 25n + 33 = 0$$

$$(n-11)(2n-3) = 0$$

$$\therefore n = 11 \left(\therefore n \neq \frac{3}{2}\right)$$

4. $^{n+1}P_5 : {}^nP_5 = 3:2$ **అయితే 'n' విలువ కనుక్కోండి.**

Sol:- $\frac{(n+1)!}{(n-4)!} \times \frac{(n-5)!}{n!} = \frac{3}{2}$

$\frac{(n+1)n!}{(n-4)(n-5)!} \times \frac{(n-5)!}{n!} = \frac{3}{2}$

$\frac{(n+1)}{(n-4)} = \frac{3}{2}$

$2n+2 = 3n-12$

$-n = -14 \qquad \therefore n = 14$

5. $^{56}P_{(r+6)} : {}^{54}P_{(r+3)} = 30800:1$ **అయితే 'r' విలువ కనుక్కోండి.**

Sol:- $^{56}P_{(r+6)} : {}^{54}P_{(r+3)} = 30800:1$

$\Rightarrow \frac{(56)!}{(56-(r+6))!} \times \frac{(54-(r+3))!}{(54)!} = \frac{30800}{1}$

$\Rightarrow \frac{(56)!}{(50-r)!} \times \frac{(51-r)!}{(54)!} = \frac{30800}{1}$

$\Rightarrow 56 \times 55 \times (51-r) = 30800$

$\Rightarrow (51-r) = \frac{30800}{56 \times 55} = 10$

$\Rightarrow r = 41 \cdot$

Problem for Practice

(i) $^{12}P_5 + 5.{}^{12}P_4 = {}^{13}P_r$, అయితే *'r'* విలువ కనుక్కోండి. Ans:- $r = 5$

SHORT ANSWER TYPE QUESTIONS (4 MARKS)

2. $^nP_7 = 42 \ {}^nP_5$ **అయితే 'n' విలువ కనుక్కోండి.**

Sol:- $\frac{n!}{(n-7)!} = 42 \frac{n!}{(n-5)!}$

$\frac{1}{(n-7)!} = 42 \frac{1}{(n-5)(n-6)(n-7)!}$

$(n-5)(n-6) = 42$

$(n-5)(n-6) = 7 \times 6$

$(n-5)(n-6) = (12-5)(12-6)$

$\therefore n = 12$

2. **PICTURE అనే పదంలోని అక్షరాలన్నింటినీ ఉపయోగించి ఏర్పరచే ప్రస్తారాలలో ఎన్నింటిలో**

(i) అచ్చులన్నీ కలిసి ఉంటాయి?

(ii) ఏ రెండు అచ్చులు పక్క పక్కన లేకుండా ఉంటాయి?

(iii) అచ్చులు, హల్లులు సాపేక్ష స్థానాలు మారకుండా ఉంటాయి?

Sol:- PICTURE పదంలో 3 అచ్చులు (I, U, E), 4 హల్లులు (P, C, T, R) ఉన్నాయి.

(i) 3 అచ్చులను 1 యూనిట్ అనుము. 4 హల్లులు, ఒక అచ్చుల యూనిట్, మొత్తం 5 అగును. ఈ ఐదింటిని అమర్చే విధాల సంఖ్య = 5! ఇపుడు 3 అచ్చులను వాటిలో వాటిని అమర్చే విధానాల సంఖ్య = 3!

మూడు అచ్చులు కలిసి ఉండే ప్రస్తారాల సంఖ్య

$= 5! \times 3! = 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 \times 3 \times 2 \times 1 = 720$

$\underbrace{\boxed{\underset{3!}{IUE}}\ \boxed{P}\ \boxed{C}\ \boxed{T}\ \boxed{R}}_{5!}$ $= 5! \times 3! = 720$

(ii) ముందుగా 4 హల్లులకు ఒకవరుసలో అమర్చే విధానాల సంఖ్య = 4! $\therefore$ హల్లుల మధ్యలో మూడు ఖాళీస్థానాలు, మొదటి, చివర మొత్తం 5 ఖాళీ స్థానాలుంటాయి. (ఖాళీస్థానాలు × తో దిగువ సూచిద్దాం)

$\underset{1}{\times}\ \square\ \underset{2}{\times}\ \square\ \underset{3}{\times}\ \square\ \underset{4}{\times}\ \square\ \underset{5}{\times}$

ఈ 5 ఖాళీ స్థానాల్లో 3 అచ్చులను అమర్చే ప్రస్తారాల సంఖ్య = 5_{P_3}

$\therefore$ ఏ రెండు అచ్చులూ ప్రక్క ప్రక్కన రాకుండా అమర్చే విధానాల సంఖ్య= $4! \times 5_{P_3} = 24 \times 60 = 1440$

(iii) మూడు హల్లులను (c) వాటి సాపేక్ష స్థానాలలో అమర్చే విధానాల సంఖ్య = 3!

అదే విధంగా 4 అచ్చులను (v) వాటి సాపేక్ష స్థానాల్లో అమర్చు విధానాల సంఖ్య = 4!

$\boxed{V}\ \boxed{C}\ \boxed{C}\ \boxed{V}\ \boxed{C}\ \boxed{V}\ \boxed{C}$

కావలసిన ప్రస్తారాల సంఖ్య $= 3!\ 4! = 144$

3. **TRIANGLE పదంలోని అక్షరాలను అచ్చుల స్థానంలో ఎల్లపుడూ అచ్చులు, హల్లులస్థానంలో ఎల్లపుడూ హల్లులు ఉండేలా ఎన్ని విధాలుగా అమర్చవచ్చును?**

Sol:- TRIANGLE పదంలో 3 అచ్చులు (A, E, I) మరియు 5 హల్లులు (T, R, N, G, L) ఉన్నాయి.

$\boxed{C}\ \boxed{C}\ \boxed{V}\ \boxed{V}\ \boxed{C}\ \boxed{C}\ \boxed{C}\ \boxed{V}$

మూడు అచ్చులను వాటి వాటి స్థానాల్లో అమర్చే ప్రస్తారాల సంఖ్య = 3! మిలిగిన 5 స్థానాల్లో హల్లులను అమర్చే విధానాల సంఖ్య = 5!

కావలసిన అమరికల సంఖ్య $= 3! \times 5!$

$= (3 \times 2 \times 1) \times (5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1)$

$= (6)(120) = 720$

4. 1, 2, 4, 5, 6 అంకెలతో ఏర్పరచగలిగే 4 అంకెల సంఖ్యల మొత్తాన్ని కనుక్కోండి. (పునరావృతం కాకుండా).

Sol:- n = 5, r = 4, అంకెలు = 1 , 2, 4, 5, 6

1, 2, 4, 5, 6 అంకెల నుండి రాయగల నాలుగు అంకెల సంఖ్యల మొత్తం (పునరావృతం కాకుండా)

$= {}^{n-1}P_{r-1}$ × (దత్త అంకెల మొత్తం) × 1111.......r సార్లు

$= {}^{4}P_{3} \times (1+2+4+5+6) \times 1111$

$= 24 \times 18 \times 1111 = 4,79,952$

5. ఆరుగురు బాలురు, ఆరుగురు బాలికలను ఒక వరుసలో అమర్చగలిగే విధానాలు ఎన్ని? వాటిలో ఎన్నిటిలో i) బాలికలందరు కలిసివుంటారు ii) ఏ ఇద్దరు బాలికలు పక్కపక్కన రాకుండా ఉంటారు?iii) బాలురు, బాలికలు ఒకరి తరువాత ఒకరుగా ఉంటారు?

Sol:- ఆరుగురు బాలురు, 6 బాలికలు కలిపి మొత్తం 12 మంది ఉన్నారు.

కనుక వీరిని ఒక వరుసలో అమర్చగలిగే విధానాలు 12!.

i) ఆరుగురు బాలికలను ఒక యూనిట్‌గా భావిస్తే అప్పుడు ఆరుగురు బాలురు + ఒక బాలికల యూనిట్ ఉంటాయి. వాటిని ఒక వరుసలో 7! విధాలుగా అమర్చవచ్చు. ఇప్పుడు ఆరుగురు బాలికలను వారిలో వారిని 6! విధాలుగా అమర్చవచ్చు. కనుక ఆరుగురు బాలికలు కలిసివుండేలా అమర్చగలిగే విధానాలు= 7! x 6!.

ii) ముందుగా ఆరుగురు బాలురను ఒక వరుసలో 6! విధాలుగా అమర్చవచ్చు. ఇప్పుడు బాలుర మధ్యలో మొదట, చివర మొత్తం 7 ఖాళీలు ఉంటాయి.

× B × B × B × B × B × B ×

7 ఖాళీలలో ఆరుగురు బాలికలను అమర్చే విధాలు ${}^{7}P_{6}$ కనుక ఏ ఇద్దరు బాలికలు పక్కపక్కన రాకుండా అమర్చే విధాలు $= 6! \times {}^{7}P_{6} = 7.6!.6!$.

iii) ఒక వరుసలో 12 స్థానాలు తీసుకుందాం. ఈ వరుస బాలుడు లేదా బాలికతో మొదలు కావచ్చు. అంటే అవి రెండు విధాలు. ఉదాహరణకు, బాలుడితో వరుస మొదలైంది అనుకుందాం. అప్పుడు బాలురు, బాలికలు ఒకరి తరువాత ఒకరు రావాలంటే బాలురను బేసి సంఖ్య గల స్థానాలలో (అంటే 1,3,5,7,9,11 స్థానాల్లో) బాలికలను సరిసంఖ్య గల స్థానాల్లో (అంటే 2,4,6,8,10,12 స్థానాల్లో) అమర్చాలి.

కనుక ఆరుగురు బాలురను బేసిసంఖ్య గల ఆరు స్థానాలలో అమర్చే విధానాలు= 6!.

ఆరుగురు బాలికలను సరిసంఖ్య గల స్థానాలలో అమర్చే విధానాలు= 6!.

కనుక కావలసిన ప్రస్తారాల సంఖ్య= $2 \times 6! \times 6!$.

6. ఐదుగురు బాలురు, నలుగురు బాలికలను ఒక వరుసలో(i) మొదటిస్థానంలో బాలుడు, చివరి స్థానంలో బాలిక (ii) మొదటి, చివరి స్థానాలలో బాలురు ఉండేలా అమర్చే విధాలు ఎన్ని?

Sol:- (i)

B								G

మొదటి స్థానంలో ఐదుగురు బాలుర నుండి ఏదో ఒక బాలుడిని అమర్చు విధానాల సంఖ్య = 5

చివరి స్థానములో నలుగురు బాలికల నుండి ఏదో ఒక బాలికను అమర్చు విధాల సంఖ్య = 4

మిగిలిన 7 స్థానాలను 7 గురు వ్యక్తులతో (4 బాలురు + 3 బాలికలు) నింపగల విధాల సంఖ్య = 7!

కావలసిన మొత్తం ప్రస్తారాల సంఖ్య $= 5 \times 4 \times 7\,!$

$= 20 \times 5040$

$= 1,00,800$

(ii)

B								B

మొదటి, చివరి స్థానాలలో 2 బాలురను నింపే విధాల సంఖ్య= ${}^{5}P_{2}$ విధాలు

మిగిలిన 7 స్థానాలకు 7 గురు వ్యక్తులతో (3బాలురు + 4 బాలికలు) నింపగల విధాల సంఖ్య = 7! విధాలు

కావలసిన మొత్తం ప్రసారాల సంఖ్య $= 7! \text{ x } {}^{5}P_{2} = 1,00,800$

7. 5 వేర్వేరు గణిత పుస్తకాలు, 4 వేర్వేరు భౌతికశాస్త్ర పుస్తకాలు, 3 విభిన్న రసాయనశాస్త్ర పుస్తకాలను ఒక వరుసలో ఒక శాస్త్రానికి సంబంధించిన పుస్తకాలన్నీ ఒకేచోట కలిసివుండేలా ఎన్ని రకాలుగా అమర్చవచ్చు?

Sol:- 5 విభిన్న గణిత పుస్తకాలు ఒక యూనిట్, 4 విభిన్న భౌతికశాస్త్ర పుస్తకాలు ఒక యూనిట్, 3 విభిన్న రసాయనశాస్త్ర పుస్తకాలను ఒక యూనిట్ అనుకుంటే, 3 యూనిట్లను ఒక వరుసక్రమంలో 3! విధాలుగా అమర్చవచ్చు. ఆ తరువాత ఒక యూనిట్‌లోని 5 విభిన్న గణిత పుస్తకాలను వాటిలో వాటిని 5! విధాలుగా, వేరొక యూనిట్‌లోని 4 విభిన్న భౌతికశాస్త్ర పుస్తకాలను వాటిలో వాటిని 4! విధాలుగా, మరొక యూనిట్‌లో ఉన్న 3 విభిన్న రసాయనశాస్త్ర పుస్తకాలను 3! విధాలుగా అమర్చవచ్చు.

$\therefore$ ఒక వరుసలో ఒక శాస్త్రానికి సంబంధించిన పుస్తకాలన్నీ ఒకేచోట కలిసివుండేలా అమర్చే

విధాల సంఖ్య $= 3! \times 5! \times 4! \times 3!$

$= 6 \times 120 \times 24 \times 6 = 103680\cdot$

Problems for Practice

(i) **"EQUATION"** అనే పదంలోని అక్షరాలను ఉపయోగించి ఎన్ని నాలుగు అక్షరాల పదాలు ఏర్పరచవచ్చు? వీటిలో ఎన్ని పదాలు E తో మొదలవుతాయి? ఎన్ని పదాలకు చివరి అక్షరం N అవుతుంది? ఎన్ని పదాలు E తో మొదలై N తో అంతమవుతాయి?

(Example 5.2.8 Text Book Page Number 159).

(ii) 0,2,4,7,8 అంకెలతో ఏర్పరచగలిగే 4 అంకెల సంఖ్యల మొత్తాన్ని కనుక్కోండి. (పునరావృతం కానట్లుగా)

(Excersie 5(a), Section II. Q. No 4. Text Book Page Number 170).

LONG ANSWER TYPE QUESTIONS (7 MARKS)

1. MASTER పదంలోని అక్షరాలను ప్రస్తారించడం వల్ల వచ్చే పదాలను నిఘంటువు క్రమంలో వ్రాస్తే ఆ వరుసలో (i) REMAST (II) MASTER పదాల కోటిలను కనుక్కోండి.

Sol:- దత్త పదంలోని అక్షరాల నిఘంటువు క్రమంA, E, M, R, S, T

(i) REMAST

A __ __ __ __ __ → 5! పదాలు

E __ __ __ __ __ → 5! పదాలు

M __ __ __ __ __ → 5! పదాలు

R A __ __ __ __ → 4! పదాలు

R E A __ __ __ → 3! పదాలు

R E M A S T → 1! పదాలు

REMAST అనే పదం కోటి

$= 3 \times 5! + 4! + 3! + 1!$

$= 3(120) + 24 + 6 + 1 = 391$

(ii) MASTER

A __ __ __ __ __ → 5! పదాలు

E __ __ __ __ __ → 5! పదాలు

M A E __ __ __ → 3! పదాలు

M A R __ __ __ → 3! పదాలు

M A S E __ __ → 2! పదాలు

M A S R __ __ → 2! పదాలు

M A S T E R → 1! పదాలు

MASTER అనే పదం కోటి

$= 2 \times 5! + 2 \times 3! + 2 \times 2! + 1$

$= 2\,(120) + 2\,(6) + 2\,(2) + 1$

$= 240 + 12 + 4 + 1$

$= 257$

2. PRISON పదంలోని అక్షరాలతో ఏర్పడే 6 అక్షరాల పదాలన్నిటినీ నిఘంటువు క్రమంలో అమరిస్తే (పునరావృతం లేకుండా) ఆ క్రమంలోPRISON పదం కోటిని కనుక్కోండి.

Sol:- I, N, O, P, R, S దత్త పదంలోని అక్షరాల నిఘంటువు క్రమం

I __ __ __ __ __ → 5! పదాలు

N __ __ __ __ __ → 5! పదాలు

O __ __ __ __ __ → 5! పదాలు

P I __ __ __ __ → 4! పదాలు

P N __ __ __ __ → 4! పదాలు

P O __ __ __ __ → 4! పదాలు

P R I N __ __ → 2! పదాలు

P R I O __ __ → 2! పదాలు

P R I S N __ $\rightarrow$ 1! పదాలు

P R I S O N $\rightarrow$ 1! పదాలు

PRISON అనే పదం కోటి

= 3 × 5! + 3 × 4! + 2 × 2! +1! × 2

= 360 + 72 + 4 + 2 = 438

సంయోగాలు

సంయోగం (Combination) : ఇచ్చిన వస్తువుల నుండి కొన్ని లేదా అన్నింటిని ఎంచుకొను(selection) విధానాన్ని సంయోగం అంటారు.

Example: {A, B, C} అనే సమితిలోని మూడు వేర్వేరు మూలకాల నుండి రెండు మూలకాలను తీసికొని ఏర్పరచు సంయోగాలు {A, B}, {A, C}, {B, C}

పరిశీలనలు (Observations) :

➪ 'n' వేర్వేరు వస్తువుల నుండి 'r' వస్తువులను ఎన్నుకొని ఏర్పరచు ప్రస్తారాల సంఖ్యను ${}^nC_r$ లేదా $C(n,r)$ లేదా $C\begin{pmatrix} n \\ r \end{pmatrix}$ లేదా $\begin{pmatrix} n \\ r \end{pmatrix}$ చే సూచిస్తారు.

➪ 'n' విభిన్న వస్తువుల నుండి 'r' వస్తువులను ఎన్నుకొని ఏర్పరచు ప్రస్తారాల సంఖ్య = $\frac{{}^np_r}{r!}$

i.e, ${}^nC_r = \frac{{}^np_r}{r!} = \frac{n!}{(n-r)!\,r!}$

$\therefore\ {}^nC_r = \frac{n!}{(n-r)!\,r!}$

➪ n ఏదేని ధన పూర్ణాంకం, ${}^nC_n = {}^nC_0 = 1,\ {}^nC_1 = n$

➪ $r, s \le n$ ఐతే ${}^nC_r = {}^nC_s \Rightarrow r + s = n$ లేదా $r = s$.

