22 સંભાવના

યાદચ્છિક પ્રયોગ :

જે પ્રયોગનાં તમામ શક્ય પરિણામો અગાઉથી જ્ઞાત હોવા છતાં કયું પરિણામ મળશે તે પ્રયોગ સંપન્ન થયા પછી જ જ્ઞાત થાય તેવા પ્રયોગને યાદચ્છિક પ્રયોગ કહે છે.

નિદર્શાવકાશ :

યાદચ્છિક પ્રયોગનાં તમામ શક્ય પરિણામોના ગણને નિદર્શાવકાશ કહે છે.

ઘટના :

નિદર્શાવકાશના ઉપગણને ઘટના કહે છે.

મૂળભૂત ઘટનાઓ :

ધારો કે U એક સાન્ત નિદર્શાવકાશ છે અને $U = \{x_1, x_2, ..., x_n\}$. U ના એકાકી ઉપગણો $\{x_i\}$ જ્યાં $i = 1, 2, ..., n$ ને મૂળભૂત ઘટનાઓ કહે છે.

અશક્ય ઘટના :

નિદર્શાવકાશ U ના ઉપગણ $\emptyset$ ને અશક્ય ઘટના કહે છે.

ચોક્કસ ઘટના :

નિદર્શાવકાશ U ના ઉપગણ U ને ચોક્કસ ઘટના કહે છે.

પૂરક ઘટના :

ઘટના A ના ઘટકો સિવાયના નિદર્શાવકાશ U ના તમામ ઘટકોથી બનતા ગણને A ની પૂરકઘટના કહે છે.

$A' = \{x \mid x \in U, x \notin A\}$

યોગ ઘટના :

$A, B \in P(U)$. ધારો કે A અને B ઘટનાઓ છે. A માં હોય અથવા B માં હોય તેવા તમામ ઘટકોથી બનતા ગણને ઘટનાઓ A અને B ની યોગ-ઘટના કહે છે. તેને સંકેતમાં $A \cup B$ વડે દર્શાવાય છે.

$A \cup B = \{x \mid x \in U, x \in A$ અથવા $x \in B\}$

છેદ ઘટના :

$A, B \in P(U)$. ધારો કે A અને B ઘટનાઓ છે. A માં હોય અને B માં હોય તેવા તમામ ઘટકોથી બનતા ગણને ઘટનાઓ A અને B ની છેદ-ઘટના કહેવાય છે. તેને સંકેતમાં $A \cap B$ વડે દર્શાવાય છે.

$A \cap B = \{x \mid x \in U, x \in A$ અને $x \in B\}$

પરસ્પર નિવારક ઘટનાઓ :

$A, B \in P(U)$. જો ઘટના A અને B માટે, $A \cap B = \emptyset$ હોય, તો A અને B ને પરસ્પર નિવારક ઘટનાઓ કહે છે.

નિ:શેષ ઘટનાઓ :

$A, B \in P(U)$. ઘટનાઓ A અને B માટે, જો $A \cup B = U$ હોય, તો A અને B ને નિ:શેષ ઘટનાઓ કહેવાય.

પરસ્પર નિવારક અને નિ:શેષ ઘટનાઓ :

$A, B \in P(U)$ માટે જો $A \cap B = \emptyset$ અને $A \cup B = U$ હોય, તો ઘટનાઓ A અને B ને પરસ્પર નિવારક અને નિ:શેષ ઘટનાઓ કહે છે.

ગણવિધેય :

જો U અરિક્ત સાન્ત નિદર્શાવકાશ હોય અને S તેનો ઘાતગણ હોય, તો વિધેય $T : S \rightarrow R$ ને વાસ્તવિક ગણવિધેય કહે છે.

યોગનીય ગણવિધેય :

ગણવિધેય $T : S \rightarrow R$ માં, $\forall A_1\ A_2 \in S, A_1 \cap A_2 = \emptyset$ માટે $T(A_1 \cup A_2) = T(A_1) + T(A_2)$ થાય, તો T ને S પરનું યોગનીય ગણવિધેય કહે છે.

સંભાવનાની પૂર્વધારણાયુક્ત વ્યાખ્યા :

U એ સાન્ત નિદર્શાવકાશ છે. S તેનો ઘાતગણ છે. વિધેય $P : S \rightarrow R$ નીચેની પૂર્વધારણાઓનું પાલન કરે તો P ને **સંભાવના વિધેય** કહે છે.

પૂર્વધારણા 1 : $\forall A \in S, P(A) \geq 0$

પૂર્વધારણા 2 : $P(U) = 1$

પૂર્વધારણા 3 : $\forall A_1\ A_2 \in S, A_1 \cap A_2 = \emptyset \Rightarrow P(A_1 \cup A_2) = P(A_1) + P(A_2)$

P એ સંભાવના વિધેય હોય તો P(A)ને ઘટના A ની સંભાવના કહે છે.

સંભાવનાની પ્રશિષ્ટ વ્યાખ્યા :

યાદચ્છિક પ્રયોગમાં પ્રાથમિક સમસંભાવી ઘટનાઓ n હોય, તો તે પૈકીની r પ્રાથમિક સમસંભાવી ઘટનાઓ ઘટના A ઉદ્ભવે તેની સંભાવના $\frac{r}{n}$ થાય. $0 \leq r \leq n$

જો $n(U) = n, n(A) = r$ તો

$$P(A) = \frac{r}{n}$$

તફાવત ઘટના :

$A, B \in P(U)$. A માં હોય પણ B માં ન હોય તેવા U ના ઘટકોથી બનતા ગણને A અને B ની તફાવત-ઘટના કહેવાય છે. તેને સંકેતમાં $A - B$ વડે દર્શાવાય છે.

- $P(A') = 1 - P(A)$
- $P(\emptyset) = 0$
- $P(U) = 1$
- જો $A \subset B$ હોય તો $P(B - A) = P(B) - P(A)$
- $P(A - B) = P(A \cap B') = P(A) - P(A \cap B)$ (A અને B પૈકી માત્ર ઘટના A ઉદ્ભવે તેની સંભાવના)
- $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$
- જો $A \subset B$ હોય તો $P(A) \leq P(B)$
- $0 \leq P(A) \leq 1$
- A અને B પૈકી માત્ર એક જ ઘટના ઉદ્ભવે તેની સંભાવના,
  $P(A \Delta B) = P(A) + P(B) - 2P(A \cap B)$
- ત્રણ ઘટના A, B, C પૈકી બરાબર બે જ ઘટના ઉદ્ભવે તેની સંભાવના
  $P(A \cap B) + P(B \cap C) + P(C \cap A) - 3P(A \cap B \cap C)$
- A, B અને C પૈકી ઓછામાં ઓછી બે ઘટનાઓ ઉદ્ભવે તેની સંભાવના
  $P(A \cap B) + P(B \cap C) + P(C \cap A) - 2P(A \cap B \cap C)$
- ઘટનાઓ A, B અને C પૈકીની માત્ર એક જ ઘટના ઉદ્ભવે તેની સંભાવના
  $P(A) + P(B) + P(C) - 2P(A \cap C) - 2P(B \cap C) - 2P(C \cap A) + 3P(A \cap B \cap C)$

શરતી સંભાવના :

ધારો કે A અને B એ સાન્ત નિદર્શાવકાશ U ના ઘાતગણ S ની ઘટનાઓ છે. $P(B) \neq 0$, ઘટના B ને સાપેક્ષ ઘટના A ની શરતી સંભાવના

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

સંભાવનાનો ગુણાકારનો નિયમ :

$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B \mid A)$ (જો $P(A) \neq 0$)

$P(A \cap B) = P(B) \cdot P(A \mid B)$ (જો $P(B) \neq 0$)

જો A, B અને C એ ત્રણ ઘટનાઓ હોય, તો

$P(A \cap B \cap C) = P(A) \cdot P(B \mid A) \cdot P\left(C \middle| (A \cap B)\right)$

પૂર્ણ સંભાવના માટેનું પ્રમેય :

ધારો કે B_1 અને B_2 પરસ્પર નિવારક અને નિ:શેષ ઘટનાઓ છે તથા $P(B_1) \neq 0$ અને $P(B_2) \neq 0$ તો S ની કોઈ ઘટના A માટે

$P(A) = P(B_1) \cdot P(A \mid B_1) + P(B_2) \cdot P(A \mid B_2)$

બેયઝનો નિયમ :

ધારો કે B_1, B_2 અને B_3 પરસ્પર નિવારક અને નિ:શેષ ઘટનાઓ છે. જો A ઘટના એવી હોય કે જેથી $P(A) \neq 0$ તો

$$P\left(B_i \middle| A\right) = \frac{P\left(A \middle| B_i\right) P(B_i)}{P\left(A \middle| B_1\right) P(B_1) + P\left(A \middle| B_2\right) P(B_2) + P\left(A \middle| B_3\right) P(B_3)},\ i = 1, 2, 3$$

નિરપેક્ષ ઘટનાઓ :

ઘટના A નો ઉદ્‌ભવ થવા માટેની સંભાવના એ ઘટના B ના ઉદ્‌ભવ થવા માટેની સંભાવના પર આધારિત ન હોય, તો A અને B ને નિરપેક્ષ ઘટનાઓ કહે છે.

$P(A \mid B) = P(A)$ તથા $P(B \mid A) = P(B)$

- જો $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$ હોય, તો A અને B ને નિરપેક્ષ ઘટનાઓ કહે છે.

યાદચ્છિક ચલ :

ધારો કે U એક યાદચ્છિક પ્રયોગ સાથે સંકળાયેલ નિદર્શાવકાશ છે. U પરના વ્યાખ્યાયિત વાસ્તવિક વિધેય $X : U \rightarrow R$ ને યાદચ્છિક ચલ કહે છે.

યાદચ્છિક ચલનું સંભાવના વિતરણ :

ધારો કે $X : U \rightarrow R$ એક યાદચ્છિક ચલ છે. ધારો કે યાદચ્છિક ચલ X નો વિસ્તાર $\{x_1, x_2, ..., x_n\}$ છે. ધારો કે X એ ધારણ કરેલી કિંમત x_i ની સંભાવના $p(x_i) = P(X = x_i)$ છે.

જો (i) $p(x_i) \geq 0,\ i = 1, 2, ..., n$

(ii) $\sum_{i=1}^{n} p(x_i) = 1$ હોય, તો વાસ્તવિક કિંમતો $x_1, x_2, ... x_n$ માટે

$\{p(x_1), p(x_2), ..., p(x_n)\}$ ને યાદચ્છિક ચલ X નું સંભાવના વિતરણ કહે છે.

સંભાવના વિતરણ નીચે મુજબ લખી શકાય :

$\mathbf{X = x}$	x_1	x_2	x_3	...	x_{n-1}	x_n
$\boldsymbol{p(x)}$	$p(x_1)$	$p(x_2)$	$p(x_3)$	...	$p(x_{n-1})$	$p(x_n)$

(i)

જ્યાં પ્રત્યેક x_i માટે $p(x_i) \geq 0$ તથા $\sum p(x_i) = 1$

મધ્યક :

ધારો કે યાદચ્છિક ચલ X નું સંભાવના વિતરણ (i) મુજબ વ્યાખ્યાયિત છે. X ની ગાણિતિક અપેક્ષા $E(x)$ વડે દર્શાવાય છે.

$$E(x) = \sum_{i=1}^{n} x_i\ p(x_i)$$

તેને X નો મધ્યક પણ કહે છે. તેને સંકેતમાં E(X) અથવા μ વડે પણ દર્શાવાય છે.

વિચરણ :

$$V(X) = \sigma_X^2 = E(X^2) - [E(X)]^2$$

$$= \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \; p(x_i) - \left[\sum_{i=1}^{n} x_i \; p(x_i)\right]^2$$

પ્રમાણિત વિચલન :

યાદચ્છિક ચલ X ના વિચરણ σ_X^2 ના ધન વર્ગમૂળને X નું પ્રમાણિત વિચલન કહે છે. તેને સંકેતમાં σ_X અથવા $\sqrt{V(X)}$ વડે દર્શાવાય છે.

બર્નુલી પ્રયત્નો :

કોઈ એક યાદચ્છિક પ્રયોગનાં બે શક્ય પરિણામો સફળતા (S) અને નિષ્ફળતા (F) છે. જો આ પ્રયોગના n વખતના પુનરાવર્તન પૈકીના દરેક પ્રયત્ને સફળતા મળવાની સંભાવના p અચળ $(0 < p < 1)$ હોય, તો આવા પ્રયત્નોને **બર્નુલી પ્રયત્નો** કહે છે.