➪ ${}^nC_r = {}^nC_{n-r}$

➪ ${}^nC_{r-1} + {}^nC_r = {}^{n+1}C_r$

VERY SHORT ANSWER TYPE QUESTIONS (2 MARKS)

1. ${}^n\mathbf{C}_4 = {}^n\mathbf{C}_6$ ఐతే 'n' విలువ కనుక్కోండి.

Sol:- ${}^nC_4 = {}^nC_6$

$\Rightarrow n = 4 + 6 \quad \left(\because {}^nC_r = {}^nC_s \Rightarrow n = r + s\right)$

$\Rightarrow n = 10$

2. $10\ {}^{n}C_2 = 3\ .\ {}^{n+1}C_3$ ఐతే 'n' విలువ కనుక్కోండి.

Sol:- $10\dfrac{n!}{(n-2)!2!} = 3.\dfrac{(n+1)!}{(n+1-3)!3!}$

$10\dfrac{n!}{(n-2)!2!} = 3.\dfrac{(n+1)n!}{(n-2)!3!}$

$5 = \dfrac{3.(n+1)}{3\times 2\times 1}$ $\quad 10 = n+1 \quad \therefore n = 9$

3. ${}^{12}C_{r+1} = {}^{12}C_{3r-5}$ ఐతే 'r' విలువ కనుక్కోండి.

Sol:- ${}^{12}C_{r+1} = {}^{12}C_{3r-5}$

If ${}^{n}C_r = {}^{n}C_s$ (or) ${}^{n}C_r = {}^{n}C_s$

$\Rightarrow n = r+s$ $\qquad \Rightarrow r = s$

$12 = r+1+3r-5$ $\qquad r+1 = 3r-5$

$12 = 4r-4$ $\qquad -2r = -6$

$\Rightarrow 4r = 16$ $\qquad r = 3$

$\Rightarrow r = 4$

4. ${}^{n}P_r = 1320,\ {}^{n}C_r = 220$ ఐతే 'n' మరియు 'r' ల విలువలు కనుక్కోండి.

Sol:- $r! = \dfrac{{}^{n}P_r}{{}^{n}C_r} = \dfrac{1320}{220} = 6$

$r! = 3\times 2\times 1 = 3!$

$\therefore r = 3$

${}^{n}P_3 = 1320$

${}^{n}P_3 = 12\times 11\times 10$

$\therefore$ n = 12.

5. ${}^{n}C_5 = {}^{n}C_6$ ఐతే ${}^{13}C_n$ విలువ కనుక్కోండి.

Sol:- ${}^{n}C_5 = {}^{n}C_6$

$\Rightarrow n = 5+6$

$\Rightarrow n = 11$

$\therefore {}^{13}C_n = {}^{13}C_{11} = {}^{13}C_2 = \dfrac{13\times 12}{2\times 1} = 78$

6. ${}^{10}C_5 + 2.\ {}^{10}C_4 + {}^{10}C_3$ విలువ కనుక్కోండి.

Sol:- ${}^{10}C_5 + 2.{}^{10}C_4 + {}^{10}C_3$

$$=\left({}^{10}C_5+{}^{10}C_4\right)+\left({}^{10}C_4+{}^{10}C_3\right)$$

$$={}^{11}C_5+{}^{11}C_4 \quad \left[\because {}^{n}C_{r-1}+{}^{n}C_r={}^{n+1}C_r\right]$$

$$={}^{12}C_5$$

$$=\frac{12\times11\times10\times9\times8}{5\times4\times3\times2\times1}=12\times11\times6=792$$

7. $\mathbf{{}^{n}P_r=5040}$, $\mathbf{{}^{n}C_r=210}$ **ఐతే 'n' మరియు 'r' ల విలువలు కనుక్కోండి.**

Sol:- $r!=\frac{{}^{n}p_r}{{}^{n}C_r}=\frac{5040}{210}=24$ $\qquad {}^{n}P_4=5040$

$r!=4\times3\times2\times1=4!$ $\qquad {}^{n}P_4=10\times9\times8\times7$

$\therefore\ r=4$ $\qquad \therefore n=10$

SHORT ANSWER TYPE QUESTIONS (4 MARKS)

1. $\mathbf{{}^{n}C_{r-1}+{}^{n}C_r={}^{n+1}C_r}$ **అని చూపండి.**

Sol:- $L.H.S.={}^{n}C_{r-1}+{}^{n}C_r$

$$=\frac{n!}{(n-r+1)!(r-1)!}+\frac{n!}{(n-r)!r!}$$

$$=n!\left[\frac{1}{(n-r+1)!(r-1)!}+\frac{1}{(n-r)!r!}\right]$$

$$=n!\left[\frac{r}{(n-r+1)!(r-1)!\,r}+\frac{n-r+1}{(n-r+1)(n-r)!\,r!}\right]$$

$$=n!\left[\frac{r}{(n-r+1)!r!}+\frac{n-r+1}{(n-r+1)!\,r!}\right]$$

$$=n!\left[\frac{r+n-r+1}{(n-r+1)!r!}\right]$$

$$=\frac{n!\,(n+1)}{(n-r+1)!r!}=\frac{(n+1)!}{(n+1-r)!r!}={}^{n+1}C_r$$

2. ఇచ్చిన 9 పుస్తకాలనుంచి నిర్దేశించిన ఒక పుస్తకం లేకుండా 5 పుస్తకాలను ఎన్ని రకాలుగా ఎంచుకోవచ్చు?

Sol:- పుస్తకాల సంఖ్య = 9

ఒక పుస్తకం లేకుండా ఎన్నుకోవాలి, కావున మిగిలిన పుస్తకాల సంఖ్య= 8

కావలసిన సంయోగాల సంఖ్య = $^8C_5$ విధాలు

$$= \frac{8\times7\times6\times5\times4}{5\times4\times3\times2\times1} = 56$$

3. EQUATION పదంలోని అక్షరాలనుంచి 3 అచ్చులు, 2 హల్లులు ఎన్ని రకాలుగా ఎంచుకోవచ్చు?

Sol:- EQUATION అనే పదంలో (E, O, U, A, I) అనే 5 అచ్చులు, (Q, T, N) అను 3 హల్లులు కలవు.

వీటిలో 5 అచ్చుల నుండి 3 అచ్చులు ఎన్నుకొనే విధాల సంఖ్య = $^5C_3$ విధాలు

3 హల్లుల నుండి 2 హల్లులు ఎన్నుకొనే విధాల సంఖ్య = $^3C_2$ విధాలు

మొత్తం ఎన్నుకొనే విధాల సంఖ్య = $^5C_3 \times {}^3C_2$ విధాలు

$$= \frac{5\times4\times3}{3\times2\times1}\times\frac{3\times2}{2\times1} = 30$$

LONG ANSWER TYPE QUESTIONS (7 MARKS)

1. $^{25}C_4 + \sum_{r=0}^{4} {}^{(29-r)}C_3 = {}^{30}C_4$ అని చూపండి.

Sol:- $L.H.S. = {}^{25}C_4 + \sum_{r=0}^{4} {}^{29-r}C_3$

$= {}^{25}C_4 + \left[{}^{29}C_3 + {}^{28}C_3 + {}^{27}C_3 + {}^{26}C_3 + {}^{25}C_3\right]$

$= \left({}^{25}C_4 + {}^{25}C_3\right) + {}^{26}C_3 + {}^{27}C_3 + {}^{28}C_3 + {}^{29}C_3$

$= \left({}^{26}C_4 + {}^{26}C_3\right) + {}^{27}C_3 + {}^{28}C_3 + {}^{29}C_3$

$= \left({}^{27}C_4 + {}^{27}C_3\right) + {}^{28}C_3 + {}^{29}C_3$

$= \left({}^{28}C_4 + {}^{28}C_3\right) + {}^{29}C_3$

$= {}^{29}C_4 + {}^{29}C_3 = {}^{30}C_4 \quad \left[\because {}^nC_{r-1} + {}^nC_r = {}^{n+1}C_r\right]$

2. $^{34}C_5 + \sum_{r=0}^{4} {}^{38-r}C_4$ **ను సూక్ష్మీకరించండి.**

Sol:- $^{34}C_5 + \sum_{r=0}^{4} {}^{38-r}C_4$

$= {}^{34}C_5 + \left[{}^{38}C_4 + {}^{37}C_4 + {}^{36}C_4 + {}^{35}C_4 + {}^{34}C_4\right]$

$= \left({}^{34}C_5 + {}^{34}C_4\right) + {}^{35}C_4 + {}^{36}C_4 + {}^{37}C_4 + {}^{38}C_4$

$= \left({}^{35}C_5 + {}^{35}C_4\right) + {}^{36}C_4 + {}^{37}C_4 + {}^{38}C_4$ $\left[\because {}^{n}C_{r-1} + {}^{n}C_r = {}^{n+1}C_r\right]$

$= \left({}^{36}C_5 + {}^{36}C_4\right) + {}^{37}C_4 + {}^{38}C_4$

$= \left({}^{37}C_5 + {}^{37}C_4\right) + {}^{38}C_4$

$= {}^{38}C_5 + {}^{38}C_4$

$= {}^{39}C_5$

❖ ❖ ❖ ❖ ❖

యూనిట్ **6**

ద్విపద సిద్ధాంతము

⇨ **ధనపూర్ణాంక ఘాతానికి ద్విపద సిద్ధాంతము :**

x, a లు రెండు వాస్తవ సంఖ్యలు అయితే ప్రతి $n \in N$కు

$$(x+a)^n = {}^nC_0 x^n a^0 + {}^nC_1 x^{n-1}.\ a^1 + {}^nC_2 x^{n-2} a^2 + ----- + {}^nC_r\ x^{n-r}\ a^r + ---- + {}^nC_n x^0 a^n$$

⇨ **ద్విపద సిద్ధాంతము నుండి కొన్ని ఫలితాలు**

1. $$(x+a)^n = \sum_{r=0}^{n} {}^nC_r\ x^{n-r}\ a^r \quad ----- *$$

r విలువ 0 నుండి n వరకు మారుతుంది. $(x+a)^n$ విస్తరణలోని పదాల సంఖ్య $= n + 1$.

2. $(*)$ లో 'a' బదులు '-a' వ్రాస్తే

$$(x-a)^n = \sum_{r=0}^{n} (-1)^r.\ {}^nC_r\ x^{n-r}\ a^r$$

$$= {}^nC_0\ x^n\ a^0 - {}^nC_1\ x^{n-1} a^1 + {}^nC_2\ x^{n-2} a^2 ---- + (-1)^n\ {}^nC_n\ x^0\ a^n$$

$(x-a)^n$ విస్తరణలోని పదాలు ఏకాంతరంగా ధనాత్మకము మరియు ఋణాత్మకము.n సరిసంఖ్య అయితే చివరి పదము ధనాత్మకము లేదా n బేసిసంఖ్య అయితే చివరి పదము ఋణాత్మకం.

3. $(*)$లో $x = 1$ మరియు $a = x$ ను ప్రతిక్షేపించగా

$$(1+x)^n = \sum_{r=0}^{n} {}^nC_r\ x^r = \sum_{r=0}^{n} C_r\ \ x^r$$

$$= C_0 + C_1 x + C_2 x^2 + ----- + C_n\ x^n$$

దీనిని ప్రామాణిక ద్విపద విస్తరణ అంటారు.

4. $(1+x)^n$ విస్తరణలో $(r+1)$ వ పదము యొక్క గుణకము ${}^nC_r$ లేదా C_r.

5. **సాధారణ పదము :**

$(x+a)^n$ విస్తరణలో $(r+1)$ వ పదము $n_{C_r} x^{n-r}\, a^r$. దీనిని T_{r+1} తో సూచిస్తారు. దీనిని సాధారణ పదము అంటారు (ఎందుకంటే r కు విభిన్న విలువలు ఇవ్వడం ద్వారా విస్తరణలోని అన్ని పదాలను నిర్ధారించవచ్చును)

$$T_{r+1} = {}^nC_r\ x^{n-r}\ \ a^r$$

6. $(a+b+c)^n$ యొక్క త్రిపద విస్తరణలోని పదాల సంఖ్య $\left(\dfrac{(n+1)(n+2)}{2}\right)$

VERY SHORT ANSWER TYPE QUESTIONS (2 MARKS)

1. **ద్విపద సిద్ధాంతాన్ని ఉపయోగించి $(4x+5y)^7$ ని విస్తరించండి.**

Sol:- $(4x+5y)^7 = \sum_{r=0}^{n} n_{C_r}\ X^{n-r}\ a^r$, ఇక్కడ $X = 4x,\ a = 5y$ మరియు $n = 7$

$$= \sum_{r=0}^{7} {}^7C_r (4x)^{7-r}(5y)^r$$

2. **ద్విపద సిద్ధాంతాన్ని ఉపయోగించి $\left(\frac{2}{3}x+\frac{7}{4}y\right)^5$ ని విస్తరించండి.**

Sol:- $\left(\frac{2x}{3}+\frac{7y}{4}\right)^5 = \sum_{r=0}^{n} {}^nC_r\, X^{n-r}\ a^r$, ఇక్కడ $X = \frac{2x}{3},\ a = \frac{7y}{4}$ మరియు $n = 5$

$$= \sum_{r=0}^{5} {}^5C_r \left(\frac{2x}{3}\right)^{5-r}\left(\frac{7y}{4}\right)^r$$

3. $\left(\frac{2x}{3}+\frac{3y}{2}\right)^9$ **యొక్క విస్తరణలో 6వ పదాన్ని కనుక్కోండి.**

Sol:- $\left(\frac{2x}{3}+\frac{3y}{2}\right)^9$ ని $(x+a)^n$ తో పోల్చగా

$X = \frac{2x}{3},\ a = \frac{3y}{2}$ మరియు $n = 9$

సాధారణ పదము $T_{r+1} = {}^nC_r\, X^{n-r}\ a^r = {}^9C_r\left(\frac{2x}{3}\right)^{9-r}\left(\frac{3y}{2}\right)^r$

$$= {}^9C_r\,.\ 2^{9-2r}\ 3^{2r-9}.\ x^{9-r}\ y^r$$

ఇందులో $r = 5$ ని ప్రతిక్షేపిస్తే $T_6 = {}^9C_5\ 2^{-1}.3^1 x^4 y^5 = \frac{9.8.7.6.5}{1.2.3.4.5}.\frac{1}{2}.3.x^4\ y^5$

$$= 189\,x^4\,y^5$$

4. $\left(\frac{4}{x^3}+\frac{x^2}{2}\right)^{14}$ **యొక్క విస్తరణలో 7వ పదాన్ని కనుక్కోండి.**

Sol:- $\left(\frac{4}{x^3}+\frac{x^2}{2}\right)^{14}$ ని $(X+a)^n$ తో పోల్చగా

$X = \frac{4}{x^3},\ a = \frac{x^2}{2}$ మరియు $n = 14$

సాధారణ పదము $T_{r+1} = {}^nC_r\ X^{n-r}\ a^r = {}^{14}C_r\left(\frac{4}{x^3}\right)^{14-r}\left(\frac{x^2}{2}\right)^r$

$$= {}^{14}C_r\ 2^{28-3r}.\ x^{5r-42}$$

ఇందులో $r = 6$ ని ప్రతిక్షేపిస్తే $T_7 = {}^{14}C_6\ 2^{10}\ x^{-12} = \frac{{}^{14}C_6 \times 2^{10}}{x^{12}}$

5. $\left(x^{\frac{-2}{3}} - \frac{3}{x^2}\right)^8$ **యొక్క విస్తరణలో చివరినుండి 3వ పదాన్ని కనుక్కోండి.**

Sol:- $\left(x^{\frac{-2}{3}} - \frac{3}{x^2}\right)^8$ ని $(X+a)^n$ తో పోల్చగా

$X = x^{\frac{-2}{3}},\ a = \frac{-3}{x^2}$ మరియు $n = 8$

చివరి నుండి 3 వ పదము = మొదటి నుండి $n-k+2 = 8-3+2 = 7$ వ పదము $[\because k = 3]$

ఇప్పుడు, $T_{r+1} = {}^nC_r\, X^{n-r}\, a^r = {}^8C_r \left(x^{\frac{-2}{3}}\right)^{8-r} \left(\frac{-3}{x^2}\right)^r$

ఇందులో $r = 6$ ప్రతిక్షేపిస్తే, $T_7 = {}^8C_6 \left(x^{\frac{-2}{3}}\right)^2 \left(\frac{-3}{x^2}\right)^6 = {}^8C_2\ 3^6\ x^{\frac{-4}{3}-12} = \frac{8.7}{1.2} \times 3^6 . x^{\frac{-40}{3}} = \frac{28 \times 3^6}{x^{40/3}}$

6. $(2x+3y+z)^7$ **యొక్క విస్తరణలోని పదాల సంఖ్యను కనుక్కోండి.**

Sol:- ఇక్కడ $n = 7$

$(2x+3y+z)^7$ యొక్క విస్తరణలోని పదాల సంఖ్య

$= \frac{(n+1)(n+2)}{2} = \frac{(7+1)(7+2)}{2} = \frac{8 \times 9}{2} = 36$

7. $\left(3x - \frac{4}{x}\right)^{10}$ **విస్తరణలో x^{-6} గుణకాన్ని కనుక్కోండి.**

Sol:- $\left(3x - \frac{4}{x}\right)^{10}$

$T_{r+1} = {}^{10}C_r . (3x)^{10-r} . \left(\frac{-4}{x}\right)^r$

$= {}^{10}C_r . (3)^{10-r} . (-4)^r . x^{10-2r}$

$\left(3x - \frac{4}{x}\right)^{10}$ విస్తరణలో $x^{-6} = x^r$ గుణకము

$\Rightarrow 10 - 2r = -6$

$\Rightarrow 2r = 16 \Rightarrow r = 8.$

x^{-6} గుణకము

$= {}^{10}C_8 . 3^{10-8} . (-4)^8$

${}^{10}C_8 . 3^2 . 4^8 = \frac{10.9}{1.2} . 3^2 . 4^8 = 405 \times 4^8$

8. $\left(2x^2 + \frac{3}{x^3}\right)^{13}$ **విస్తరణలో x^{11} గుణకాన్ని కనుక్కోండి.**

Sol:- $\left(2x^2 + \frac{3}{x^3}\right)^{13}$

$$T_{r+1} = {}^{13}C_r \cdot \left(2x^2\right)^{13-r} \cdot \left(\frac{3}{x^3}\right)^r$$

$$T_{r+1} = {}^{13}C_r \cdot (2)^{13-r} \cdot (3)^r \cdot x^{26-5r}$$

$\left(2x^2 + \frac{3}{x^3}\right)^{13}$ విస్తరణలో $x^{11} = x^r$ గుణకము

$\Rightarrow 26 - 5r = 11 \Rightarrow 5r = 15 \Rightarrow r = 3.$

x^{11} గుణకము

$${}^{13}C_3 \; 2^{13-3} \; 3^3 = \frac{13.12.11}{1.2.3} . 2^{10} . 3^3 = 286 \times 2^{10}.3^3$$

9. $\left(\sqrt{\frac{x}{3}} + \frac{3}{2x^2}\right)^{10}$ విస్తరణలో x లేని పదాన్ని కనుక్కోండి.