ધારો કે જેની સફળતાની સંભાવના p હોય તેવા યાદચ્છિક પ્રયોગના **બર્નુલી પ્રયત્નોની** શ્રેણીમાં X સફળતાની સંખ્યા દર્શાવે છે.

યાદચ્છિક ચલ X નું સંભાવના વિતરણ નીચેના સૂત્ર દ્વારા વ્યાખ્યાયિત થાય છે :

$$p(x) = P(X = x) = \binom{n}{x} p^x \cdot q^{n-x}, \quad x = 0, 1, 2, ..., n.$$

જ્યાં $0 < p < 1$ અને $q = 1 - p$

અહીં મળતા સંભાવના વિતરણને **દ્વિપદી વિતરણ** કહે છે અને યાદચ્છિક ચલ x ને દ્વિપદી યાદચ્છિક ચલ કહે છે.

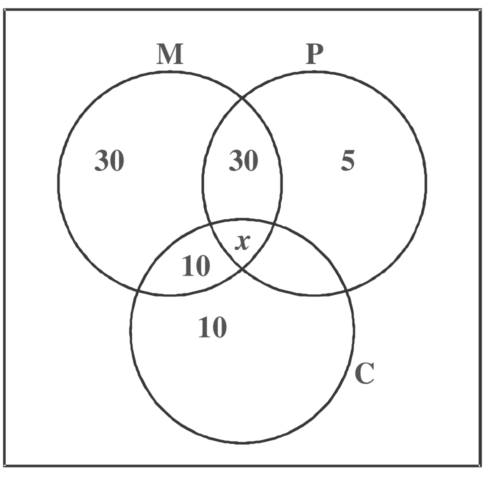
- પ્રચલો n અને p વાળા દ્વિપદી યાદચ્છિક ચલ x ના મધ્યક અને વિચરણ અનુક્રમે np અને npq થાય.

બહુવિકલ્પી પ્રશ્નો

(1) એક વર્ગખંડમાં 125 વિદ્યાર્થીઓ છે. તે પૈકી 90 વિદ્યાર્થીઓ ગણિતશાસ્ત્ર વિષયમાં રસ ધરાવે છે. 75 વિદ્યાર્થીઓ ભૌતિક વિજ્ઞાન વિષયમાં રસ ધરાવે છે. 60 વિદ્યાર્થીઓ રસાયણ વિજ્ઞાન વિષયમાં રસ ધરાવે છે. 30 વિદ્યાર્થીઓ માત્ર ગણિતશાસ્ત્ર અને ભૌતિક વિષયમાં રસ ધરાવે છે. 40 વિદ્યાર્થીઓ ભૌતિક વિજ્ઞાન અને રસાયણ વિજ્ઞાનમાં રસ ધરાવે છે. 10 વિદ્યાર્થીઓ માત્ર ગણિતશાસ્ત્ર અને રસાયણ વિજ્ઞાનમાં રસ ધરાવે છે. દરેક વિદ્યાર્થીને ઓછામાં ઓછો એક વિષયમાં રસ છે. યાદચ્છિક રીતે પસંદ કરેલ વિદ્યાર્થી ત્રણેય વિષયમાં રસ ધરાવતો હોય તેની સંભાવના ...... છે.

(A) $\frac{10}{125}$ (B) $\frac{2}{5}$ (C) $\frac{4}{25}$ (D) $\frac{1}{5}$

ઉકેલ :



આકૃતિ 22.1

M = પસંદ થયેલ વિદ્યાર્થીઓ ગણિતશાસ્ત્રમાં રસ ધરાવતા હોય

P = પસંદ થયેલ વિદ્યાર્થીઓ ભૌતિક વિજ્ઞાનમાં રસ ધરાવતા હોય

C = પસંદ થયેલ વિદ્યાર્થીઓ રસાયણ વિજ્ઞાનમાં રસ ધરાવતા હોય

ધારો કે $n(M \cap P \cap C) = x$

$P(M \cup P \cup C) = P(M) + P(P) + P(C) - P(M \cap P) - P(M \cap C) - P(P \cap C) + P(M \cap P \cap C)$

$\therefore \quad 1 = \frac{90}{125} + \frac{75}{125} + \frac{60}{125} - \frac{(30+x)}{125} - \frac{(10+x)}{125} - \frac{40}{125} + \frac{x}{125}$

$\therefore \quad 1 = \frac{145-x}{125}$

$\therefore \quad x = 20$

$\therefore \quad P(M \cap P \cap C) = \frac{r}{n} = \frac{20}{125} = \frac{4}{25}$ **જવાબ : (C)**

(2) જો $P(A \cup B) = \frac{1}{2}$ તથા $P(A') = \frac{3}{4}$ તો $P(A' \cap B) = ...$

(A) $\frac{1}{4}$ (B) $-\frac{1}{2}$ (C) $\frac{3}{4}$ (D) 0

ઉકેલ : $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

$\therefore \quad \frac{1}{2} = \left(1 - \frac{3}{4}\right) + P(B) - P(A \cap B)$

$\therefore \quad \frac{1}{2} = \frac{1}{4} + P(A' \cap B)$

$\therefore \quad P(A' \cap B) = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$ **જવાબ : (A)**

(3) 8 છોકરા અને 2 છોકરીઓની હારમાં ગોઠવણી કરતાં કોઈ પણ બે છોકરીઓ પાસપાસે ન આવે તે ઘટનાની સંભાવના ...... છે.

(A) $\frac{1}{5}$ (B) $\frac{4}{5}$ (C) $-\frac{1}{4}$ (D) $\frac{5}{4}$

ઉકેલ : કુલ ગોઠવણીની સંખ્યા = 10!

છોકરીઓ પાસપાસે હોય તેવી ઘટના A ના ઘટકોની સંખ્યા = $2 \cdot 9!$

$\therefore \quad P(A) = \frac{2 \cdot 9!}{10!} = \frac{2 \cdot 9!}{10 \cdot 9!} = \frac{1}{5}$

$\therefore$ કોઈ પણ બે છોકરીઓ પાસપાસે ન હોય તેવી ઘટનાની સંભાવના = $1 - \frac{1}{5} = \frac{4}{5}$ **જવાબ : (B)**

(4) યાદૃચ્છિક રીતે પસંદ કરેલ લીપ વર્ષમાં 53 રવિવાર હોય, તેની સંભાવના.

(A) $\frac{1}{365}$ (B) $\frac{53}{366}$ (C) $\frac{2}{7}$ (D) $\frac{1}{7}$

ઉકેલ : લીપ વર્ષમાં 366 દિવસ હોય અને તેથી તેમાં 52 અઠવાડિયાં અને 2 સળંગ દિવસ હોય, જેથી 52 રવિવાર મળે જ. વધારા બે દિવસ ક્રમિક રીતે. નીચે પ્રમાણે 7 રીતે આવે.

(1) રવિવાર, સોમવાર (2) સોમવાર, મંગળવાર

(3) મંગળવાર, બુધવાર (4) બુધવાર, ગુરુવાર

(5) ગુરુવાર, શુક્રવાર (6) શુક્રવાર, શનિવાર

(7) શનિવાર, રવિવાર

આમ, કુલ 7 વિકલ્પ બને તેમાંથી રવિવાર આવે તેવા બે વિકલ્પ છે (1) અને (7).

આથી, લીપ વર્ષમાં 53 રવિવાર હોય તેની સંભાવના $\frac{2}{7}$. **જવાબ : (C)**

(5) એક સમતોલ પાસાને ત્રણ વખત ઉછાળવાના યાદચ્છિક પ્રયોગમાં બધા જ પાસા પર સમાન અંક ન મળે તેની સંભાવના ...... છે.

(A) $\frac{6}{216}$ (B) $\frac{35}{16}$ (C) $\frac{1}{6}$ (D) $\frac{35}{36}$

ઉકેલ : પરિણામોની કુલ સંખ્યા $n = 6 \times 6 \times 6 = 216$

બધાં જ પાસાં પર સમાન અંક મળે, તે વિકલ્પ (1, 1, 1), (2, 2, 2), (3, 3, 3), (4, 4, 4), (5, 5, 5), (6, 6, 6) કુલ 6 છે.

$\therefore$ સમાન અંક ન મળે તેવા વિકલ્પોની સંખ્યા = 216 – 6 = 210. આથી, $r = 210$

$\therefore$ સંભાવના = $\frac{r}{n} = \frac{210}{216} = \frac{35}{36}$ **જવાબ : (D)**

(6) એક વર્ગખંડમાં 10 છોકરા અને 8 છોકરીઓ છે. યાદચ્છિક રીતે ત્રણ વિદ્યાર્થીઓની પસંદગી કરવાના પ્રયોગમાં 2 છોકરા અને એક છોકરીની પસંદગી થાય તે ઘટનાની સંભાવના ...... છે.

(A) $\frac{15}{34}$ (B) $\frac{5}{34}$ (C) $\frac{5}{34}$ (D) $\frac{1}{6}$

ઉકેલ : અહીં $n = \binom{18}{3} = \frac{18 \cdot 17 \cdot 16}{6} = 816$

A = બે છોકરા અને એક છોકરી પસંદ થાય તે ઘટના

$$P(A) = \frac{\binom{10}{2}\binom{8}{1}}{\binom{18}{3}} = \frac{45 \times 8}{816} = \frac{15}{34}$$ **જવાબ : (A)**

(7) કોઈ એક સ્પર્ધામાં એક ચોક્કસ ટીમની જીતવાની સંભાવના 0.7 છે. તેની હારવાની સંભાવના 0.2 છે અને મેચમાં પરિણામ ન મળે તેની સંભાવના 0.1. જો ટીમ ત્રણ વખત રમે તો તેમાં તેની ઓછામાં ઓછી બે વખત જીતવાની સંભાવના ...... છે. (ટીમ હારતી નથી.)

(A) 0.9 (B) 0.49 (C) 0.7 (D) 0.8

ઉકેલ : ધારો કે ઘટના W જીત તથા T એ પરિણામ નથી આવતું તેમ દર્શાવે છે.

તમામ ઘટનાઓ નિરપેક્ષ છે.

$P(WWT) + P(W\,T\,W) + P(TWW) + P(WWW)$

$= P(W) \cdot P(W) \cdot P(T) + P(W) \cdot P(T) \cdot P(W) + P(T)\,P(W)\,P(W) + P(W)P(W)P(W)$

$= \left(\frac{7}{10}\right)\left(\frac{7}{10}\right)\left(\frac{1}{10}\right) + \left(\frac{7}{10}\right)\left(\frac{1}{10}\right)\left(\frac{7}{10}\right) + \left(\frac{1}{10}\right)\left(\frac{7}{10}\right)\left(\frac{7}{10}\right) + \left(\frac{7}{10}\right)\left(\frac{7}{10}\right)\left(\frac{7}{10}\right)$

$= \frac{49}{1000} + \frac{49}{1000} + \frac{49}{1000} + \frac{343}{1000} = \frac{490}{1000} = 0.49$ **જવાબ : (B)**

(8) લીપ વર્ષ ન હોય તેવા વર્ષમાં 53 રવિવાર ન હોય તેની સંભાવના ...... છે.

(A) $\frac{1}{7}$ (B) $\frac{6}{7}$ (C) $\frac{52}{365}$ (D) $\frac{312}{365}$

ઉકેલ : વર્ષમાં કુલ 365 દિવસ = 52 અઠવાડિયાં + 1 દિવસ

1 દિવસ રવિવાર હોય તેની સંભાવના $\frac{1}{7}$ છે.

$\therefore$ રવિવાર ન હોય તેની સંભાવના $1 - \frac{1}{7} = \frac{6}{7}$ **જવાબ : (B)**

(9) ઘટનાઓ A, B, C પરસ્પર નિવારક છે.

$P(A) = \frac{3x+1}{3}$, $P(B) = \frac{1-x}{4}$ અને $P(C) = \frac{1-2x}{2}$ તો x ની શક્ય કિંમત ...... અંતરાલમાં હશે.