Sol:- $\left(\sqrt{\frac{x}{3}} + \frac{3}{2x^2}\right)^{10}$

$$T_{r+1} = {}^{10}C_r \cdot \left(\sqrt{\frac{x}{3}}\right)^{10-r} \cdot \left(\frac{3}{2x^2}\right)^r$$

$$T_{r+1} = {}^{10}C_r \cdot \frac{(3)^{\frac{3r}{2}-5}}{2^r} . (x)^{5-\frac{5r}{2}} \qquad \text{------(1)}$$

$\left(\sqrt{\frac{x}{3}} + \frac{3}{2x^2}\right)^{10}$ విస్తరణలో x లేని పదము కనుగొనుటకు

$5 - \frac{5r}{2} = 0$ గా తీసుకోవాలి.

$\Rightarrow 5r = 10 \Rightarrow r = 2.$

(1) నుండి,

$\therefore$ x లేని పదం (స్థిర పదం) = ${}^{10}C_2 . \frac{3^{-2}}{2^2} = \frac{10.9}{1.2} . \frac{1}{3^2.2^2} = \frac{5}{4}.$

10. $\left(\frac{3x}{7} - 2y\right)^{10}$ విస్తరణలో మధ్య పదము(లు) కనుక్కోండి.

Sol:- $\left(\frac{3x}{7} - 2y\right)^{10}$ ని $(x+a)^n$ తో పోల్చగా

$x = \frac{3x}{7}, a = -2y$ మరియు $n = 10$

$n = 10$ సరి సంఖ్య కాబట్టి దత్త విస్తరణలో $T_{\frac{n}{2}+1}$ అంటే T_6 మధ్యపదము.

ఇప్పుడు, $T_{r+1} = {}^nC_r \; x^{n-r} \; a^r = {}^{10}C_r \left(\frac{3x}{7}\right)^{10-r} (-2y)^r$

r = 5 ప్రతిక్షేపిస్తే, $T_6 = {}^{10}C_5\left(\frac{3x}{7}\right)^5 (-2y)^5 = -{}^{10}C_5\left(\frac{3}{7}\right)^5 2^5\ x^5\ y^5$

11. $\left(\mathbf{4a+\frac{3b}{2}}\right)^{\mathbf{11}}$ **విస్తరణలో మధ్య పదము (లు) కనుక్కోండి.**

Sol:- $\left(4a+\frac{3b}{2}\right)^{11}$ ని $(x+A)^n$ తో పోల్చగా

$x = 4a,\ A = \frac{3b}{2}$ మరియు $n = 11$

n = 11 బేసి సంఖ్య కాబట్టి దత్త విస్తరణలో $T_{\frac{n+1}{2}}$ మరియు $T_{\frac{n+3}{2}}$ అంటే T_6 మరియు T_7 లు మధ్య పదాలు

ఇప్పుడు, $T_{r+1} = {}^nC_r\, x^{n-r}\ A^r = {}^{11}C_r\,(4a)^{11-r}\left(\frac{3b}{2}\right)^r$

r = 5 మరియు r = 6 ప్రతిక్షేపిస్తే

$T_6 = {}^{11}C_5\,(4a)^6.\left(\frac{3b}{2}\right)^5$ మరియు $T_7 = {}^{11}C_6(4a)^5\left(\frac{3b}{2}\right)^6$

$T_6 = 77.2^8.3^6.a^6\,b^5$ మరియు $T_7 = 77.2^5.\,3^7.\,a^5\,b^6$

$\left(\because\ {}^{11}C_5 = {}^{11}C_6 = \frac{11.10.9.8.7}{1.2.3.4.5} = 77\times3\times2\right)$

LONG ANSWER TYPE QUESTIONS (7 MARKS)

1. $\mathbf{a = 3,\ b = 5}$ **అయినప్పుడు** $\mathbf{(4a-6b)^{13}}$ **యొక్క విస్తరణలో సంఖ్యాత్మకంగా గరిష్ట మూల్య పదము (లు) కనుక్కోండి.**

Sol:- $(4a-6b)^{13} = \left[4a\left(1-\frac{6b}{4a}\right)\right]^{13} = (4a)^{13}\left(1-\frac{3b}{2a}\right)^{13}$ గా వ్రాయవలెను

మొదట $\left(1-\frac{3b}{2a}\right)^{13}$ విస్తరణలో సంఖ్యాత్మకంగా గరిష్ట మూల్య పదాన్ని కనుక్కోవలెను

$\left(1-\frac{3b}{2a}\right)^{13}$ ని $(1+x)^n$ తో పోల్చగా

$x = \frac{-3b}{2a} = \frac{-3\times5}{2\times3} = \frac{-5}{2}$ మరియు $n = 13$

ఇప్పుడు, $m = \frac{(n+1)|x|}{1+|x|} = \frac{(13+1)\left|\frac{-5}{2}\right|}{1+\left|\frac{-5}{2}\right|} = \frac{14\times\frac{5}{2}}{\frac{7}{2}} = \frac{70}{7} = 10$ ఇది పూర్ణసంఖ్య

$\therefore\ \left(1-\frac{3b}{2a}\right)^{13}$ విస్తరణలో T_m , T_{m+1} అంటే T_{10}, T_{11} లు సంఖ్యాత్మకంగా గరిష్ట మూల్యపదాలు మరియు

$|T_{10}| = |T_{11}|$

$$T_{10} = {}^{13}C_9 . x^9 = {}^{13}C_9 \left(\frac{-5}{2}\right)^9 = \frac{-{}^{13}C_9\, 5^9}{2^9}$$

$$T_{11} = {}^{13}C_{10}\ x^{10} = {}^{13}C_{10} \left(\frac{-5}{2}\right)^{10} = \frac{{}^{13}C_{10}\, 5^{10}}{2^{10}}$$

$(4a - 6b)^{13}$ విస్తరణలో T_{10}, T_{11} లు సంఖ్యాత్మకంగా గరిష్ట మూల్యపదాలు

$$T_{10} = (4\times 3)^{13} \times \frac{-{}^{13}C_9 . 5^9}{2^9} = -{}^{13}C_9 . 2^{17}.3^{13}.5^9 = -143\times 2^{17}.3^{13}.5^{10}$$

$$T_{11} = (4\times 3)^{13} \times \frac{{}^{13}C_{10} . 5^{10}}{2^{10}} = {}^{13}C_{10} . 2^{16}.3^{13}.5^{10} = 143\times 2^{16}.3^{13}.5^{10}$$

2. $\mathbf{x = \frac{11}{8}}$ **అయినప్పుడు $\mathbf{(2+3x)^{10}}$ యొక్క విస్తరణలో సంఖ్యాత్మకంగా గరిష్ట మూల్య పదము(లు) కనుక్కోండి.**

Sol:- $(2+3x)^{10} = \left[2\left(1+\frac{3x}{2}\right)\right]^{10} = 2^{10}\left(1+\frac{3x}{2}\right)^{10}$ గా వ్రాయవలెను

మొదట $\left(1+\frac{3x}{2}\right)^{10}$ విస్తరణలో సంఖ్యాత్మకంగా గరిష్ట మూల్య పదాన్ని కనుక్కోవలెను

$\left(1+\frac{3x}{2}\right)^{10}$ ని $(1+x)^n$ తో పోల్చగా

$x = \frac{3x}{2} = \frac{3}{2}\left(\frac{11}{8}\right) = \frac{33}{16}$ and $n = 10$

ఇప్పుడు, $m = \frac{(n+1)|x|}{1+|x|} = \frac{(10+1)\left|\frac{33}{16}\right|}{1+\left|\frac{33}{16}\right|} = \frac{\frac{363}{16}}{\frac{49}{16}} = \frac{363}{49}$ ఇది పూర్ణ సంఖ్య కాదు

మరియు $[m] = \left[\frac{363}{49}\right] = 7$

$\therefore \left(1+\frac{3x}{2}\right)^{10}$ విస్తరణలో $T_{[m]+1} = T_8$ సంఖ్యాత్మకంగా గరిష్ట మూల్య పదము

మరియు $T_8 = {}^{10}C_7\ x^7 = 10_{C_7}\left(\frac{33}{16}\right)^7$

$(2+3x)^{10}$ విస్తరణలో సంఖ్యాత్మకంగా గరిష్ట మూల్య పదము T_8 మరియు

$$T_8 = 2^{10} . {}^{10}C_7\left(\frac{33}{16}\right)^7 = \frac{{}^{10}C_7 (33)^7}{2^{18}}$$

3. **$\mathbf{x = 8, y = 3}$ అయినప్పుడు $\mathbf{(3x-4y)^{14}}$ యొక్క విస్తరణలో సంఖ్యాత్మకంగా గరిష్ట మూల్య పదము(లు) కనుక్కోండి.**

Sol:- $(3x-4y)^{14} = \left[3x\left(1-\frac{4y}{3x}\right)\right]^{14} = (3x)^{14}\left(1-\frac{4y}{3x}\right)^{14}$ గా వ్రాయవలెను

మొదట $\left(1-\frac{4y}{3x}\right)^{14}$ విస్తరణలో సంఖ్యాత్మకంగా గరిష్ట మూల్య పదాన్ని కనుక్కోవలెను

$\left(1-\frac{4y}{3x}\right)^{14}$ ని $(1+x)^n$ తో పోల్చగా

$x=\frac{-4y}{3x}=\frac{-4\times 3}{3\times 8}=\frac{-1}{2}$ మరియు $n=14$

ఇప్పుడు, $m=\frac{(n+1)|x|}{1+|x|}=\frac{(14+1)\left|\frac{-1}{2}\right|}{1+\left|\frac{-1}{2}\right|}=\frac{\frac{15}{2}}{\frac{3}{2}}=5$ ఇది ఒక పూర్ణ సంఖ్య.

$\therefore\ \left(1-\frac{4y}{3x}\right)^{14}$ విస్తరణలో T_m, T_{m+1} అంటే T_5, T_6 లు సంఖ్యాత్మకంగా గరిష్ట మూల్య పదాలు మరియు

$|T_5|=|T_6|$

$T_5 = {}^{14}C_4\ x^4 = {}^{14}C_4\left(\frac{-1}{2}\right)^4=\frac{{}^{14}C_4}{2^4}$ మరియు $T_6={}^{14}C_5\ x^5 = {}^{14}C_5\left(\frac{-1}{2}\right)^5=\frac{-{}^{14}C_5}{2^5}$

$\therefore\ (3x-4y)^{14}$ విస్తరణలో T_5, T_6 లు సంఖ్యాత్మకంగా గరిష్ట మూల్యపదాలు. అవి

$T_5=\frac{(3x)^{14}.{}^{14}C_4}{2^4}=\frac{(24)^{14}.{}^{14}C_4}{2^4}=1001\times 2^{38}\times 3^{14}$ మరియు

$T_6=\frac{(3x)^{14}(-{}^{14}C_5)}{2^5}=\frac{-(24)^{14}.{}^{14}C_5}{2^5}=-1001\times 2^{37}\times 3^{14}$ $[\because x=8]$

4. **$x=\frac{7}{2}$ అయినప్పుడు $(4+3x)^{15}$ యొక్క విస్తరణలో సంఖ్యాత్మకంగా గరిష్ట మూల్య పదము(లు) కనుక్కోండి.**

Sol:- $(4+3x)^{15}=4^{15}\left(1+\frac{3x}{4}\right)^{15}=(1+X)^n$ ఇక్కడ $n=15,\ X=\frac{3x}{4}=\frac{3}{4}\times\frac{7}{2}=\frac{21}{8}$.

ఇప్పుడు $m=\frac{(n+1)|X|}{|X|+1}=\frac{(15+1)(21/8)}{21/8+1}=\frac{16\times 21}{29}=\frac{336}{29}=11.59.$

$[m]=[11.59]=12.$

$\therefore\ T_{12}$ సంఖ్యాత్మకంగా గరిష్ట మూల్యపదం అవుతుంది.

$T_{12}={}^{15}C_{11}\ (4)^{15-11}(3x)^{11}={}^{15}C_4\,2^8\,21^{11}/2^{11}={}^{15}C_4\ 21^{11}/2^3$ $\left[\because x=\frac{7}{2}\right]$

Problems for Practice

క్రింది విస్తరణలలో సంఖ్యాత్మకంగా గరిష్ట మూల్య పదము(లు) కనుక్కోండి.

(i) $(3x+5y)^{12}$ ఇక్కడ $x=\frac{1}{2},\ y=\frac{4}{3}$ Ans:- $T_{11}=12_{C_{10}}\left(\frac{3}{2}\right)^2\left(\frac{20}{3}\right)^{10}$

(ii) $(3+7x)^n$ ఇక్కడ $x=\frac{4}{5},\ n=15$ Ans:- $T_{11}=15_{C_{11}}\left(\frac{28}{5}\right)^{11}3^4$

❖ ❖ ❖ ❖ ❖

యూనిట్ **7**

పాక్షిక భిన్నాలు

➪ **అకరణీయ భిన్నం (Rational Fraction) :** $f(x)$, $g(x)$ లు రెండు బహుపదులు. $g(x)$ ఒక శూన్యేతర బహుపది అనగా $(g(x) \neq 0)$ అయితే $\frac{f(x)}{g(x)}$ ను అకరణీయ భిన్నం అంటాం.

➪ **క్రమ భిన్నం (Proper Fraction) :** $f(x)$ తరగతి $g(x)$ తరగతి కంటే తక్కువయితే $\frac{f(x)}{g(x)}$ ను 'క్రమ భిన్నం'అంటారు.

➪ **అపక్రమ భిన్నం (Improper Fractions) :** $f(x)$ తరగతి $g(x)$ తరగతి కంటే ఎక్కువయితే $\frac{f(x)}{g(x)}$ ను 'అపక్రమభిన్నం' అంటారు.

➪ **Rule (1) :** $g(x)$ కు పునరావృతం కాని ఏక ఘాత కారణాంకాలున్నపుడు అనగా $g(x)$ లో $(ax+b)$ రూపంలో ఉండే ప్రతి కారణాంకానికి సంబంధించి $\frac{A}{ax+b}$ అనే పాక్షిక భిన్నం ఉంటుంది. (ఇక్కడ'A' ఒక శూన్యేతర వాస్తవ సంఖ్య).

➪ **Rule (2) :** $g(x)$ కు పునరావృతం అయ్యే ఏకఘాత కారణాంకాలున్నప్పుడు, $g(x)$ కు $(ax+b)^n$, $a \neq 0$, రూపంలో ఉండే ప్రతి పునరావృత కారణాంకానికి సంబంధించి
$\frac{A_1}{ax+b} + \frac{A_2}{(ax+b)^2} + \dots\dots\dots + \frac{A_n}{(ax+b)^n}$ అనే 'n' పాక్షిక భిన్నాలుంటాయి. ఇక్కడ $A_1, A_2, \dots\dots A_n$ లు శూన్యేతర వాస్తవ సంఖ్యలు.

➪ **Rule (3) :** $g(x)$ కు $\left(ax^2+bx+c\right)$ రూపంలో పునరావృతం కాని అవిభాజ్య కారణాంకం ఉన్నప్పుడు $g(x)$ కు $\left(ax^2+bx+c\right)$ రూపంలో ఉన్న ప్రతి కారణాంకానికి సంబంధించి $\frac{Ax+B}{ax^2+bx+c}$ (A, B లు నిర్ధారించవలసిన వాస్తవ స్థిరాంకాలు) రూపంలో ఒక పాక్షిక భిన్నం ఉంటుంది.

➪ **Rule (4) :** $g(x)$ కు $\left(ax^2+bx+c\right)$ రూపంలో వున్న పునరావృతం అయ్యే అవిభాజ్య కారణాంకాలున్నపుడు, $g(x)$ కు $\left(ax^2+bx+c\right)^n$ రూపంలో వున్న ప్రతి కారణాంకానికి సంబంధించి 'n' పాక్షిక భిన్నాలు క్రింది విధంగా ఉంటాయి:

$$\frac{A_1x+B_1}{ax^2+bx+c} + \frac{A_2x+B_2}{\left(ax^2+bx+c\right)^2} + \dots\dots\dots + \frac{A_nx+B_n}{\left(ax^2+bx+c\right)^n} \quad n \in N$$

ఇక్కడ $A_1, A_2, \dots\dots A_n$, $B_1, B_2, \dots\dots B_n$ లు నిర్ధారించవలసిన వాస్తవ సంఖ్యలు.

➪ $\frac{f(x)}{g(x)}$ ఒక అపక్రమ భిన్నమైతే $\frac{f(x)}{g(x)} = q(x) + \frac{R(x)}{g(x)}$ అని వ్రాయవచ్చు. ఇచ్చట $q(x)$ అనేది $f(x)$ ను $g(x)$ చే భాగించగా వచ్చే భాగఫలం, $R(x)$ శేషం, $R(x)$ తరగతి $g(x)$ తరగతి కన్నా తక్కువ, $\frac{R(x)}{g(x)}$ ను పాక్షిక భిన్నాల మొత్తంగా వ్రాయటానికి పై పద్ధతులను ఉపయోగిస్తారు.

SHORT ANSWER QUESTIONS (4 MARKS)

1. $\frac{5x+1}{(x+2)(x-1)}$ ను పాక్షిక భిన్నాలుగా విడగొట్టండి.

Sol:- $\frac{5x+1}{(x+2)(x-1)} = \frac{A}{x+2} + \frac{B}{x-1}$ అనుకొనుము.