[AIEEE : 2003]

(A) $\left[\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right]$ (B) $\left[\frac{1}{3}, \frac{13}{3}\right]$ (C) [0, 1] (D) $\left[\frac{1}{3}, \frac{1}{2}\right]$

ઉકેલ : $0 \le P(A \cup B \cup C) \le 1$

$\therefore \ 0 \le P(A) + P(B) + P(C) \le 1$

$\therefore \ 0 \le \frac{3x+1}{3} + \frac{1-x}{4} + \frac{1-2x}{2} \le 1$

$\therefore \ 0 \le \frac{12x+4}{12} + \frac{3-3x}{12} + \frac{6-12x}{12} \le 1$

$\therefore \ 0 \le 13 - 3x \le 12$

$\therefore \ 0 \le 13 - 3x$	$13 - 3x \le 12$
$\therefore \ 3x \le 13$	$1 \le 3x$
$\therefore \ x \le \frac{13}{3}$	$\frac{1}{3} \le x$

$\therefore \ x \in \left[\frac{1}{3}, \frac{13}{3}\right]$ **જવાબ : (B)**

(10) એક વ્યક્તિ 4 પત્રો અને 4 કવર ઉપર સરનામા લખે છે. યાદચ્છિક રીતે પત્રોને કવરમાં મૂકે, તો ઓછામાં ઓછો એક પત્ર સાચા કવરમાં ન મૂકાય તે ઘટનાની સંભાવના ...... છે.

(A) $\frac{3}{4}$ (B) $\frac{1}{4}$ (C) $\frac{1}{24}$ (D) $\frac{23}{24}$

ઉકેલ : પત્રોની કુલ ગોઠવણીના પ્રકારની સંખ્યા $= {}_4P_4 = 4! = 24$
બધા જ પત્રો સાચા કવરમાં મૂકાય તેવી 1 જ ગોઠવણી થાય.

$\therefore$ ઓછામાં ઓછો એક પત્ર સાચા કવરમાં ન મૂકાય તેની સંભાવના $= 1 - \frac{1}{24} = \frac{23}{24}$ **જવાબ : (D)**

(11) બે સમતોલ પાસાને ઉછાળવાના પ્રયોગમાં બંને પાસા પર મળતા અંકોનો સરવાળો 10 કે તેથી વધુ થાય તે ઘટનાની સંભાવના ...... છે.

(A) $\frac{10}{36}$ (B) $\frac{1}{9}$ (C) $\frac{32}{36}$ (D) $\frac{1}{6}$

ઉકેલ : અહીં $n = 36$

A = {(5, 5), (5, 6), (6, 5), (6, 6), (6, 4), (4, 6)}

$\therefore \ r = 6$

$\therefore \ P(A) = \frac{r}{n} = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$ **જવાબ : (D)**

(12) સરખી રીતે ચીપેલા 52 પાનાંમાંથી બે પત્તાં યાદચ્છિક રીતે પસંદ કરવામાં આવે છે. પસંદ થયેલાં બે પત્તાંમાં એક રાજા અને એક રાણી હોય તેની સંભાવના ...... છે.

(A) $\frac{12}{52 \times 51}$ (B) $\frac{8}{663}$ (C) $\frac{1}{26}$ (D) $\frac{8}{52 \times 51}$

ઉકેલ : અહીં $n = \binom{52}{2}$, $r = \binom{4}{1}\binom{4}{1}$

$\therefore$ P(1 રાજા અને 1 રાણી) $= \frac{4 \times 4}{\binom{52}{2}} = \frac{16 \times 2}{52 \times 51} = \frac{8}{663}$ **જવાબ : (B)**

(13) A, B અને C ઘટનાઓ પરસ્પર નિવારક અને નિ:શેષ ઘટનાઓ છે. જો 3P(A) = P(B) = 2P(C) હોય, તો P(B) = ...

(A) $\frac{6}{11}$ (B) $\frac{2}{11}$ (C) $\frac{3}{11}$ (D) $\frac{1}{3}$

ઉકેલ : અહીં P(A) + P(B) + P(C) = 1 (1)

3P(A) = P(B) તથા P(B) = 2P(C)

$P(A) = \frac{1}{3}P(B)$ $P(C) = \frac{1}{2}P(B)$

પરિણામ (1) પરથી, $\frac{1}{3}P(B) + P(B) + \frac{1}{2}P(B) = 1$

$\therefore \frac{2P(B) + 6P(B) + 3P(B)}{6} = 1$

$\therefore \frac{11P(B)}{6} = 1$

$\therefore P(B) = \frac{6}{11}$ **જવાબ : (A)**

(14) ઘટના A અને B માટે P(A) > 0 અને P(B) ≠ 1 તો P(A' | B') = ...

(A) 1 − P(A | B') (B) 1 − P(A | B) (C) $\frac{1 - P(A \cup B)}{P(B')}$ (D) $\frac{P(B')}{P(A)}$

ઉકેલ : $P\left(A'|B'\right) = \frac{P(A' \cap B')}{P(B')} = \frac{1 - P(A \cup B)}{P(B')}$ **જવાબ : (C)**

(15) એક સંગીત-સ્પર્ધામાં 5 પુરુષ, 2 સ્ત્રી અને 3 બાળકોએ ભાગ લીધો. ત્રણ વ્યક્તિઓને શ્રેષ્ઠ સંગીતનું પારિતોષિક આપવામાં આવે, તેમાં બરાબર બે બાળક પારિતોષિક માટે પસંદ થાય તેની સંભાવના ...... છે.

(A) $\frac{7}{40}$ (B) $\frac{2}{3}$ (C) $\frac{2}{10}$ (D) આ પૈકી એક પણ નહિ.

ઉકેલ : અહીં $n = \binom{10}{3} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8}{6} = 120$, $r = \binom{3}{2}\binom{7}{1}$

ઘટનાની સંભાવના $= \frac{\binom{3}{2}\binom{7}{1}}{\binom{10}{3}} = \frac{21}{120} = \frac{7}{40}$ **જવાબ : (A)**

(16) એક સમતોલ પાસાને ઉછાળવાની ઘટનામાં ઘટના A માં 3 થી વધુ અંક મળે તથા ઘટના B માં 5 થી ઓછા અંક મળે તો P(A ∪ B) = ... [AIEEE : 2008]

(A) $\frac{2}{5}$ (B) $\frac{3}{5}$ (C) 0 (D) 1

ઉકેલ : A = {4, 5, 6}, B = {1, 2, 3, 4}

A ∪ B = {1, 2, 3, 4, 5, 6} = U (પાસાં પરથી 1 થી 6 પૂર્ણાંક જ મળે.)

$\therefore$ P(A ∪ B) = P(U) = 1 **જવાબ : (D)**

(17) ઘટના A અને B સંદર્ભમાં જો $P(A \cup B) = \frac{3}{4}$, $P(A \cap B) = \frac{1}{4}$, $P(A') = \frac{2}{3}$ તો $P(A' \cap B)$ = ...