ఇక్కడ A, B శూన్యేతర వాస్తవసంఖ్యలను కనుక్కొందాం.

$$\frac{5x+1}{(x+2)(x-1)} = \frac{A(x-1)+B(x+2)}{(x+2)(x-1)}$$

$\therefore\ A(x-1)+B(x+2) = 5x+1$ .... (1)

సమీకరణం (1) లో $x = 1$ ను ప్రతిక్షేపించగా

3B = 5+1, i.e. B = 2

సమీకరణం (1) లో $x = -2$ ను ప్రతిక్షేపించగా

–3A = –9, i.e. A = 3

$$\therefore\ \frac{5x+1}{(x+2)(x-1)} = \frac{3}{x+2} + \frac{2}{x-1}$$

2. $\frac{2x+3}{(x+1)(x-3)}$ ను పాక్షిక భిన్నాలుగా విడగొట్టండి.

Sol:- $\frac{2x+3}{(x+1)(x-3)} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x-3}$ అనుకొనుము.

$$\Rightarrow A = \frac{2(-1)+3}{-1-3} = -\frac{1}{4},\ B = \frac{2(3)+3}{3+1} = \frac{9}{4}$$

$$\Rightarrow \frac{2x+3}{(x+1)(x-3)} = \frac{-1}{4(x+1)} + \frac{9}{4(x-3)}$$

3. $\mathbf{\dfrac{x^2+5x+7}{(x-3)^3}}$ **ను పాక్షిక భిన్నాలుగా విడగొట్టండి.**

Sol:- $\dfrac{x^2+5x+7}{(x-3)^3}=\dfrac{A}{x-3}+\dfrac{B}{(x-3)^2}+\dfrac{C}{(x-3)^3}$ అనుకొనుము

ఇక్కడ A, B, C శూన్యేతర వాస్తవసంఖ్యలను కనుక్కొందాం.

$\therefore\ \dfrac{x^2+5x+7}{(x-3)^3}=\dfrac{A(x-3)^2+B(x-3)+C}{(x-3)^3}$

$\therefore\ x^2+5x+7=Ax^2+(B-6A)x+(9A-3B+C)$ ...... (1)

ఇరువైపులా x గుణకాలను పోల్చగా

A = 1, B – 6A = 5, 9A – 3B + C = 7

పై సమీకరణాలను సాధించగా A = 1, B = 11, C = 31.

$\therefore\ \dfrac{x^2+5x+7}{(x-3)^3}=\dfrac{1}{(x-3)}+\dfrac{11}{(x-3)^2}+\dfrac{31}{(x-3)^3}$

4. $\mathbf{\dfrac{x^2+13x+15}{(2x+3)(x+3)^2}}$ **ను పాక్షిక భిన్నాలుగా విడగొట్టండి.**

Sol:- $\dfrac{x^2+13x+15}{(2x+3)(x+3)^2}=\dfrac{A}{2x+3}+\dfrac{B}{x+3}+\dfrac{C}{(x+3)^2}$

ఇక్కడ A, B, C శూన్యేతర వాస్తవసంఖ్యలను కనుక్కొందాం.

$\therefore\ A(x+3)^2+B(2x+3)(x+3)+C(2x+3)=x^2+13x+15$ ...... (1)

(1) లో $x=-3$ ను ప్రతిక్షేపించగా –3C = –15 లేదా C = 5

(1) లో $x=\dfrac{-3}{2}$ ను ప్రతిక్షేపించగా $\dfrac{9A}{4}=\dfrac{-9}{4}$ లేదా A = –1.

ఇరువైపులా గుణకాలను పోల్చగా

A + 2B = 1

i.e. –1 +2B = 1 ($\because$ A = –1)

B = 1

$\therefore \dfrac{x^2+13x+15}{(2x+3)(x+3)^2}=\dfrac{-1}{2x+3}+\dfrac{1}{x+3}+\dfrac{5}{(x+3)^2}$

5. $\dfrac{x+4}{(x^2-4)(x+1)}$ **ను పాక్షిక భిన్నాలుగా విడగొట్టండి.**

Sol:- $\dfrac{x+4}{(x^2-4)(x+1)} = \dfrac{x+4}{(x-2)(x+2)(x+1)} = \dfrac{A}{x+1} + \dfrac{B}{x+2} + \dfrac{C}{x-2}$

$x + 4 = A(x + 2)(x - 2) + B(x + 1)(x - 2) + c(x + 1)(x + 2)$ ....(1)

(1) లో $x = -1$ ను ప్రతిక్షేపించగా

$-1+4 = A(1-4)+0+0 \Rightarrow -3A = 3 \Rightarrow A = -1$

(1) లో $x = -2$ ను ప్రతిక్షేపించగా

$2 = B(-2+1)(-2-2) \Rightarrow 4B = 2 \Rightarrow B = \dfrac{2}{4} = \dfrac{1}{2}$

(1) లో $x = 2$ ను ప్రతిక్షేపించగా

$6 = C(2+1)(2+2) \Rightarrow 12C = 6 \Rightarrow C = \dfrac{6}{12} = \dfrac{1}{2}$

$A = -1, B = \dfrac{1}{2}, C = \dfrac{1}{2}$

$\therefore \dfrac{x+4}{(x^2-4)(x+1)} = \dfrac{-1}{x+1} + \dfrac{1}{2(x+2)} + \dfrac{1}{2(x-2)}$

6. $\dfrac{\mathbf{x^2 - 3}}{\mathbf{(x+2)(x^2+1)}}$ **ను పాక్షిక భిన్నాలుగా విడగొట్టండి.**

Sol:- $\dfrac{x^2-3}{(x+2)(x^2+1)} = \dfrac{A}{x+2} + \dfrac{Bx+C}{x^2+1}$ అనుకొనుము.

$x^2 - 3 = A(x^2+1) + (Bx+C)(x+2)$

$x = -2 \Rightarrow 4-3 = A(4+1)+0 \Rightarrow 5A = 1 \Rightarrow A = \dfrac{1}{5}$

ఇరువైపులా x^2 గుణకాలను పోల్చగా

$1 = A + B \Rightarrow B = 1 - A = 1 - \dfrac{1}{5} = \dfrac{4}{5}$

స్థిరాంకాలను పోల్చగా

$-3 = A + 2C \Rightarrow 2C = -3 - A = -3 - \dfrac{1}{5} = \dfrac{-16}{5} \Rightarrow 2C = \dfrac{-16}{5}$

$\Rightarrow C = \dfrac{-16}{5x2} = \dfrac{-8}{5}$

$\therefore \dfrac{x^2-3}{(x+2)(x^2+1)} = \dfrac{1}{5(x+2)} + \dfrac{4x-8}{5(x^2+1)}$

7. $\dfrac{\mathbf{2x^2+1}}{\mathbf{x^3-1}}$ **ను పాక్షిక భిన్నాలుగా విడగొట్టండి.**

Sol:- $\dfrac{2x^2+1}{x^3-1}=\dfrac{2x^2+1}{(x-1)(x^2+x+1)}=\dfrac{A}{x-1}+\dfrac{Bx+C}{x^2+x+1}$

$2x^2+1=A(x^2+x+1)+(Bx+C)(x-1)$

$=Ax^2+Ax+A)+Bx^2-Bx+Cx-C$

$2x^2+1=(A+B)x^2+(A-B+C)x+(A-C)$

x^2 గుణకాలను పోల్చగా $A+B=2$ ....(1)

x గుణకాలను పోల్చగా $A-B+C=0$ ....(2)

$A-C=1$ ....(3)

$(1)+(2)$

$A+B=2$
$A-B+C=0$

$2A+C=2$ ....(4)
$A-C=1$

$3A=3\Rightarrow A=1$

$(1)\Rightarrow 1+B=2\Rightarrow B=2-1=1$

$(3)\Rightarrow 1-C=1\Rightarrow -C=1-1=0\Rightarrow C=0$

$\therefore A=1,\ B=1,\ C=0$

$\therefore \dfrac{2x^2+1}{x^3-1}=\dfrac{1}{x-1}+\dfrac{x}{x^2+x+1}$

8. $\dfrac{\mathbf{3x^3-2x^2-1}}{\mathbf{x^4+x^2+1}}$ **ను పాక్షిక భిన్నాలుగా విడగొట్టండి.**

Sol:- $x^4+x^2+1=(x^2+1)^2-x^2=(x^2+x+1)(x^2-x+1)$

$\therefore \dfrac{3x^3-2x^2-1}{x^4+x^2+1}=\dfrac{Ax+B}{x^2+x+1}+\dfrac{Cx+D}{x^2-x+1}$ అనుకొనుము.

$3x^3-2x^2-1=(Ax+B)(x^2-x+1)+(Cx+D)(x^2+x+1)$

x^3, x^2, x గుణకాలను, స్థిర పదాలను పోల్చగా

$A+C=3$ ....(2)

$-A+B+C+D=-2$ ....(3)

$A-B+C+D=0$ ....(4)

$B + D = -1$ ....(5)

$(2) \Rightarrow C = 3 - A$ ....(6)

$(5) \Rightarrow D = -1 - B$ ....(7)

ఈ విలువలను సమీకరణం (3) లో ప్రతిక్షేపించగా

$-A + B + 3 - A - 1 - B = -2 \Rightarrow -2A = -4 \Rightarrow A = \frac{-4}{-2} = 2 \qquad \therefore A = 2$

ఈ విలువలను సమీకరణం (4) లో ప్రతిక్షేపించగా

$A - B + 3 - A - 1 - B = 0$

$-2B = -2 \Rightarrow B = \frac{-2}{-2} = 1 \qquad \therefore B = 1$

$(6) \Rightarrow C = 3 - 2 = 1 \qquad \therefore C = 1$

$(7) \Rightarrow D = -1 - 1 = -2 \qquad \therefore D = -2$

$$\therefore \frac{3x^3 - 2x^2 - 1}{x^4 + x^2 + 1} = \frac{2x + 1}{x^2 + x + 1} + \frac{x - 2}{x^2 - x + 1}$$

9. $\mathbf{\frac{x^4}{(x-1)(x-2)}}$ **ను పాక్షిక భిన్నాలుగా విడగొట్టండి.**

Sol:- $\frac{x^4}{(x-1)(x-2)} = \frac{x^4}{(x^2 - 3x + 2)}$

$= x^2 + 3x + 7 + \frac{15x - 14}{x^2 - 3x + 2}$ ....(1)

$= \frac{15x - 14}{x^2 - 3x + 2} = \frac{15x - 14}{(x-1)(x-2)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x-2}$

$15x - 14 = A(x-2) + B(x-1)$

$x = 1 \Rightarrow 15 - 14 = A(1-2) + B(1-1)$

$1 = A(-1) + B(0)$

$1 = -A \Rightarrow A = -1$

$x = 2 \Rightarrow 30 - 14 = A(2-2) + B(2-1)$

$16 = A(0) + B(1)$

$16 = B$

$\therefore A = -1,\ B = 16$

$\therefore$ (1) నుండి $\dfrac{x^3}{(x-1)(x-2)} = x^2 + 3x + 7 - \dfrac{1}{x-1} + \dfrac{16}{x-2}$

10. $\dfrac{\mathbf{x^3}}{\mathbf{(x-a)(x-b)(x-c)}}$ **ను పాక్షిక భిన్నాలుగా విడగొట్టండి.**

Sol:- $\dfrac{x3}{(x-a)(x-b)(x-c)} = 1 + \dfrac{A}{x-a} + \dfrac{B}{x-b} + \dfrac{C}{x-c}$

$$x^3 = (x-a)(x-b)(x-c) + A(x-b)(x-c) + B(x-a)(x-c) + C(x-a)(x-b)$$

$$x = a \Rightarrow a^3 = 0 + A(a-b)(a-c) + 0 + 0 \Rightarrow A = \frac{a^3}{(a-b)(a-c)}$$

$$x = b \Rightarrow b^3 = 0 + 0 + B(b-a)(b-c) + 0 \Rightarrow B = \frac{b^3}{(b-a)(b-c)}$$

$$x = c \Rightarrow c^3 = 0 + 0 + 0 + C(c-a)(c-b) \Rightarrow C = \frac{c^3}{(c-a)(c-b)}$$

$$\therefore \frac{x^3}{(x-a)(x-b)(x-c)} = 1 + \frac{a^3}{(a-b)(a-c)(x-a)} + \frac{b^3}{(b-a)(b-c)(x-b)} + \frac{c^3}{(c-a)(c-b)(x-c)}$$

Problem for Practice

(i) $\dfrac{5x+6}{(2+x)(1-x)}$ ను పాక్షిక భిన్నాలుగా విడగొట్టండి.

Ans: $\dfrac{5x+6}{(2+x)(1-x)} = \dfrac{-4}{3(2+x)} + \dfrac{11}{3(1-x)}$

(ii) $\dfrac{2x+3}{(x-1)^3}$ ను పాక్షిక భిన్నాలుగా విడగొట్టండి.

Ans: $\dfrac{2x+3}{(x-1)^3} = \dfrac{2}{(x-1)^2} + \dfrac{5}{(x-1)^3}$

(iii) $\dfrac{x^2-2x+6}{(x-2)^3}$ ను పాక్షిక భిన్నాలుగా విడగొట్టండి.

Ans: $\dfrac{x^2-2x+6}{(x-2)^3} = \dfrac{1}{(x-2)} + \dfrac{2}{(x-2)^3}$

(iv) $\dfrac{1}{(x-1)^2(x-2)}$ ను పాక్షిక భిన్నాలుగా విడగొట్టండి.

Ans: Example 3, Page No. 270 from Text Book.

(v) $\dfrac{9}{(x-1)(x+2)^2}$ ను పాక్షిక భిన్నాలుగా విడగొట్టండి.

Ans: $\dfrac{9}{(x-1)(x+2)^2}=\dfrac{1}{x-1}-\dfrac{1}{x+2}-\dfrac{3}{(x+2)^2}$

(vi) $\dfrac{2x^2+3x+4}{(x-1)(x^2+2)}$ ను పాక్షిక భిన్నాలుగా విడగొట్టండి.

Ans: $\dfrac{2x^2+3x+4}{(x-1)(x^2+2)}=\dfrac{3}{x-1}+\dfrac{2-x}{x^2+2}$

(vii) $\dfrac{x^2}{(x-1)(x-2)}$ ను పాక్షిక భిన్నాలుగా విడగొట్టండి.

Ans: $\dfrac{x^2}{(x-1)(x-2)}=1-\dfrac{1}{x-1}+\dfrac{4}{x-2}$

❖ ❖ ❖ ❖ ❖

యూనిట్ **8**

విస్తరణ కొలతలు

➪ **అవర్గీకృత దత్తాంశానికి మధ్యమ విచలనం :**

(i) మధ్యమం నుండి మధ్యమ విచలనం $= \frac{1}{n}\left(\sum x_i - \bar{x}\right)$

($n \rightarrow$ విలువల సంఖ్య, $\bar{x} \rightarrow$ అంకమధ్యమం, $x_i \rightarrow$ దత్తాంశములోని విలువలు)

(ii) మధ్యగతం నుండి మధ్యమ విచలనం $= \frac{1}{n}\sum |x_i - \text{med}|$

($n \rightarrow$ విలువల సంఖ్య, med. $\rightarrow$ మధ్యగతం, $x_i \rightarrow$ దత్తాంశములోని విలువలు)

VERY SHORT ANSWER TYPE QUESTIONS (2 MARKS)

1. అవర్గీకృత దత్తాంశం: 6, 7, 10, 12, 13, 4, 12, 16 నకు మధ్యమం నుండి మధ్యమ విచలనాన్ని కనుక్కోండి.

Sol:- దత్తాంశానికి అంకమధ్యమం

$$\bar{x} = \frac{6+7+10+12+13+4+12+16}{8} = 10$$

విచలన పరమ మూల్యాలు

$|x_i - \bar{x}| = 4, 3, 0, 2, 3, 6, 2, 6$

మధ్యమం నుండి మధ్యమ విచలనం

$$= \frac{\sum_{i=1}^{8}|x_i - \bar{x}|}{8} = \frac{4+3+0+2+3+6+2+6}{8} = \frac{26}{8} = 3.25$$

2. అవర్గీకృత దత్తాంశం: 6, 7, 10, 12, 13, 4, 12, 16 నకు మధ్యగతం నుండి మధ్యమ విచలనాన్ని కనుక్కోండి.

Sol:- దత్తాంశాన్ని ఆరోహణక్రమంలో వ్యక్తపరిస్తే

4, 6, 7, 10, 12, 12, 13, 16

ఈ 8 పరిశీలనల మధ్యగతం

$$b = \frac{10+12}{2} = 11$$

$|x_i - b|$ పరమ మూల్య విలువలు 7, 5, 4, 1, 1, 1, 2, 5

మధ్యగతం నుండి మధ్యమ విచలనం

$$= \frac{\sum_{i=1}^{8}|x_i - b|}{8} = \frac{26}{8} = 3.25.$$

3. అవర్గీకృత దత్తాంశం : 3, 6, 10, 4, 9, 10 నకు మధ్యమం నుండి మధ్యమ విచలనాన్ని కనుక్కోండి.

Sol:- దత్తాంశానికి అంకమధ్యమం

$$\bar{x} = \frac{3+6+10+4+9+10}{6} = \frac{42}{6} = 7$$

పరమ మూల్య విలువలు 4, 1, 3, 3, 2, 3

మధ్యమం నుండి మధ్యమ విచలనం

$$= \frac{\sum_{i=1}^{6}|x_i - \bar{x}|}{6} = \frac{4+1+3+3+2+3}{6} = \frac{16}{6} = 2.67$$

4. అవర్గీకృత దత్తాంశం : 4, 6, 9, 3, 10, 13, 2 నకు మధ్యగతం నుండి మధ్యమ విచలనాన్ని కనుక్కోండి.

Sol:- దత్తాంశాన్ని ఆరోహణక్రమంలో వ్యక్తపరిస్తే : 2, 3, 4, 6, 9, 10, 13

ఈ 7 పరిశీలనల మధ్యగతం

$M = \frac{7+1}{2}$ వ పదము $= 6$

పరమ మూల్య విలువలు 4, 3, 2, 0, 3, 4, 7.

మధ్యగతం నుండి మధ్యమ విచలనం

$$M.D. = \frac{\sum_{i=1}^{7}|x_i - M|}{7} = \frac{4+3+2+0+3+4+7}{7} = \frac{23}{7} = 3.29$$

Problems for Practice

(i) అవర్గీకృత దత్తాంశం : 38, 70, 48, 40, 42, 55, 63, 46, 54, 44 నకు మధ్యమం నుండి మధ్యమ విచలనాన్ని కనుక్కోండి.

(ii) అవర్గీకృత దత్తాంశం : 13, 17, 16, 11, 13, 10, 16, 11, 18, 12, 17 నకు మధ్యగతం నుండి మధ్యమ విచలనాన్ని కనుక్కోండి.

❖ ❖ ❖ ❖ ❖

యూనిట్ **9**

సంభావ్యత

సంభావ్యత : ఒక యాదృచ్ఛిక ప్రయోగం జరిపినప్పుడు n పూర్ణ, పరస్పర వివర్జిత, సమసంభవ లఘు ఘటనలు ఫలితమై, E అనే ఘటన జరగడానికి వాటిలో ఏదైనా m అనుకూల ఫలితాలుంటే, ఆ ఘటన సంభావ్యతను P(E) తో సూచిస్తూ $P(E)=\frac{m}{n}$ గా నిర్వచిస్తాము.

SHORT AND LONG ANSWER TYPE QUESTIONS

1. ఒక నిష్పాక్షిక నాణెమును 200 సార్లు ఎగురవేశారు అయితే బేసి సంఖ్య సార్లు బొమ్మ పడటానికి సంభావ్యత ఎంత?

Sol:- ప్రయోగము : ఒక నాణేమును 200 సార్లు ఎగురవేయుట

$n = 2 \times 2 \times ....\times 2$ (200 సార్లు)

$= 2^{200}$

E : బేసి సంఖ్య సార్లు బొమ్మ వచ్చే ఘటన

$m = {}^{200}C_1 + {}^{200}C_3 + {}^{200}C_5 + ... + {}^{200}C_{199} = 2^{200-1} = 2^{199}$

$P(E)=\frac{m}{n}=\frac{2^{199}}{2^{200}}=\frac{1}{2}$

2. 30 వరుస పూర్ణసంఖ్యల నుండి రెండు పూర్ణ సంఖ్యలను తీస్తే, తీసిన రెండు పూర్ణ సంఖ్యల మొత్తం బేసి సంఖ్య కావటానికి సంభావ్యత కనుక్కోండి.

Sol:- ప్రయోగము : 30 వరుస పూర్ణ సంఖ్యల నుండి రెండు పూర్ణ సంఖ్యలను తీయుట

$n = {}^{30}C_2 = \frac{30\times 29}{2} = 15\times 29$

E : తీసిన రెండు పూర్ణాసంఖ్యల మొత్తం ఒక బేసి సంఖ్య అయ్యే ఘటన

$m = {}^{15}C_1 \times {}^{15}C_1$

(రెండు పూర్ణ సంఖ్యల మొత్తం ఒక బేసి సంఖ్య కావాలంటే అందులో ఒకటి బేసి సంఖ్య మరొకటి సరి సంఖ్య కావాలి 30 వరుస పూర్ణ సంఖ్యలలో 15 బేసి సంఖ్యలు మరియు 15 సరి సంఖ్యలు ఉంటాయి.)

$= 15 \times 15$

$= 225$

$$P(E)=\frac{m}{n}=\frac{225}{15\times 29}=\frac{15}{29}$$

3. రెండు పాచికలతో మొత్తం 7 విసరటానికి సంభావ్యత కనుక్కోండి.

Sol:- ప్రయోగము : రెండు పాచికలను విసురుట.

$n = 6 \times 6 = 36$

$$S=\{(1,1),(1,2),\ldots\ldots,(1,6)\\ (2,1),(2,2),\ldots\ldots,(2,6)\\ \ldots\ldots\\ \ldots\ldots\\ (6,1),(6,2),\ldots\ldots,(6,6)\}$$

E : రెండు పాచికలపై మొత్తం 7 అయ్యే ఘటన.

$$E=\{(1,6),(2,5),(3,4),(4,3),(5,2),(6,1)\}$$

$$m=n(E)=6$$

$$P(E)=\frac{m}{n}=\frac{n(E)}{n(S)}=\frac{6}{36}=\frac{1}{6}$$

4. 200 పేజీలున్న ఒక పుస్తకం నుండి ఒక పేజీని యాదృచ్ఛికంగా తెరిచారు. తెరిచిన పేజీ సంఖ్య ఒక పరిపూర్ణ వర్గము కావటానికి సంభావ్యత కనుక్కోండి.

Sol:- ప్రయోగము : 200 పేజీలున్న పుస్తకం నుండి ఒక పేజీని తెరవటం

$$n=200_{C_1}=200$$

E : తెరిచిన పేజీ సంఖ్య ఒక పరిపూర్ణ వర్గం అయ్యే ఘటన

$$E=\{1^2,2^2,3^2,\ldots\ldots14^2\}=\{1,4,9,\ldots\ldots196\}$$

$$m=n(E)=14$$

$$P(E)=\frac{m}{n}=\frac{n(E)}{n(S)}=\frac{14}{200}=\frac{7}{100}$$

5. నాలుగు నిష్పాక్షిక నాణెములను ఏకకాలంలో ఎగరవేసినప్పుడు 2 బొమ్మలు 2 బొరుసులు రావటానికి సంభావ్యత కనుక్కోండి.

Sol:- ప్రయోగము : 4 నాణెములను ఎగురవేయుట.

$$n=n(s)=2^4=16$$

E : 2 బొమ్మలు 2 బొరుసులు వచ్చే ఘటన

E = { HHTT, HTHT, THTH, HTTH, THHT, TTHH }

$$m=n(E)=6=\frac{4!}{2!2!}$$

$$P(E)=\frac{m}{n}=\frac{n(E)}{n(S)}=\frac{6}{16}=\frac{3}{8}$$

6. ఒక లీపు సంవత్సరము కాని సంవత్సరము (i) 53 ఆదివారాలు (i) 52 ఆదివారాలు కల్గి ఉండటానికి సంభావ్యతలను కనుక్కోండి.

Sol:- లీపు సంవత్సరము కాని సంవత్సరము 365 రోజులను కల్గి ఉంటుంది. అంటే 52 ఆదివారాలు మరియు 1 రోజు

(i) E : ఒక లీపు సంవత్సరము కాని సంవత్సరము 53 ఆదివారాలు కల్గి ఉండే ఘటన.

$P(E_1)$ = మిగిలిన 1 రోజు ఆదివారమయ్యే సంభావ్యత

$= \frac{1}{7}$ (వారంలో మొత్తం రోజులు 7, అందులో ఆదివారము 1 రోజు)

(ii) E_2 : లీపు సంవత్సరము కాని సంవత్సరములో 52 ఆదివారాలు ఉండే ఘటన.

$P(E_2)$ = మిగిలిన 1 రోజు ఆదివారం కాకుండే సంభావ్యత

$= \frac{6}{7}$ (వారంలో మొత్తం రోజులు 7, అందులో ఆదివారం కాని రోజులు 6)

సంభావ్యత – స్వీకృత సిద్ధాంతము :

ఒక యాదృచ్ఛిక ప్రయోగపు పరిమిత శాంపుల్ ఆవరణ S అయితే క్రింది స్వీకృతాలను తృప్తిపరిచే ప్రమేయం $P : P(S) \to R$ ను సంభావ్యతా ప్రమేయం అంటాం.

(i) $P(E) \geq 0 \ \forall E \in P(S)$ [ఋణేతర స్వీకృతం]

(ii) $P(S) = 1$

(iii) $E_1, E_2 \in P(S),\ E_1 \cap E_2 = \phi$ అయితే

$P(E_1 \cup E_2) = P(E_1) + P(E_2)$ (సమ్మేళన స్వీకృతం)

Note : P(S) అనేది S యొక్క ఘాత సమితి

(i) $P(\phi) = 0$

(ii) $P(E^C)=1-P(E)$

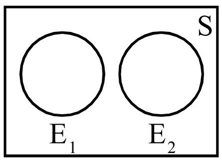
(iii) $E_1 \subseteq E_2$ అయితే $P(E_2 - E_1) = P(E_2) - P(E_1)$

(iv) $E_1 \subseteq E_2$ అయితే $P(E_1) \leq P(E_2)$

సంభావ్యత – సంకలన సిద్ధాంతము :

7. సంభావ్యత సంకలన సిద్ధాంతాన్ని ప్రవచించి నిరూపించండి.

సిద్ధాంతము : ఒక యాదృచ్ఛిక ప్రయోగములో E_1, E_2లు రెండు ఘటనలు మరియు P సంభావ్యతా ప్రమేయము అయితే $P(E_1 \cup E_2) = P(E_1) + P(E_2) - P(E_1 \cap E_2)$



నిరూపణ : **Case(i)** $E_1 \cap E_2 = \phi$ అనుకొనుము.

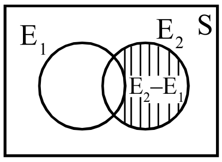
$\Rightarrow P(E_1 \cap E_2) = 0$ --------(1)

సమ్మేళన స్వీకృతం నుండి $P(E_1 \cup E_2) = P(E_1) + P(E_2)$

$\Rightarrow P(E_1 \cup E_2) = P(E_1) + P(E_2) - 0$

$\Rightarrow P(E_1 \cup E_2) = P(E_1) + P(E_2) - P(E_1 \cap E_2)$ ($\because$ 1 నుండి)

Case (ii) :-



$E_1 \cap E_2 \neq \phi$ అనుకొనుము.

$E_1 \cup E_2 = E_1 \cup (E_2 - E_1)$

$\Rightarrow P(E_1 \cup E_2) = P(E_1 \cup (E_2 - E_1))$

$\Rightarrow P(E_1 \cup E_2) = P(E_1) + P(E_2 - E_1)$ $\quad [\because E_1 \cap (E_2 - E_1) = \phi]$

$\Rightarrow P(E_1 \cup E_2) = P(E_1) + P(E_2 - (E_1 \cap E_2))$ $\quad [\because E_2 - E_1 = E_2 - (E_2 \cap E_1)]$

$\Rightarrow P(E_1 \cup E_2) = P(E_1) + P(E_2) - P(E_1 \cap E_2)$

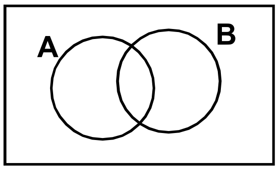
[$\because B \subseteq A$ అయితే $P(A - B) = P(A) - P(B)$ మరియు $E_1 \cap E_2 \subseteq E_2$]

క్ర.సం.	ఘటన	సమితి రూపం
1.	ఘటన A లేదా ఘటన B జరగటం	$A \cup B$
2.	ఘటన A మరియు ఘటన B రెండూ జరగటం	$A \cap B$
3.	A కాని, B కాని జరగక పోవటం	$A^C \cap B^C = (A \cup B)^C$
4.	A జరగటం, కాని B జరగక పోవటం	$A \cap B^C$
5.	A, B లలో ఖచ్చితంగా ఒక ఘటన జరగటం	$(A \cap B^C) \cup (A^C \cap B)$ లేదా $(A - B) \cup (B - A)$ లేదా $(A \cup B) - (A \cap B)$

8. A, B లు ఏవైనా రెండు ఘటనలు అయితే

i) $P(A - B) = P(A) - P(A \cap B)$.

ii) A, B లలో ఒకటి మాత్రమే జరిగే సంభావ్యత $P(A) + P(B) - 2P(A \cap B)$ అని చూపండి.



Sol:- i) $A = (A - B) \cup (A \cap B)$ మరియు $(A - B) \cap (A \cap B) = \phi$

$\therefore P(A) = P[(A - B) \cup (A \cap B)] = P(A - B) + P(A \cap B)$

$\Rightarrow P(A - B) = P(A) - P(A \cap B)$.

ii) A గాని B గాని ఏదో ఒకటే జరిగే ఘటన

$= P[(A - B) \cup (B - A)] = P(A - B) + P(B - A)$

$= P(A) - P(A \cap B) + P(B) - P(A \cap B) = P(A) + P(B) - 2P(A \cap B)$.

9. $P(A) = 0.5$, $P(B) = 0.4$, $P(A \cap B) = 0.3$ అయ్యేటట్లు ఘటనలు A, B ఉన్నాయనుకోండి.

(i) A జరగకపోవడానికి, (ii) A గాని B గాని ఏదోఒకటి జరగకపోవడానికి సంభావ్యతలను కనుక్కోండి.

Sol:- i) A జరగకపోవడానికి సంభావ్యత $= P(A^c) = 1 - P(A) = 1 - 0.5 = 0.5$.

ii) A గాని B గాని ఏదోఒకటి జరగకపోవడానికి సంభావ్యత $= P(A^c \cap B^c) = P(A \cup B)^c = 1 - P(A \cup B)$

$= 1 - [P(A) + P(B) - P(A \cap B)] = 1 - [0.5 + 0.4 - 0.3] = 0.4$.

10. ఒక పేక ముక్కల కట్ట నుండి ఒక కార్డును తీసే ప్రయోగంలో ఇస్పేట్(spade) కార్డు వచ్చే ఘటన A మరియు బొమ్మ ఉన్న కార్డు వచ్చే ఘటన (రాజు, రాణి, జాకీ)B అయితే A, B, $A \cap B$ మరియు $A \cup B$ ల సంభావ్యతలను కనుక్కోండి.

Sol:- ప్రయోగము : పేక ముక్కల కట్ట నుండి ఒక కార్డు తీయటం

$n = n(S) = 52_{C1} = 52$

A : తీసిన ముక్క ఇస్పేట్ అయ్యే ఘటన

$n(A) = 13_{C1} = 13 \qquad P(A) = \dfrac{n(A)}{n(S)} = \dfrac{13}{52}$

B : తీసిన ముక్క బొమ్మ ఉన్నది అయ్యే ఘటన

$n(B) = {}^{12}C_1$ ($\because$ 4 రాజులు + 4 రాణులు + 4 జాకీలు)

$= 12$

$P(B) = \dfrac{n(B)}{n(S)} = \dfrac{12}{52}$

$A \cap B$: తీసిన కార్డు బొమ్మ ఉన్న ఇస్పేట్ కార్డు అయ్యే ఘటన

$n(A \cap B) = {}^{3}C_1 = 3$ ($\because$ 1 ఇస్పేట్ రాజు + 1 ఇస్పేట్ రాణి + 1 ఇస్పేట్ జాకీ)

$P(A \cap B) = \dfrac{n(A \cap B)}{n(S)} = \dfrac{3}{52}$

$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$ ($\because$ సంకలన సిద్ధాంతం)

$= \dfrac{13}{52} + \dfrac{12}{52} - \dfrac{3}{52} = \dfrac{13+12-3}{52} = \dfrac{22}{52}$

$P(A \cup B) = \dfrac{11}{26}$

11. 60 మంది బాలురు మరియు 20 మంది బాలికలు గల తరగతిలో సగం మంది బాలురు మరియు సగం మంది బాలికలకు క్రికెట్ గురించి తెలుసు. ఆ తరగతి నుండి ఒక వ్యక్తిని ఎన్నుకొంటే అది బాలుడు లేదా క్రికెట్ తెలిసిన బాలిక అయ్యే ఘటన సంభావ్యత కనుక్కోండి.

Sol:- తరగతిలోని మొత్తం విద్యార్థులు $= 80$ ($\because$ $60B + 20G$)

ప్రయోగము : తరగతి నుండి ఒక వ్యక్తిని ఎన్నుకోవటం

$n = n(S) = {}^{80}C_1 = 80$

A : ఎన్నుకొన్న వ్యక్తి బాలుడు అయ్యే ఘటన

B : ఎన్నుకొన్న వ్యక్తి క్రికెట్ తెలిసిన బాలిక అయ్యే ఘటన

$A \cap B = \phi$

$A \cup B$: ఎన్నుకొన్న వ్యక్తి బాలుడు లేదా క్రికెట్ తెల్సిన బాలిక అయ్యే ఘటన

$n(A) = {}^{60}C_1 = 60$; $n(B) = {}^{10}C_1 = 10$ ($\because$ 20 మంది బాలికలలో సగం)

$$P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{60}{80},\ P(B)=\frac{n(B)}{n(S)}=\frac{10}{80}$$

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)\ [\because A\cap B=\phi]$$

$$=\frac{60}{80}+\frac{10}{80}=\frac{70}{80}=\frac{7}{8}$$

12. 1 నుండి 30 వరకు సంఖ్యలు కల టికెట్‌ల నుండి ఒక టికెట్‌ను యాదృచ్ఛికంగా ఎన్నుకొన్నారు. (i) ఎన్నుకున్న టికెట్‌పై సంఖ్య 5 లేదా 7 యొక్క గుణిజం(ii) 3 లేదా 5 యొక్క గుణిజం అయ్యే ఘటనల సంభావ్యతను కనుక్కోండి.

Sol:- ప్రయోగము : 1 నుండి 30 వరకు సంఖ్యలు కల టికెట్‌ల నుండి ఒక టికెట్‌ను ఎన్నుకోవటం.

$n=n(S)={}^{30}C_1=30$

A : టికెట్‌పై నెంబర్ 5 యొక్క గుణిజం అయ్యే ఘటన

B : టికెట్‌పై నెంబర్ 7 యొక్క గుణిజం అయ్యే ఘటన

C : టికెట్‌పై నెంబర్ 3 యొక్క గుణిజం అయ్యే ఘటన

$A=\{5, 10, 15, 20, 25, 30\}$ $B=\{7, 14, 21, 28\}$ $C=\{3, 6, 9, 12, 15, 18, 21, 24, 27, 30\}$

$n(A)=6,\ n(B)=4,\ n(C)=10$

$A\cap B$ = టికెట్‌పై నెంబర్ 5 మరియు 7 ల గుణిజం అయ్యే ఘటన

$A\cap C$ = టికెట్‌పై నెంబర్ 5 మరియు 3 ల గుణిజం అయ్యే ఘటన

$A\cap B=\phi,\quad A\cap C=\{15,30\}$

$n(A\cap C)=2$

(i) $P(A\cup B)=P(A)+P(B)\ [\because A\cap B=\phi]$

$$=\frac{n(A)}{n(S)}+\frac{n(B)}{n(S)}=\frac{6}{30}+\frac{4}{30}=\frac{10}{30}=\frac{1}{3}$$

(ii) $P(A\cup C)=P(A)+P(C)-P(A\cap C)$

$$=\frac{n(A)}{n(S)}+\frac{n(C)}{n(S)}-\frac{n(A\cap C)}{n(S)}=\frac{6}{30}+\frac{10}{30}-\frac{2}{30}=\frac{14}{30}=\frac{7}{15}$$

13. ఒక పట్టణములో A, B, C లు మూడు దినపత్రికలు. పత్రిక A ను 20% జనాభా, పత్రిక B ను 16% జనాభా, పత్రిక C ను 14% జనాభా, పత్రికలు A మరియు B లను 8% జనాభా, పత్రికలు A మరియు C లను 5% జనాభా, పత్రికలు B మరియు C లను 4% మరియు 2% జనాభా మూడు పత్రికలను చదువుతారు. అయితే కనీసం ఒక పత్రికను చదివే జనాభా శాతాన్ని కనుక్కోండి.