[AIEEE : 2002]

(A) $\frac{5}{12}$ (B) $\frac{3}{8}$ (C) $\frac{4}{5}$ (D) $\frac{5}{4}$

ઉકેલ : અહીં $P(A') = \frac{2}{3}$. આથી, $P(A) = 1 - P(A') = 1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$

હવે $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

$\therefore \quad \frac{3}{4} = \frac{1}{3} + P(B) - \frac{1}{4}$. આથી, $P(B) = \frac{2}{3}$

$P(A' \cap B) = P(B) - P(A \cap B) = \frac{2}{3} - \frac{1}{4} = \frac{5}{12}$ **જવાબ : (A)**

(18) કોઈ એક રેસમાં 5 ઘોડા છે. કોઈ વ્યક્તિ A બે ઘોડા યાદચ્છિક રીતે પસંદ કરે છે અને તેના પર શરત લગાવે છે. વ્યક્તિ A એ પસંદ કરેલ ઘોડાની જીતવાની સંભાવના ...... છે. [AIEEE : 2003]

(A) $\frac{3}{5}$ (B) $\frac{1}{5}$ (C) $\frac{2}{5}$ (D) $\frac{4}{5}$

ઉકેલ : સ્પર્ધામાં એક જ ઘોડો જીતશે.

કુલ $n = \binom{5}{1} = 5$ છે.

પસંદ થયેલ ઘોડા પૈકી રેસ જીતે તેની સંભાવના $\binom{2}{1}$

$\therefore$ પસંદ થયેલ ઘોડો જીતે તેની સંભાવના $= \frac{r}{n} = \frac{2}{5}$ **જવાબ : (C)**

(19) A, B અને C વિદ્યાર્થીઓને ગણિતનો કોયડો આપવામાં આવે છે. A, B, C કોયડાનો ઉકેલ મેળવે તેની સંભાવના અનુક્રમે $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$ અને $\frac{1}{4}$ છે. કોયડાનો ઉકેલ મળે તેની સંભાવના ...... છે. [AIEEE : 2002]

(A) $\frac{3}{4}$ (B) $\frac{1}{2}$ (C) $\frac{2}{3}$ (D) $\frac{1}{3}$

ઉકેલ : કોયડાનો ઉકેલ ન મળે તેવી ઘટના $A' \cap B' \cap C'$ છે.

$P(A' \cap B' \cap C') = P(A') \cdot P(B') \cdot P(C')$

$= \left(1-\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{1}{3}\right)\left(1-\frac{1}{4}\right) = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{4} = \frac{1}{4}$

$\therefore$ ઉકેલ મળે તેની સંભાવના $= 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$ **જવાબ : (A)**

(20) વ્યક્તિ A સાચું બોલે તેની સંભાવના $\frac{4}{5}$ છે. વ્યક્તિ B સાચું બોલે તેની સંભાવના $\frac{3}{4}$ છે, તો બંને વ્યક્તિ પરસ્પર વિરોધાભાસી બોલે તે ઘટનાની સંભાવના ...... છે.

(A) $\frac{7}{20}$ (B) $\frac{1}{5}$ (C) $\frac{3}{20}$ (D) $\frac{4}{5}$

ઉકેલ : પરસ્પર વિરોધાભાસી બોલે તે ઘટનાની સંભાવના

$= P(A \cap B') + P(A' \cap B)$

$= P(A) \cdot P(B') + P(A')P(B)$

$= P(A)[1 - P(B)] + [1 - P(A)] \cdot P(B)$

$= \frac{4}{5}\left(1 - \frac{3}{4}\right) + \left(1 - \frac{4}{5}\right) \cdot \frac{3}{4} = \frac{4}{20} + \frac{3}{20} = \frac{7}{20}$ **જવાબ : (A)**

(21) જો $P(A) = 0.35$, $P(B) = 0.45$, $P(A \cup B) = 0.65$ તો $P(A | B) = ...$

(A) $\frac{1}{3}$ (B) $\frac{2}{3}$ (C) 0.1 (D) 1

ઉકેલ : $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

$\therefore\ 0.65 = 0.35 + 0.45 - P(A \cap B)$

$\therefore\ P(A \cap B) = 0.15$

હવે, $P(A | B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{0.15}{0.45} = \frac{1}{3}$ **જવાબ : (A)**

(22) $P\left((A \cup A')|B\right) = ...$

(A) $P(A | B) + P(A' | B)$ (B) $P(B)$ (C) 0 (D) 1

ઉકેલ : $A \cup A' = U$

$\therefore\ P\left((A \cup A')|B\right) = P\left(U|B\right) = 1$ **જવાબ : (D)**

(23) ઘટનાઓ A અને B માટે $P(A) = \frac{1}{8}$, $P(A | B) = \frac{1}{4}$, $P(B | A) = \frac{1}{5}$, તો $P(B) = ...$

(A) $\frac{1}{10}$ (B) $\frac{1}{20}$ (C) $\frac{1}{2}$ (D) $\frac{1}{4}$

ઉકેલ : $P\left(A|B\right) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$, $P\left(B|A\right) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$

$\therefore\ P(A | B) \cdot P(B) = P(B | A) \cdot P(A)$

$\therefore\ \frac{1}{4} \cdot P(B) = \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{8}$

$P(B) = \frac{1}{10}$ **જવાબ : (A)**

(24) તોલમાપ ખાતાના અધિકારીએ એક કંપનીના 100 તોલમાપ યંત્રનું પરીક્ષણ કરતાં માલૂમ પડ્યું કે 10 તોલમાપ યંત્રમાં A પ્રકારની ખામી છે. 5 એક તોલમાપ યંત્રમાં B પ્રકારની ખામી છે. જ્યારે 2 તોલમાપ યંત્રમાં બંને પ્રકારની ખામી છે. યાદૃચ્છિક રીતે પસંદ કરેલ તોલમાપ યંત્રમાં A પ્રકારની ખામી છે. તેમ આપેલ હોય, તો તેમાં B પ્રકારની ખામી હોય તેની સંભાવના ...... છે.