Sol:- దత్తాంశం నుండి $P(A)=\frac{20}{100},\ P(B)=\frac{16}{100},\ P(C)=\frac{14}{100},\ P(A\cap B)=\frac{8}{100}$

$$P(A\cap C)=\frac{5}{100},\ P(B\cap C)=\frac{4}{100},\ P(A\cap B\cap C)=\frac{2}{100}$$

$$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(B \cap C) - P(C \cap A) + P(A \cap B \cap C)$$

$$= \frac{20}{100} + \frac{16}{100} + \frac{14}{100} - \frac{8}{100} - \frac{4}{100} - \frac{5}{100} + \frac{2}{100} = \frac{52-17}{100} = \frac{35}{100}$$

$\therefore$ 35% జనాభా కనీసం ఒక పత్రికను చదువుతారు.

14. ఒక కాంట్రాక్టర్‌కు రోడ్డు కాంట్రాక్టు రావటానికి సంభావ్యత 2/3, భవనం కాంట్రాక్టు రావటానికి సంభావ్యత 5/9. ఈ రెండింటిలో కనీసం ఒకటి రావటానికి సంభావ్యత 4/5. అయితే రెండు కాంట్రాక్టులు రావటానికి సంభావ్యత కనుక్కోండి.

Sol:- కాంట్రాక్టర్ రోడ్డు కాంట్రాక్ట్ పొందడానికి సంభావ్యత $P(A)$, భవనం కాంట్రాక్ట్ పొందడానికి సంభావ్యత $P(B)$, కనీసం ఒకటి పొందడానికి సంభావ్యత $P(A \cup B)$ అయితే

$\therefore P(A) = 2/3, P(B) = 5/9, P(A \cup B) = 4/5$

రెండు కాంట్రాక్టులను పొందడానికి సంభావ్యత

$$P(A \cap B) = P(A) + P(B) - P(A \cup B) = \frac{2}{3} + \frac{5}{9} - \frac{4}{5} = \frac{30+25-36}{45} = \frac{19}{45}.$$

15. 25 మంది ఉన్న కమిటీలో, ప్రతి వ్యక్తి గణితము లేదా సాంఖ్యకశాస్త్రం లేదా రెండింటిలో ప్రావీణ్యుడు. 19 మంది గణితములో ప్రావీణ్యులు, 16 మంది సాంఖ్యకశాస్త్రంలో ప్రావీణ్యులు అయితే కమిటీ నుండి ఎన్నుకొన్న వ్యక్తి రెండింటిలో ప్రావీణ్యుడు కావటానికి సంభావ్యత కనుక్కోండి.

Sol:- ఎన్నుకొన్న వ్యక్తి గణితంలో ప్రావీణ్యుడయ్యే ఘటన A, సాంఖ్యకశాస్త్ర ప్రావీణ్యుడయ్యే ఘటన B అనుకొనుము.

$$\Rightarrow P(A \cup B) = P(S) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 1 \Rightarrow \frac{19}{25} + \frac{16}{25} - P(A \cap B) = 1$$

$$\Rightarrow P(A \cap B) = \frac{19}{25} + \frac{16}{25} - 1 = \frac{19+16-25}{25} = \frac{10}{25} = \frac{2}{5}.$$

16. ఒక పరుగు పందెంలో A, B, C లు మూడు గుర్రాలు. A పందెం గెలిచే సంభావ్యత B గెలుపు సంభావ్యతకు రెట్టింపు. B పందెం గెలిచే సంభావ్యత C గెలుపు సంభావ్యతకు రెట్టింపు అయితేA, B, C లు ఆ పందెం గెలవగల సంభావ్యతలేవి?

Sol:- ఇచ్చుట A, B, C లు పరస్పర వివర్జిత ఘటనలు.

ఇక్కడ $P(A) = 2P(B), P(B) = 2P(C)$.

$\therefore P(A) = 2P(B) = 2 \times 2P(C) = 4P(C)$

$$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C)$$
$$= 4P(C) + 2P(C) + P(C) = 1 \qquad [\because A \cup B \cup C = S,\ P(S) = 1]$$

$$\Rightarrow 7P(C) = 1 \Rightarrow P(C) = \frac{1}{7}.$$

$$P(A) = 4P(C) = \frac{4}{7}; \quad P(B) = 2P(C) = \frac{2}{7}.$$

నియత సంభావ్యత :

నియత ఘటన : ఒక యాదృచ్ఛిక ప్రయోగంలో A, B లు రెండు ఘటనలు. ఘటన A జరిగిన తర్వాత ఘటన B జరిగితే, "ఘటన A జరిగిన తర్వాత ఘటన B జరగడం" అనే ఘటనను నియత ఘటన అంటాం. దీనిని $\frac{B}{A}$ తో చూపుతాం. దీనిని A జరిగిన తర్వాత B జరిగే ఘటన అంటాం.

నియత సంభావ్యత : ఒక శాంపుల్ ఆవరణలో A మరియు B లు రెండు ఘటనలు. $P(A) \neq 0$ అయితే A జరిగిన తర్వాత B జరిగే ఘటన సంభావ్యతను $P\left(\frac{B}{A}\right)$ తో చూపుతాం.

$$P(B/A) = \frac{P(B \cap A)}{P(A)}, \ [P(A) \neq 0 \text{ అయితే }]$$

ఇదే విధముగా $P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}, \ [P(B) \neq 0 \text{ అయితే }]$

సంభావ్యతా గుణన సిద్ధాంతము :

17. సంభావ్యతా గుణన సిద్ధాంతాన్ని ప్రవచించి నిరూపించండి.

సిద్ధాంతము : ఒక యాదృచ్ఛిక ప్రయోగంలో A మరియు B లు రెండు ఘటనను మరియు $P(A) \neq 0$, $P(B) \neq 0$ అయితే $P(A \cap B) = P(A)P(B/A) = P(B)P(A/B)$

నిరూపణ : నియత సంభావ్యతా నిర్వచనం నుండి

$$P(B/A) = \frac{P(B \cap A)}{P(A)}$$

$$\Rightarrow P(B \cap A) = P(A).P(B/A)............(1)$$

ఇదే విధముగా $P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$

$$\Rightarrow P(A \cap B) = P(B).P(A/B)............(2)$$

(1) మరియు (2) ల నుండి

$$P(A \cap B) = P(A)P(B/A) = P(B)P(A/B)$$

Note : $P(A \cap B \cap C) = P(A)P(B/A)P(C/A \cap B)$

స్వతంత్ర ఘటనలు : ఒక యాదృచ్ఛిక ప్రయోగంలో A మరియు B లు రెండు ఘటనలు $P(A \cap B) = P(A).P(B)$ అయితే A మరియు B లను స్వతంత్ర ఘటనలు అంటాం.

Note :-

(i) A మరియు B లు స్వతంత్ర ఘటనలు అయితే $P(B/A) = P(B)$ (అంటే B యొక్క సంభావ్యత A పై ఆధారపడదు)

(ii) A మరియు B లు స్వతంత్ర ఘటనలు అయితే $P(A/B) = P(A)$

(iii) A, B మరియు C స్వతంత్ర ఘటనలు అయితే $P(A \cap B \cap C) = P(A).P(B).P(C)$

18. రెండు పాచికలు విసరబడ్డాయి. వాటిపై మొత్తం 6 అయితే అందులో ఏదో ఒక పాచికపై 2 వచ్చే సంభావ్యత కనుక్కోండి.

Sol:- ప్రయోగము : రెండు పాచికలు విసరబడ్డాయి.

$n = n(s) = 6x6 = 36$

A : పాచికలపై మొత్తం 6 అయ్యే ఘటన

B : రెండు పాచికలలో ఏదో ఒక దానిపై 2 వచ్చే ఘటన

కావల్సిన ఘటన B/A: మొత్తం 6 అయినపుడు వాటిలో ఏదో ఒక దానిపై 2 వచ్చే ఘటన

$A = \{(1, 5), (2, 4), (3, 3), (4, 2), (5, 1)\}$

$B = \{(2, 1), (2, 2), (2, 3), (2, 4), (2, 5), (2, 6), (1, 2), (2, 2), (3, 2), (4, 2), (5, 2), (6, 2)\}$

$A \cap B = \{(2, 4), (4, 2)\}$

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{5}{36}$$

$$P(A \cap B) = \frac{n(A \cap B)}{n(S)} = \frac{2}{36}$$

$$P\left(\frac{B}{A}\right) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{2/36}{5/36} = 2/5$$

19. ఒక డబ్బాలో 7 ఎర్రని మరియు 3 నల్లని బంతులున్నాయి. తీసిన బంతిని తిరిగి డబ్బాలో వేయకుండా డబ్బా నుండి రెండు బంతులను తీశారు. మొదట తీసిన బంతి ఎర్రనిది అని తెలిసినపుడు రెండో బంతి ఎర్రనిది అయ్యే సంభావ్యత కనుక్కోండి.

Sol:- డబ్బాలోని మొత్తం బంతులు = 10 ($\because$ 7R+3B)

E_1 : మొదట తీసిన బంతి ఎర్రనిది అయ్యే ఘటన

E_2 : రెండోసారి తీసిన బంతి ఎర్రనిది అయ్యే ఘటన

కావల్సిన ఘటన E_2/E_1: మొదట తీసిన బంతి ఎర్రనిది అని తెలిసినపుడు రెండోసారి తీసిన బంతి ఎర్రనిది అయ్యే ఘటన.

$n(E_2/E_1) = 6_{C_1} = 6$ ($\because$ మొత్తం 7 ఎర్ర బంతులలో మొదట తీసిన ఎర్రబంతిని తిరిగి డబ్బాలో వేయలేదు)

$n(S) = 9_{C_1}$ ($\because$ మొత్తం 10 బంతులలో మొదట తీసిన బంతి తిరిగి డబ్బాలో వేయలేదు)

$$P(E_2/E_1) = \frac{n(E_2/E_1)}{n(S)} = \frac{6}{9} = \frac{2}{3}$$

20. **ఒక డబ్బాలో 4 పనిచేయని మరియు 6 పనిచేసే బల్బులు ఉన్నాయి. ఆ డబ్బా నుండి తీసిన బల్బును తిరిగి డబ్బాలో వేయకుండా రెండు బల్బులను తీశారు. తీసిన రెండు బల్బులు పనిచేసేవి అయ్యే ఘటన సంభావ్యతను కనుక్కోండి.**

Sol:- A : మొదట తీసిన బల్బు పనిచేసేది అయ్యే ఘటన

B : రెండోసారి తీసిన బల్బు పనిచేసేది అయ్యే ఘటన

$n(A) = 6_{C_1} = 6$

$n(B/A) = 5_{C_1} = 5$ ($\because$ మొదట తీసిన పనిచేసే బల్బును తిరిగి డబ్బాలో వేయలేదు)

$P(A) = \frac{6}{10},\ P(B/A) = \frac{5}{9}$

కావలసిన ఘటన, $A \cap B$: తీసిన రెండు బల్బులు పనిచేసేవి అయ్యే ఘటన.

$P(A \cap B) = P(A).P(B/A)$

$= \frac{6}{10}.\frac{5}{9} = \frac{1}{3}$

21. **ఒక సంచిలో 10 ఏక రూప బంతులున్నాయి. అందులో 4 నీలం రంగువి మరియు 6 ఎర్రనివి. ఒకదాని తర్వాత ఒకటి సంచి నుండి మూడు బంతులను తీస్తే ఆ మూడు బంతులు ఎర్రనివి అయ్యే సంభావ్యతను కనుక్కోండి.**

Sol:- A : మొదట తీసిన బంతి ఎర్రనిది అయ్యే ఘటన

B : రెండోసారి తీసిన బంతి ఎర్రనిది అయ్యే ఘటన

C : మూడోసారి తీసిన బంతి ఎర్రనిది అయ్యే ఘటన

కావల్సిన ఘటన $A \cap B \cap C$: తీసిన మూడు బంతులు ఎర్రనివి అయ్యే ఘటన

$n(A) = 6_{C_1} = 6,\ n\left(\frac{B}{A}\right) = 5_{C_1} = 5$ ($\because$ ఒక ఎర్రని బంతి మొదటే తీయబడింది)

$n(C/A \cap B) = 4_{C_1} = 4$ ($\because$ రెండు ఎర్రని బంతులు అప్పటికే తీయబడ్డాయి)

$P(A \cap B \cap C) = P(A).P(B/A).P(C/A \cap B)$

$= \frac{6}{10}.\frac{5}{9}.\frac{4}{8} = \frac{1}{6}$

22. **సంచి B_1లో 4 తెల్లని మరియు 2 నల్లని బంతులున్నాయి. సంచి B_2 లో 3 తెల్లని మరియు 4 నల్లని బంతులున్నాయి. యాదృచ్ఛికంగా ఒక సంచిని ఎన్నుకొని అందులో నుండి ఒక బంతిని తీశారు. ఆ బంతి తెల్లనిది అయ్యే సంభావ్యత కనుక్కోండి.**

Sol:- E_1 : సంచి B_1ను ఎన్నుకొనే ఘటన

E_2 : సంచి B_2ను ఎన్నుకొనే ఘటన

అయితే $P(E_1) = P(E_2) = \frac{1}{2}$

W : ఎన్నుకున్న సంచి నుండి తీసిన బంతి తెల్లనిది అయ్యే ఘటన

అయితే $P(W/E_1) = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$, $P(W/E_2) = \frac{3}{7}$

కావల్సిన ఘటన $A:(W \cap E_1) \cup (W \cap E_2)$

$P(A) = P[(E_1 \cap W) \cup (E_2 \cap W)]$

$= P(E_1 \cap W) + P(E_2 \cap W) \left[\because (W \cap E_1) \cap (W \cap E_2) = \phi\right]$

$= P(E_1).P(W/E_1) + P(E_2).P(W/E_2)$

$= \frac{1}{2}.\frac{2}{3} + \frac{1}{2}.\frac{3}{7}$

$= \frac{1}{3} + \frac{3}{14}$

$= \frac{23}{42}$

23. మొదటి బస్తాలో 3 నల్లని మరియు 4 తెల్లని బంతులున్నాయి. రెండో బస్తాలో 4 నల్లని మరియు 3 తెల్లని బంతులున్నాయి. ఒక పాచికను విసిరారు. 1 లేదా 3 పడితే మొదటి బస్తాను, మిగతావాటిలో ఏదో ఒకటి పడితే రెండో బస్తాను ఎన్నుకొంటారు. అయితే ఎన్నుకొన్న బస్తా నుండి నల్లని బంతిని తీసే ఘటన సంభావ్యత కనుక్కోండి.

Sol:- E_1 : మొదటి బస్తాను ఎన్నుకొనే ఘటన

E_2 : రెండో బస్తాను ఎన్నుకొనే ఘటన

$P(E_1) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$ (మొత్తం 6 ఫలితాలలో 1 లేదా 3 పడటం)

$P(E_2) = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$ (మిగతా 2,4,5,6 లలో ఏదో ఒకటి పడటం)

B : ఎన్నుకొన్న బస్తా నుండి తీసిన బంతి నల్లనిది అయ్యే ఘటన

$P(B/E_1) = \frac{3}{7}$, $P(B/E_2) = \frac{4}{7}$

కావల్సిన ఘటన $W = (E_1 \cap B) \cup (E_2 \cap B)$

$P(W) = P[(E_1 \cap B) \cup (E_2 \cap B)]$

$$= P(E_1 \cap B) + P(E_2 \cap B) \quad [\because (E_1 \cap B) \cap (E_2 \cap B) = \phi]$$

$$= P(E_1).P(B/E_1) + P(E_2).P(B/E_2)$$

$$= \frac{1}{3}.\frac{3}{7} + \frac{2}{3}.\frac{4}{7} = \frac{3+8}{21} = \frac{11}{21}$$

స్వతంత్ర ఘటనలు–అనువర్తనాలు :

24. A మరియు B లు స్వతంత్ర ఘటనలు మరియు P(A) = 0.2, P(B)=0.5 అయితే (i) $P\left(\frac{A}{B}\right)$ (ii) $P\left(\frac{B}{A}\right)$ (iii) $P(A \cap B)$ (iv) $P(A \cup B)$ ల విలువలను కనుక్కోండి.

Sol:- (i) $P\left(\frac{A}{B}\right) = P(A) = 0.2$ ($\because$ A, B లు స్వతంత్ర ఘటనలు)

(ii) $P\left(\frac{B}{A}\right) = P(B) = 0.5$ ($\because$ A, B లు స్వతంత్ర ఘటనలు)

(iii) $P(A \cap B) = P(A).\ P(B)$ ($\because$ A, B లు స్వతంత్ర ఘటనలు)

$$= (0.2)\ (0.5)$$

$$= 0.1$$

(iv) $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

$$= 0.2 + 0.5 - 0.1$$

$$= 0.6$$

25. 75% సందర్భాలలో A నిజం మాట్లాడుతాడు మరియు 80% సందర్భాలలో B నిజం మాట్లాడుతాడు. అయితే ఒక సంఘటన గురించి వారి ప్రతిపాదనలు సరిపోకపోవటానికి సంభావ్యత ఎంత?