(A) 0.1 (B) 0.2 (C) 0.3 (D) $\frac{1}{20}$

ઉકેલ : $P(A) = \frac{10}{100} = 0.1$, $P(B) = \frac{5}{100} = 0.05$, $P(A \cap B) = \frac{2}{100} = 0.02$

$P\left(B|A\right) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{0.02}{0.1} = 0.2$ **જવાબ : (B)**

(25) એક ટ્રાવેલ એજન્સીની ખાનગી બસનો એક રૂટ પરનો સર્વે કરતાં માલૂમ પડ્યું કે 91 % બસ સમયસર આગમન કરે છે અને 95 % બસ સમયસર પ્રસ્થાન કરે છે. જ્યારે 85 % બસ સમયસર આગમન અને પ્રસ્થાન બંને કરે છે. સમયસર પ્રસ્થાન કરતી બસ સમયસર આગમન ન કરે તેની સંભાવના ...... છે.

(A) $\frac{81}{100}$ (B) $\frac{85}{100}$ (C) $\frac{2}{19}$ (D) 1

ઉકેલ : A : બસ સમયસર આગમનની ઘટના, B : બસ સમયસર પ્રસ્થાનની ઘટના. માંગેલ ઘટના $A' | B$ છે.

$P(A) = \frac{91}{100}$, $P(B) = \frac{95}{100}$, $P(A \cap B) = \frac{85}{100}$

$P\left(A'|B\right) = \frac{P(A' \cap B)}{P(B)} = \frac{P(B) - P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{\frac{95}{100} - \frac{85}{100}}{\frac{95}{100}} = \frac{10}{95} = \frac{2}{19}$ **જવાબ : (C)**

(26) 52 પત્તાંના ઢગમાંથી યાદચ્છિક રીતે એક પછી એક ત્રણ પત્તાં પસંદ કરવામાં આવે છે. જો ઘટનાઓ A_1 પસંદ થયેલ પ્રથમ પત્તું લાલ રંગનો એક્કો હોય, A_2 પસંદ થયેલ બીજી પત્તું ગુલામ અથવા બાદશાહ હોય અને A_3 ત્રીજું પસંદ થયેલ પત્તાં પરનો ક્રમાંક 3 અને 7 વચ્ચેનો હોય, તો $P(A_1 \cap A_2 \cap A_3)$ = ... (પૂરવણી વગરની ઘટનાઓ છે.)

(A) 1 (B) $\frac{96}{2250}$ (C) $\frac{8}{5525}$ (D) $\frac{96}{521}$

ઉકેલ : $P(A_1) = \frac{2}{52}$ $P(A_2|A_1) = \frac{8}{51}$ $P(A_3|A_1 \cap A_2) = \frac{12}{50}$

$P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = P(A_1) \cdot P(A_2|A_1) \cdot P(A_3|A_1 \cap A_2) = \frac{2}{52} \cdot \frac{8}{51} \cdot \frac{12}{50} = \frac{8}{5525}$ **જવાબ : (C)**

(27) એક બટવામાં 6 ચાંદીના સિક્કાઓ અને 3 સોનાના સિક્કાઓ છે. બીજા બટવામાં 4 ચાંદીના અને 5 સોનાના સિક્કાઓ છે. એક બટવાની યાદચ્છિક પસંદગી કરવામાં આવે છે અને તેમાંથી એક સિક્કો પસંદ કરવામાં આવે છે. આ સિક્કો ચાંદીનો હોય તે ઘટનાની સંભાવના ...... છે.

(A) $\frac{3}{7}$ (B) $\frac{1}{3}$ (C) $\frac{4}{18}$ (D) $\frac{5}{9}$

ઉકેલ : ઘટના B_1 : પ્રથમ બટવાની પસંદગી દર્શાવે તો $P(B_1) = \frac{1}{2}$

ઘટના B_2 : દ્વિતીય બટવાની પસંદગી દર્શાવે તો $P(B_2) = \frac{1}{2}$

A : પસંદ થયેલ સિક્કો ચાદીનો હોય

$\therefore$ $P(A|B_1) = \frac{6}{9}$ $P(A|B_2) = \frac{4}{9}$

$\therefore$ $P(A) = P(B_1) \cdot P(A | B_1) + P(B_2) \cdot P(A | B_2) = \frac{1}{2} \cdot \frac{6}{9} + \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{9} = \frac{6}{18} + \frac{4}{18} = \frac{10}{18} = \frac{5}{9}$ **જવાબ : (D)**

(28) $P(A') = 0.15$, $P(A \cup B) = 0.95$. A અને B નિરપેક્ષ ઘટનાઓ છે. $P(B | A)$ = ...

(A) $\frac{1}{3}$ (B) $\frac{2}{3}$ (C) 0.95 (D) 0.15

ઉકેલ : $P(B | A) = P(B)$ (A, B નિરપેક્ષ છે.)

$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

$\therefore$ $0.95 = (1 - 0.15) + P(B) - (1 - 0.15) \cdot P(B)$

$\therefore$ $0.95 = 0.85 + 0.15\ P(B)$

$\therefore$ $P(B) = \frac{2}{3}$ **જવાબ : (B)**

(29) એક યાદચ્છિક ચલ X નો મધ્યક $E(X) = 5$ અને પ્રમાણિત વિચલન $\sigma_X = 3$ છે, તો $E(2X + 3)^2$ = ...

(A) 502 (B) 205 (C) 360 (D) 302

ઉકેલ : $\sigma_X^2 = E(X^2) - [E(X)]^2$

$\therefore$ $9 = E(X^2) - 5^2$

$\therefore$ $E(X^2) = 34$

હવે, $E((2X + 3)^2) = E(4X^2 + 12X + 9)$

$= 4E(X^2) + 12E(X) + 9$

$= 4(34) + 12(5) + 9 = 136 + 60 + 9 = 205$ **જવાબ : (B)**

(30) યાદચ્છિક ચલ X નું સંભાવના વિતરણ નીચે મુજબ છે :

X = *x*	–2	–1	0	1	2
***p*(*x*)**	0.2	0.1	*k*	*k*	0.1

તો $2k^2$ = ...

(A) 0.36 (B) 0.18 (C) 0.072 (D) 7.2

ઉકેલ : $\sum p(x) = 1$

$\therefore\ 0.2 + 0.1 + k + k + 0.1 = 1$

$\therefore\ 2k = 1 - 0.4 = 0.6$

$\therefore\ 2k^2 = 2(0.3)^2 = 0.18$ **જવાબ : (B)**

(31) એક યાદચ્છિક ચલ X નું સંભાવના વિતરણ નીચે મુજબ છે, તો V(X) = ...