Sol:- Let E_1 : ఒక సంఘటన గురించి A నిజం మాట్లాడే ఘటన

E_2 : ఒక సంఘటన గురించి B నిజం మాట్లాడే ఘటన

$$P(E_1) = \frac{75}{100} = \frac{3}{4}\ ;\ P(E_2) = \frac{80}{100} = \frac{4}{5}$$

$$\Rightarrow P(E_1^C) = 1 - \frac{3}{4} = \frac{1}{4}\ ;\ P(E_2^C) = 1 - \frac{4}{5} = \frac{1}{5}$$

కావల్సిన ఘటన E : ఒక సంఘటన గురించి వారి ప్రతిపాదనలు సరిపోకపోయే ఘటన

$$E = (E_1 \cap E_2^C) \cup (E_1^C \cap E_2)$$

$$P(E) = P\left[(E_1 \cap E_2^C) \cup (E_1^C \cap E_2)\right]$$

$$= P(E_1 \cap E_2^C) + P(E_1^C \cap E_2) \quad [\because (E_1 \cap E_2^C) \cap (E_1^C \cap E_2) = \phi]$$

$P(E) = P(E_1).P(E_2^C) + P(E_1^C).P(E_2)$ [$\because E_1, E_2$ లు స్వతంత్ర ఘటనలు]

$$= \left(\frac{3}{4}\right)\left(\frac{1}{5}\right) + \left(\frac{1}{4}\right)\left(\frac{4}{5}\right) = \frac{3+4}{20} = \frac{7}{20}$$

26. కలన గణితములోని ఒక సమస్యను A మరియు B అనే విద్యార్థులకు ఇవ్వబడింది. ఆ సమస్యను వారు సాధించే సంభావ్యతలు వరుసగా $\frac{1}{3}$ మరియు $\frac{1}{4}$. ఆ ఇద్దరు స్వతంత్రంగా సమస్యను సాధించటానికి ప్రయత్నిస్తే, ఆ సమస్య సాధింపబడుటకు గల సంభావ్యతను కనుక్కోండి.

Sol:- E_1 : సమస్యను A సాధించే ఘటన

E_2 : సమస్యను B సాధించే ఘటన

దత్తాంశం : $P(E_1) = \frac{1}{3}$ $P(E_2) = \frac{1}{4}$

కావల్సిన ఘటన $E_1 \cup E_2$: (సమస్య A చే లేదా B చే లేదా ఇద్దరిచే సాధింపబడితే, ఆ సమస్య సాధింపబడినట్లు)

$$P(E_1 \cup E_2) = P(E_1) + P(E_2) - P(E_1 \cap E_2)$$

$$= \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - P(E_1).P(E_2)$$ [$\because E_1, E_2$ లు స్వతంత్ర ఘటనలు]

$$= \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \left(\frac{1}{3}\right).\left(\frac{1}{4}\right)$$

$$= \frac{4+3-1}{12} = \frac{6}{12} = \frac{1}{2}$$

27. A మరియు B లు స్వతంత్ర ఘటనలు $P(A) = 0.6, P(B) = 0.7$ అయితే (i) $P(A \cap B)$ (ii) $P(A \cup B)$ (iii) $P\left(\frac{B}{A}\right)$ (iv) $P(A^C \cap B^C)$ లను కనుక్కోండి.

Sol:- A, B లు స్వతంత్ర ఘటనలు

i) $P(A \cap B) = P(A)\,P(B) = 0.6 \times 0.7 = 0.42$

ii) $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cup B) = 0.6 + 0.7 - 0.42 = 0.88$

iii) $P(B/A) = P(B) = 0.7$.

iv) $P(A^C \cap B^C) = P(A^C) . P(B^C)$ [$\because A^C, B^C$ లు కూడా స్వతంత్ర ఘటనలు]

$= [1 - P(A)]\,[1 - P(B)] = 0.4 \times 0.3 = 0.12$.

28. A, B, C లు మూడు స్వతంత్ర ఘటనలవుతూ, $P(A \cap B^c \cap C^c) = 1/4$, $P(A^c \cap B \cap C^c) = 1/8$, $P(A^c \cap B^c \cap C^c) = 1/4$ అయితే P(A), P(B), P(C) లను కనుగొనుము.

Sol:- $P(A)=x, P(B)=y, P(C)=z$ అనుకొనుము.

$P(A\cap B^c\cap C^c)=1/4 \Rightarrow P(A)P(B^c)P(C^C)=1/4 \Rightarrow x(1-y)(1-z)=1/4 \to (1)$

$P(A^c\cap B\cap C^c)=1/8 \Rightarrow P(A^c)P(B)P(C^C)=1/8 \Rightarrow (1-x)y(1-z)=1/8 \to (2)$

$P(A^c\cap B^c\cap C^c)=1/4 \Rightarrow P(A^c)P(B^c)P(C^c)=1/4 \Rightarrow (1-x)(1-y)(1-z)=1/4 \to (3)$

$$\frac{(1)}{(3)} \Rightarrow \frac{x(1-y)(1-z)}{(1-x)(1-y)(1-z)}=\frac{1/4}{1/4} \Rightarrow \frac{x}{1-x}=1 \Rightarrow x=1-x \Rightarrow 2x=1 \Rightarrow x=\frac{1}{2}.$$

$$x=\frac{1}{2} \text{ కు } \frac{(1)}{(2)} \Rightarrow \frac{\frac{1}{2}(1-y)(1-z)}{(1-\frac{1}{2})y(1-z)}=\frac{1/4}{1/8} \Rightarrow \frac{1-y}{y}=2 \Rightarrow 1-y=2y \Rightarrow 3y=1 \Rightarrow y=\frac{1}{3}.$$

$$x=\frac{1}{2} \text{ కు } (1) \Rightarrow \frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{3}\right)(1-z)=\frac{1}{4} \Rightarrow \frac{1}{2}\times\frac{2}{3}(1-z)=\frac{1}{4} \Rightarrow 1-z=\frac{3}{4} \Rightarrow z=\frac{1}{4}.$$

$$\therefore P(A)=\frac{1}{2}, P(B)=\frac{1}{3}, P(C)=\frac{1}{4}.$$

29. A, B లు ఏవైనా రెండు ఘటనలు, $P(A\cup B)=0.65$, $P(A\cap B)=0.15$ అయితే $P(A^c)+P(B^c)$ విలువను కనుక్కోండి.

Sol:- $P(A^c)+P(B^c)=1-P(A)+1-P(B)=2-[P(A)+P(B)]$

$=2-[P(A\cup B)+P(A\cap B)]=2-[0.65+0.15]=1.2$

30. ఒక నిష్పాక్షిక పాచికను దొర్లించారు. A = {1, 3, 5} , B = {2, 3}, C = {2, 3, 4, 5} ఘటనలను తీసుకోండి. i) $P(A\cap B)$, $P(A\cup B)$, ii) P(A/B), P(B/A), iii) P(A/C), P(C/A), iv) P(B/C), P(C/B) లను కనుక్కోండి.

Sol:- S శాంపిల్ ఆవరణం అయితే S = {1, 2, 3, 4, 5, 6}

ఇక్కడ A = {1, 3, 5}, B = {2, 3}, C = {2, 3, 4, 5}

$(A\cap B)=\{3\}, (A\cup B)=\{1,2,3,5\}, A\cap C=\{3,5\}, B\cap C=\{2,3\}$

i) $P(A\cap B)=1/6, P(A\cup B)=4/6=2/3.$

ii) $P(A/B)=\dfrac{n(A\cap B)}{n(B)}=\dfrac{1}{2}, \quad P(B/A)=\dfrac{n(A\cap B)}{n(A)}=\dfrac{1}{3}$

iii) $P(A/C)=\dfrac{n(A\cap C)}{n(C)}=\dfrac{2}{4}=\dfrac{1}{2}, \quad P(C/A)=\dfrac{n(A\cap C)}{n(A)}=\dfrac{2}{3}$

iv) $P(B/C)=\dfrac{n(B\cap C)}{n(C)}=\dfrac{2}{4}=\dfrac{1}{2}, \quad P(C/B)=\dfrac{n(B\cap C)}{n(B)}=\dfrac{2}{2}=1.$

❖ ❖ ❖ ❖ ❖

యూనిట్ **10**

యాదృచ్ఛిక చలరాశులు & సంభావ్యతా విభాజనాలు

- **యాదృచ్ఛిక చలరాశి :** ఒక యాదృచ్ఛిక ప్రయోగంతో అనుబంధమైన శాంపుల్ ఆవరణను 'S' అనుకొనుము. $X:S\to R$ అనే ప్రమేయాన్ని యాదృచ్ఛిక చలరాశి అంటారు.
- **సంభావ్యతా విభాజన ప్రమేయము :** 'S' అనేది శాంపుల్ ఆవరణం. $X:S\to R$ అనే ప్రమేయంలో 'x' యాదృచ్ఛిక చలరాశి అనుకొనుము. అపుడు R లోని ప్రతి 'x' కు $F(x)=P(X\le x)$ గా నిర్వచితమయ్యే $F:R\to R$ ను 'x' యొక్క "సంభావ్యతా విభాజన ప్రమేయము" (Probability distribution function) అంటారు.
- **విచ్ఛిన్న యాదృచ్ఛిక చలరాశి :** $X:S\to R$ ఒక యాదృచ్ఛిక చలరాశి, X యొక్క వ్యాప్తి పరిమితం లేదా సంఖ్యాక అపరిమితం (countably infinite) అయితే X ను విచ్ఛిన్న యాదృచ్ఛిక చలరాశి (discrete random variable) అంటారు. అనగా X యొక్క వ్యాప్తి = $\{x_1, x_2, ...x_n\}$ లేదా $\{x_1, x_2, x_3..........\}$ ఐతే X ను విచ్ఛిన్న యాదృచ్ఛిక చలరాశి అంటారు.

  $X:S\to R$ అనే యాదృచ్ఛిక చలరాశి X యొక్క వ్యాప్తి $\{x_1, x_2, x_3..........\}$ ఐతే

  (i) ప్రతి i కి, $P(X=x_i)\ge 0$

  (ii) $\sum_{i\ge1} P(X=x_i)=1$ అగును.

- **అంక మధ్యమము :** $\mu=\Sigma x_i\, P(X=x_i)$
- **విస్తృతి :** $\sigma^2=\Sigma x_i^2\, P(X=x_i)-\mu^2$

ద్విపద విభాజనం

$$P(X=x)={}^nC_x\, p^x q^{n-x},\ x\in\{0,1,2................n\}$$

(i) 'n', 'p' లను ద్విపద విభాజకానికి పరామితులు అంటారు.

(ii) ద్విపద విభాజనానికి అంకమధ్యమం $(\mu)=np$

(iii) ద్విపద విభాజనానికి విస్తృతి $(\sigma^2)=npq$

పాయిజాన్ విభాజనం :

$$P(X=x)=\frac{e^{-\lambda}\lambda^{x}}{x!},\ x\in\{0,1,2,.........\}\ \text{మరియు}\ \lambda>0$$

VERY SHORT ANSWER TYPE QUESTIONS (2 MARKS)

1. ఒక ద్విపద చలరాశి X అంకమధ్యమం, విస్తృతిలు వరుసగా 2.4, 1.44 అయితే $P(1<X\le 4)$ ను కనుక్కోండి.

Sol:- అంకమధ్యమం $= np = 2.4$ ....(i)

విస్తృతి $= npq = 1.44$ ....(ii)

(2) ను (1) చే భాగించగా

$$\frac{npq}{np}=\frac{1.44}{2.4}$$

$$q=\frac{144}{240}=\frac{3}{5}=0.6$$

కాని p+q=1

$P+0.6=1\Rightarrow P=1-0.6=0.4$

P=0.4 ను (1) లో ప్రతిక్షేపించగా

n(0.4)=2.4

$$\Rightarrow n=\frac{2.4}{0.4}=\frac{24}{4}=6$$

$$P(1<X\le 4)=P(X=2)+P(X=3)+P(X=4)$$

$$={}^{6}C_{2}\,q^{4}p^{2}+{}^{6}C_{3}\,q^{3}p^{3}+{}^{6}C_{4}\,q^{2}p^{4}$$

$$={}^{6}C_{2}\left(\frac{3}{5}\right)^{4}\left(\frac{2}{5}\right)^{2}+{}^{6}C_{3}\left(\frac{3}{5}\right)^{3}\left(\frac{2}{5}\right)^{3}+{}^{6}C_{4}\left(\frac{3}{5}\right)^{2}\left(\frac{2}{5}\right)^{4}$$

$$=15.\frac{3^{2}.3^{2}}{5^{4}}.\frac{2^{2}}{5^{2}}+20.\frac{3^{2}.3^{1}}{5^{3}}.\frac{2^{2}.2^{1}}{5^{3}}+15.\frac{3^{2}}{5^{2}}.\frac{2^{2}.2^{2}}{5^{4}}$$

$$=(15.9)\left(\frac{6^{2}}{5^{6}}\right)+(20.6)\left(\frac{6^{2}}{5^{6}}\right)+(15.4)\left(\frac{6^{2}}{5^{6}}\right)$$

$$=\left(\frac{6^{2}}{5^{6}}\right)[135+120+60]$$

$$=\frac{36\times 315}{15625}=\frac{2268}{3125}$$

2. ఒక పాయిజన్ చలరాశి P(X=1)=P(X=2) ను తృప్తిపరుస్తుంది. P(X=5) ను కనుక్కోండి.

Sol:- $P(X=x)=\dfrac{e^{-\lambda}\lambda^{x}}{x!},\ (\lambda>0)$

$P(X=1)=P(X=2)$ ఇవ్వబడినది.

$\Rightarrow \frac{e^{-\lambda}\lambda^1}{1!}=\frac{e^{-\lambda}\lambda^2}{2!}$ అడ్డగుణకారం చేయగా

$\Rightarrow 2\lambda=\lambda^2 \Rightarrow \lambda^2-2\lambda=0$

$\Rightarrow \lambda(\lambda-2)=0$

$\therefore \lambda=2\ (\because \lambda>0)$

$\therefore P(X=5)=\frac{e^{-2}2^5}{5!}$

3. 450 పేజీలు ఉన్న ఒక పుస్తకంలో 400 ముద్రణ దోషాలున్నాయి. ఒక పేజీలోని దోషాల సంఖ్య పాయిజన్ న్యాయాన్ని అనుసరిస్తుందనుకొని, 5 పేజీల యాదృచ్ఛిక శాంపుల్, ముద్రణ దోషాలను ఏమీ కలిగి ఉండని సంభావ్యతను కనుక్కోండి.

Sol:- పుస్తకంలో ఒక పేజి యొక్క సగటు దోషాల సంఖ్య $\lambda=\frac{400}{450}=\frac{8}{9}$

ఒక పేజికి 'x' దోషాలు ఉండే సంభావ్యత $\Rightarrow P(X=x)=\frac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!}=\frac{e^{\frac{-8}{9}}\left(\frac{8}{9}\right)^x}{x!}$

$\therefore$ దోషాలు లేకుంటే, $x=0 \Rightarrow P(X=0)=e^{\frac{-8}{9}}$

$\therefore$ 5 పేజీల యాదృచ్ఛిక శాంపుల్‌లో అసలు దోషాలు ఏవీలేని ఘటన సంభావ్యత $[P(X=0)]^5=\left(e^{\frac{-8}{9}}\right)^5$

4. కనీసం ఒక బొమ్మ పడుతూ, సంభావ్యత కనీసం 0.8 కావడానికి, ఒక నిష్పాక్షిక నాణేన్ని ఎగరవేయాల్సిన కనిష్ఠ సంఖ్యను కనుక్కోండి.

Sol:- నిష్పాక్షిక నాణేన్ని 'n' సార్లు ఎగురవేశాం అనుకుందాం.

X చలరాశి బొమ్మలుపడే సంఖ్యను సూచిస్తుంది.

X ద్విపద విభాజనాన్ని అనుసరిస్తుంది. దీని పరామితులు n మరియు p, $p=\frac{1}{2}$

$P(X\geq 1)\geq 0.8$ (దత్తాంశం నుండి)

$\Rightarrow 1-P(X=0)\geq 0.8\ \left(\because\ \Sigma P(X=x_i)=1\right)$

$\Rightarrow -P(X=0)\geq 0.8-1$

$\Rightarrow -P(X=0)\geq -0.2$

$\Rightarrow P(X=0)\leq 0.2$

$\Rightarrow {}^nC_0\left(\frac{1}{2}\right)^n\leq 0.2$

$\left(\frac{1}{2}\right)^n\leq\frac{2}{10}$

$\frac{1}{2^n}\leq\frac{1}{5}$

$\Rightarrow 2^n \geq 5$

$n \geq 3$ కు ఇది నిజం.

$\therefore$ 'n' యొక్క కనిష్ఠ విలువ 3.

5. 8 నాణేలను ఏకకాలంలో ఎగరవేశారు. కనీసం 6 బొమ్మలు పడటానికి గల సంభావ్యతను కనుక్కోండి.

Sol:- బొమ్మపడే సంభావ్యత $= \frac{1}{2}$

బొరుసుపడే సంభావ్యత $= \frac{1}{2}$

8 నాణేలను యాదృచ్ఛికంగా ఎగురవేసినపుడు 'r' బొమ్మలు పడే సంభావ్యత

$$P(X=x) = {}^8C_x\left(\frac{1}{2}\right)^x\left(\frac{1}{2}\right)^{8-x} = {}^8C_x\left(\frac{1}{2}\right)^8,\ x = 0,1,2 .... 8$$

కనీసం '6' బొమ్మలుపడే సంభావ్యత

$$P(X \geq 6) = P(X=6)+P(X=7)+P(X=8)$$

$$= {}^8C_6\left(\frac{1}{2}\right)^8 + {}^8C_7\left(\frac{1}{2}\right)^8 + {}^8C_8\left(\frac{1}{2}\right)^8$$

$$= \left(\frac{1}{2}\right)^8\left[{}^8C_6 + {}^8C_7 + {}^8C_8\right]$$

$$= \frac{1}{16\times16}\left[{}^8C_2 + {}^8C_1 + 1\right]$$

$$= \frac{1}{256}\left[\frac{8\times7}{2}+8+1\right] = \frac{1}{256}\times37 = \frac{37}{256}$$

6. ప్రయాణానికి సంసిద్ధమైన 9 ఓడలలో ఒకటి మునిగిపోయే ప్రమాదం ఉంది. 6 ఓడలు ప్రయాణానికి సంసిద్ధమైతే

(a) కనీసం ఒకటి క్షేమంగా చేరడానికి

(b) సరిగ్గా మూడు క్షేమంగా చేరడానికి గల సంభావ్యతలను కనుక్కోండి.

Sol:- 9 ఓడలలో ఒకటి మునిగే ప్రమాదం ఉన్నది (దత్తాంశం)

ఓడ మునిగి పోవడానికి సంభావ్యత $(p) = \frac{1}{9}$

కాని p+q=1, $p = \frac{1}{9}$ ప్రతిక్షేపించగా

$$\frac{1}{9} + q = 1$$

$$q = 1 - \frac{1}{9} = \frac{8}{9}$$

ఓడల సంఖ్య (n)=6

$$P(X=0)={}^6C_0\left(\frac{1}{9}\right)^{6-0}\left(\frac{8}{9}\right)^0=\left(\frac{1}{9}\right)^6$$

a) కనీసం ఒక ఓడ క్షేమంగా చేరడానికి సంభావ్యత

$$=P(X>0)=1-P(X=0)$$

$$=1-\left(\frac{1}{9}\right)^6=1-\frac{1}{9^6}$$

b) సరిగ్గా మూడు ఓడలు క్షేమంగా చేరడానికి సంభావ్యత

$$=P(X=3)={}^6C_3\left(\frac{1}{9}\right)^{6-3}\left(\frac{8}{9}\right)^3$$

$$=\left(\frac{6\times5\times4}{3\times2}\right)\frac{1}{9^3}\times\frac{8^3}{9^3}=20\left(\frac{8^3}{9^6}\right)$$

LONG ANSWER TYPE QUESTIONS (7 MARKS)

1. ఒక పాచికను దొర్లించారు. దాని ముఖంపై కనబడే సంఖ్య X యొక్క అంకమధ్యమం, విస్తృతిలను కనుక్కోండి.

Sol.: శాంపిల్ ఆవరణను S, దీనితో అనుబంధమయ్యే యాదృచ్ఛిక చలరాశిని X అనుకుందాం. P(X) ను ఒక పట్టిక ద్వారా తెలుపుదాం.

$X=x_i$	1	2	3	4	5	6
$P(X=x_i)$	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6

X అంకమధ్యమం $=\mu=\sum_{i=1}^{6}x_iP(X=x_i)=1.\frac{1}{6}+2.\frac{1}{6}+3.\frac{1}{6}+4.\frac{1}{6}+5.\frac{1}{6}+6.\frac{1}{6}=\frac{1}{6}\left(\frac{6\times7}{2}\right)=\frac{7}{2}$

X విస్తృతి $=\sigma^2=\sum_{i=1}^{6}x_i^2P(X=x_i)-\mu^2$

$$=1^2.\frac{1}{6}+2^2.\frac{1}{6}+3^2.\frac{1}{6}+4^2.\frac{1}{6}+5^2.\frac{1}{6}+6^2.\frac{1}{6}=\frac{1}{6}\left(\frac{6\times7\times13}{6}\right)-\frac{49}{4}=\frac{35}{12}$$

2. ఒక యాదృచ్ఛిక చలరాశి X సంభావ్యతా విభాజనాన్ని కింది ఇవ్వడమైనది

X=x	1	2	3	4	5
P(X=x)	k	2k	3k	4k	5k

k విలువను, X యొక్క అంకమధ్యమం, విస్తృతిలను కనుక్కోండి.

Sol:- $\sum_{i=1}^{5}P(X=x_i)=1\Rightarrow k+2k+3k+4k+5k=1\Rightarrow 15k=1\Rightarrow k=1/15$

అంకమధ్యమం $=\mu=\sum_{i=1}^{5}x_iP(X=x_i)$

$$=1.(k)+2.(2k)+3.(3k)+4.(4k)+5.(5k)=55k=55\times\frac{1}{15}=\frac{11}{3}$$

$$X \text{ విస్తృతి } = (\sigma^2) = \sum_{i=1}^{6} x_i^2 P(X = x_i) - \mu^2$$

$$= 1^2.(k) + 2^2.(2k) + 3^2.(3k) + 4^2.(4k) + 5^2.(5k) - \mu^2$$

$$= k + 8k + 27k + 64k + 125k - \left(\frac{11}{3}\right)^2 = 225k - \frac{121}{9} = 225 \times \frac{1}{15} - \frac{121}{9}$$

$$= \frac{135 - 121}{9} = \frac{14}{9}.$$

3. $\mathbf{F(x) = c\left(\frac{2}{3}\right)^x}$**, x = 1, 2, 3............ ఒక విచ్ఛిన్న యాదృచ్ఛిక చలరాశి 'x' సంభావ్యతా విభాజన ప్రమేయాన్ని తృప్తిపరచేట్లుగా, స్థిరరాశి 'c' విలువలు కనుక్కోండి.**

Sol:- $F(x) = c\left(\frac{2}{3}\right)^x$ అని ఇవ్వబడినది.

$x = 1,\ F(1) = c\left(\frac{2}{3}\right)^1$

$x = 2,\ F(2) = c\left(\frac{2}{3}\right)^2$

$x = 3,\ F(3) = c\left(\frac{2}{3}\right)^3$

$$\sum F(x) = c\sum\left(\frac{2}{3}\right)^x = 1$$

$$c\left[\left(\frac{2}{3}\right)^1 + \left(\frac{2}{3}\right)^2 + \left(\frac{2}{3}\right)^3 + ... + \infty\right] = 1$$

ఇది అనంత గుణశ్రేఢి. $r = \frac{2}{3} < 1$

$$S_\infty = \frac{a}{1-r}, \quad a = \frac{2c}{3}, r = \frac{2}{3}$$

$$\Rightarrow c\left[\frac{2/3}{1-2/3}\right] = 1$$

$$\Rightarrow c\left[{}^{2/3}\!/_{1/3}\right] = 1 \quad \Rightarrow c = \frac{1}{2}$$

4. $\mathbf{P(X = -2) = P(X = -1) = P(X = 2) = P(X = 1) = \frac{1}{6}}$ **మరియు** $\mathbf{P(X = 0) = \frac{1}{3}}$ **ను తృప్తిపరచేట్లు X యాదృచ్ఛిక చలరాశి. X అంకమధ్యమం, విస్తృతిలను కనుగొనండి.**

Sol:- అంకమధ్యమం $(\mu)=\sum_{k=-2}^{2} x_i\, P(X=k)$

$$=(-2)\left(\frac{1}{6}\right)+(-1)\frac{1}{6}+(0)\left(\frac{1}{3}\right)+1\left(\frac{1}{6}\right)+2\left(\frac{1}{6}\right)$$

అంకమధ్యమం $=0$

విస్తృతి $\left(\sigma^2\right)=\sum_{k=-2}^{2}(k-\mu)^2 P(X=k)$

$$=(-2-0)^2\left(\frac{1}{6}\right)+(-1-0)^2\left(\frac{1}{6}\right)+(0-0)^2\left(\frac{1}{3}\right)+(1-0)^2\left(\frac{1}{6}\right)+(2-0)^2\left(\frac{1}{6}\right)$$

$$=(4)\left(\frac{1}{6}\right)+(1)\left(\frac{1}{6}\right)+0+(1)\left(\frac{1}{6}\right)+4\left(\frac{1}{6}\right)=\frac{4+1+1+4}{6}=\frac{10}{6}=\frac{5}{3}$$

5. ఒక యాదృచ్ఛిక చలరాశి X సంభావ్యతా విభాజనం ఈ క్రింది విధంగా ఉన్నది.

X=x	0	1	2	3	4	5	6	7
P(X=x)	0	k	2k	2k	3k	k^2	$2k^2$	$7k^2$+k

(i) k విలువ (ii) అంకమధ్యమం మరియు (iii) P(0<X<5) లను కనుక్కోండి.

Sol:- అన్ని సంభావ్యతల మొత్తం $\sum P\left(X=x_i\right)=1$

$\Rightarrow P(X=0)+P(X=1)+P(X=2)+P(X=3)+P(X=4)+P(X=5)+P(X=6)+P(X=7)=1$

$\Rightarrow 0+k+2k+2k+3k+k^2+2k^2+7k^2+k=1$

$\Rightarrow 10k^2+9k-1=0$

$\Rightarrow 10k^2+10k-k-1=0$

$\Rightarrow 10k(k+1)-1(k+1)=0$

$\Rightarrow (10k-1)(k+1)=0$

$\Rightarrow 10k-1=0 \quad k\neq -1 \quad (\because k>0)$

$\Rightarrow k=\frac{1}{10}$

(ii) అంకమధ్యమం $(\mu)=\sum_{i=1}^{n} x_i\, P\left(X=x_i\right)$

$\therefore$ అంకమధ్యమం $(\mu)=0(0)+1(k)+2(2k)+3(2k)+4(3k)+5(k^2)+6(2k^2)+7(7k^2+k)$

$$=0+k+4k+6k+12k+5k^2+12k^2+49k^2+7k$$

$=66k^2+30k;\ k=\frac{1}{10}$ ను ప్రతిక్షేపించగా

$$= 66\left(\frac{1}{10}\right)^2 + 30\left(\frac{1}{10}\right) = \frac{66}{100} + \frac{3}{1} = \frac{366}{100}$$

$\mu = 3.66$

(iii) $P(0<X<5) = P(X=1)+P(X=2)+P(X=3)+P(X=4)$

$= k + 2k + 2k + 3k$

$= 8k$

$= 8\left(\frac{1}{10}\right)$

$= \frac{4}{5}$

6. ఒక యాదృచ్ఛిక చలరాశి వ్యాప్తి X = {0, 1, 2}. $P(X=0)=3c^3$, $P(X=1)=4c-10c^2$, $P(X=2)=5c-1$ అయిన

(i) 'c' విలువ, (ii) $P(X<1)$, (iii) $P(1<X\leq 2)$ మరియు (iv) $P(0<X\leq 3)$ లను కనుక్కోండి.

Sol:- X = {0, 1, 2} (దత్తాంశం నుండి)

కాని $\sum_{i=1}^{n} P(X = x_i) = 1$

$\Rightarrow P(X=0)+P(X=1)+P(X=2)=1$

$\Rightarrow (3c^3)+(4c-10c^2)+(5c-1)=1$

$\Rightarrow 3c^3 - 10c^2 + 9c - 1 - 1 = 0$

$\Rightarrow 3c^3 - 10c^2 + 9c - 2 = 0$

c = 1	3	-10	9	-2
	0	3	-7	2
	3	-7	2	0

$\Rightarrow 3c^2 - 7c + 2 = 0$

$\Rightarrow 3c^2 - 6c - c + 2 = 0$

$\Rightarrow 3c(c-2) - 1(c-2) = 0$

$\Rightarrow (3c-1)(c-2) = 0$

$c = \frac{1}{3} \quad c = 2$

$\therefore c = \frac{1}{3}$

(ii) $P(X<1) = P(X=0) = 3c^3$

$C=1 \Rightarrow 3c^3=3(1)^3=3>1$ (సాధ్యం కాదు)

$C=2 \Rightarrow 3c^3=3(2)^3=24>1$(సాధ్యం కాదు)

$$C=\frac{1}{3} \Rightarrow 3C^3 = 3\left(\frac{1}{3}\right)^3 = 3\frac{1}{27} = \frac{1}{9} < 1$$

$\Rightarrow C=\frac{1}{3}$ మరియు $\therefore P(X<1)=\frac{1}{9}$

(iii) $P(1<X\le 2) = P(X=2)$

$= 5C-1$

$C=\frac{1}{3}$ రాయగా $= 5\left(\frac{1}{3}\right)-1 = \frac{5}{3}-1 = \frac{2}{3}$

(iv) $P(0<x\le 3) = P(X=1)+P(X=2)+P(X=3)$

$= (4C-10C^2)+(5C-1)+0$

$= -10C^2+9C-1$

$C=\frac{1}{3}$ రాయగా $= -10\left(\frac{1}{3}\right)^2 + 9\left(\frac{1}{3}\right) - 1$

$= \frac{-10}{9}+3-1$

$= \frac{-10}{9}+\frac{2}{1} = \frac{-10+18}{9} = \frac{8}{9}$

8. ఒక యాదృచ్ఛిక చలరాశి X వ్యాప్తి {1, 2, 3....} $P(X=k)=\frac{C^k}{k!}; (k=1,2,3..........)$ ఐతే

(i) 'c' విలువను (ii) P(0<X<3) ను కనుక్కోండి.

Sol:- (i) అన్ని సంభ్యావతల మొత్తం= 1

i.e., $\sum_{i=1}^{\infty} P(X=x_i)=1$

$\Rightarrow P(X=1)+P(X=2)+P(X=3)+..........+\infty=1$

$\Rightarrow \frac{C^1}{1!}+\frac{C^2}{2!}+\frac{C^3}{3!}+...............+\infty=1$

ఇరువైపుల '1' ని కూడగా

$1+\frac{C}{1}+\frac{C^2}{2!}+\frac{C^3}{3!}+.......+\infty=2$

$\Rightarrow e^C=2$

$\Rightarrow C=\log_e 2$ -------(1)

(ii) $P(0<X<3)$ $= P(X=1)+P(X=2)$

$$= C + \frac{C^2}{2}$$

$$= \log_e 2 + \frac{(\log_e 2)^2}{2} \qquad [\because (1) \text{ నుండి}]$$

9. రెండు పాచికలను యాదృచ్ఛికంగా దొర్లించారు. ఆ రెండింటిపై కనపడే సంఖ్యల మొత్తానికి సంభావ్యతా విభాజనాన్ని కనుక్కోండి. యాదృచ్ఛిక చలరాశి అంకమధ్యమాన్ని కనుక్కోండి.

Sol:- రెండు పాచికలను యాదృచ్ఛికంగా దొర్లించారు. (ఇవ్వబడింది)

శాంపుల్ ఆవరణం S లోని బిందువుల సంఖ్య $= 6 \times 6 = 36$

అవి S = {(1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (1, 5), (1, 6), (2, 1)..........(2, 6),......(6, 6)}

రెండు పాచికలపై కనబడే సంఖ్యల మొత్తాన్నిX సూచిస్తుందనుకొనుము.

i.e., 1+1=2, 1+2=3, ...6+6=12

$\therefore$ X వ్యాప్తి = {2, 3, 4, 5...........12}

X కు సంభావ్యతా విభాజనాన్ని కింద ఇవ్వడమైనది.

$X=X_i$	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$P(X=X_i)$	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$

X అంకమధ్యమం $= \mu = \sum_{i=2}^{12} x_i P(X = x_i)$

$$= 2\left(\frac{1}{36}\right) + 3\left(\frac{2}{36}\right) + 4\left(\frac{3}{36}\right) + 5\left(\frac{4}{36}\right) + 6\left(\frac{5}{36}\right)$$

$$+7\left(\frac{6}{36}\right) + 8\left(\frac{5}{36}\right) + 9\left(\frac{4}{36}\right) + 10\left(\frac{3}{36}\right) + 11\left(\frac{2}{36}\right) + 12\left(\frac{1}{36}\right)$$

$$= \frac{1}{36}\left[2+6+12+20+30+42+40+36+30+22+12\right]$$

$$= \frac{252}{36} = 7$$

10.

X=x	**-3**	**-2**	**-1**	**0**	**1**	**2**	**3**
P(X=x)	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{9}$

అనేది ఒక యాదృచ్ఛిక చలరాశి 'X' సంభావ్యతా విభాజనం. అయితేX విస్తృతిని కనుక్కోండి.

Sol:- అంకమధ్యమం $(\mu)=\sum_{i=-3}^{3} x_i P(X=x_i)$

$$=(-3)\left(\frac{1}{9}\right)+(-2)\left(\frac{1}{9}\right)+(-1)\left(\frac{1}{9}\right)+(0)\left(\frac{1}{3}\right)+(1)\left(\frac{1}{9}\right)+(2)\left(\frac{1}{9}\right)+(3)\left(\frac{1}{9}\right)$$

$$=\frac{1}{9}[-3-2-1+0+1+2+3]$$

$$\mu=\frac{1}{9}[0]=0$$

విస్తృతి $(\sigma^2)=\sum_{i=-3}^{3} x_i^2 P(X=x_i)-\mu^2$

$$=(-3)^2\left(\frac{1}{9}\right)+(-2)^2\left(\frac{1}{9}\right)+(-1)^2\left(\frac{1}{9}\right)+(0)^2\left(\frac{1}{3}\right)+(1)^2\left(\frac{1}{9}\right)+(2)^2\left(\frac{1}{9}\right)+(3)^2\left(\frac{1}{9}\right)-0$$

$$=(9)\left(\frac{1}{9}\right)+4\left(\frac{1}{9}\right)+\left(\frac{1}{9}\right)+0+\left(\frac{1}{9}\right)+4\left(\frac{1}{9}\right)+9\left(\frac{1}{9}\right)$$

$$=1+\frac{4}{9}+\frac{1}{9}+\frac{1}{9}+\frac{4}{9}+1$$

$$\sigma^2=2+\frac{4+1+1+4}{9}=2+\frac{10}{9}=\frac{28}{9}$$

11.

X=x	-2	-1	0	1	2	3
P(X=x)	0.1	k	0.2	2k	0.3	k

అనేది ఒక యాదృచ్ఛిక చలరాశి X సంభావ్యతా విభాజనం. 'k' విలువ, X విస్తృతిలను కనుక్కోండి.

Sol:- అన్ని సంభావ్యతల మొత్తం= 1

0.1+k+0.2+2k+0.3+k=1

4k+0.6=1

4k=1-0.6

4k=0.4

$$k=\frac{0.4}{4}=0.1$$

అంకమధ్యమం $(\mu)=\sum x_i.P(X=x_i)$

$$=(-2)(0.1)+(-1)(k)+(0)(0.2)+(1)(2k)+2(0.3)+3(k)$$

$$=-0.2-k+0+2k+0.6+3k$$

$$=4k+0.4$$

$$=4(0.1)+0.4$$

$= 0.4 + 0.4$

$\therefore\ \mu = 0.8$

విస్తృతి $(\sigma^2) = \sum x_i^2 . P(X = x_i) - \mu^2$

$= (-2)^2 (0.1) + (-1)^2 (k) + (0)^2 (0.2) + (1)^2 (2k) + (2)^2 (0.3) + (3)^2 (k) - (0.8)^2$

$= 4(0.1) + k + 0 + 1(2k) + 4(0.3) + 9k - 0.64$

$= 0.4 + k + 2k + 1.2 + 9k - 0.64$

$= 12k + 0.96$

$= 12(0.1) + 0.96$

$= 1.2 + 0.96$

విస్తృతి $(\sigma^2) = 2.16$

Problems for Practice

(i) $P(X = k) = \dfrac{(k+1)c}{2^k}$, $k = 0, 1, 2 ....$ సంభావ్యతా విభాజనంలో X యాదృచ్ఛిక చలరాశి అయితే 'c' విలువను కనుక్కోండి.

Ans:- $c = \dfrac{1}{4}$ (Hint : Refer Example 3 from text book page No. 355)

❖ ❖ ❖ ❖ ❖