X = *x*	–1	0	1	2
***p*(*x*)**	*k*	0.1	0.2	0.2

(A) 1.49 (B) 1.9 (C) 0.1 (D) 0.61

ઉકેલ : $\sum p(x) = 1$

$\therefore\ k + 0.1 + 0.2 + 0.2 = 1$

$\therefore\ k = 0.5$

$E(X) = \sum x_i\ p(x_i)$

$= (-1)\cdot(0.5) + 0\cdot(0.1) + 1\cdot(0.2) + 2\cdot(0.2) = -0.5 + 0.2 + 0.4 = 0.1$

$E(X^2) = \sum x_i^2\ p(x_i)$

$= (-1)^2\cdot 0.5 + 0^2(0.1) + 1^2(0.2) + 2^2(0.2) = 0.5 + 0 + 0.2 + 0.8 = 1.5$

$V(X) = E(X^2) - [E(X)]^2 = 1.5 - (0.1)^2 = 1.5 - 0.01 = 1.49$ **જવાબ : (A)**

(32) એક યાદચ્છિક ચલ X ના મધ્યક અને પ્રમાણિત વિચલન અનુક્રમે E(X) = 4 અને $\sigma_X = 3$ છે, તો V(2 – 3X) = ...

(A) –23 (B) 12 (C) 81 (D) 144

ઉકેલ : $V(2 - 3X) = |-3|^2\ V(X) = 9V(X) = 9\sigma_X^2 = 9\cdot(9) = 81$ **જવાબ : (C)**

(33) જો દ્વિપદી વિતરણના પ્રચલો $n = 5$ અને $p = 0.30$ હોય, તો મધ્યક ...... અને વિચરણ ...... હોય.

(A) 1.5, 1.05 (B) 1.05, 1.5 (C) 1.5, 1.5 (D) 1.5, 1.15

ઉકેલ : $q = 1 - p$

$\therefore\ q = 1 - 0.3$

$\therefore\ q = 0.7$

મધ્યક $= np = 5 \times 0.30 = 1.5$

વિચરણ $= npq = 5 \times 0.3 \times 0.7$

$= 5 \times \frac{3}{10} \times \frac{7}{10} = 1.05$ **જવાબ : (A)**

(34) –1, 1, 0 ઘટકો ધરાવતા તમામ 2 × 2 નિશ્ચાયકના ગણમાંથી યાદચ્છિક રીતે પસંદ કરેલ એક નિશ્ચાયકનું મૂલ્ય શૂન્ય (0) ન હોય તે ઘટનાની સંભાવના ...... છે.

(A) $\frac{33}{81}$ (B) $\frac{16}{27}$ (C) $\frac{4}{81}$ (D) $\frac{77}{81}$

ઉકેલ : માંગેલ નિશ્ચાયક $D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$ હોય, તો

a_{11}, a_{12}, a_{21} અને a_{22} આ ચાર ઘટકોની પસંદગી –1, 1, 0 પૈકીની કોઈ હોઈ શકે.

આમ, મળતા નિશ્ચાયકોની સંખ્યા $= 3 \times 3 \times 3 \times 3 = 81$

D = 0 થવાની ઘટના A હોય, તો

D = 0 થવા $a_{11}a_{22} = a_{12}a_{21} = 0$ અથવા

$a_{11}\ a_{22} = a_{12}a_{21} = 1$ અથવા $a_{11}a_{22} = a_{12}a_{21} = -1$

વિકલ્પ I :

$a_{11}\ a_{22} = 0$ થાય તેની શક્યતા

{(1, 0), (0, 1), (–1, 0), (0, –1), (0, 0)}

તે જ રીતે $a_{12}\ a_{21} = 0$ થાય.

આમ કુલ 5 × 5 = 25 પ્રકારે D = 0 થાય.

વિકલ્પ II :

તે જ રીતે $a_{11}a_{22} = a_{12}a_{21} = 1$ થાય તેની શક્યતા {(1, 1), (–1, –1)}

કુલ 2 × 2 = 4

વિકલ્પ III :

$a_{11}a_{22} = a_{12}a_{21} = -1$ થાય તેની શક્યતા

{(1, –1), (–1, 1)}

કુલ 2 × 2 = 4

આમ, કુલ = 25 + 4 + 4 = 33 નિશ્ચાયક એવા મળે કે જેમનું મૂલ્ય 0 થાય.

$P(A) = \frac{33}{81}$. આથી, $P(A') = 1 - \frac{11}{27} = \frac{16}{27}$. **જવાબ : (B)**

(35) એક પાસાને ઉછાળવાના યાદચ્છિક પ્રયોગમાં જ્યાં સુધી 1 ન મળે ત્યાં સુધી ઉછાળવામાં આવે છે. યુગ્મ પ્રયત્ને 1 મળે તેની સંભાવના ...... છે.

(A) $\frac{1}{6}$ (B) $\frac{5}{6}$ (C) $\frac{5}{11}$ (D) $\frac{6}{11}$

ઉકેલ : પાસાં પરના કુલ અંક {1, 2, 3, 4, 5, 6}.

પાસાં પર 1 મળે તેની સંભાવના = $\frac{1}{6}$.

∴ પાસાં પર 1 ન મળે તેની સંભાવના = $1 - \frac{1}{6} = \frac{5}{6}$

યુગ્મ પ્રયત્ને 1 મળે તેની સંભાવના = $\frac{5}{6}\cdot\frac{1}{6}+\frac{5}{6}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{1}{6}+\ldots$

$$= \frac{1}{6}\left[\frac{5}{6}+\left(\frac{5}{6}\right)^3+\left(\frac{5}{6}\right)^5+\ldots\infty\right]$$

$$= \frac{1}{6}\left(\frac{\frac{5}{6}}{1-\frac{25}{36}}\right) = \frac{5}{11}$$

જવાબ : (C)

(36) એક નિયમિત ષટકોણનાં છ શિરોબિંદુઓ પૈકી કોઈ પણ ત્રણ યાદચ્છિક રીતે પસંદગી કરી જોડતાં મળતો ત્રિકોણ સમબાજુ હોવાની સંભાવના ...... છે.

(A) $\frac{1}{2}$ (B) $\frac{5}{6}$ (C) $\frac{1}{10}$ (D) $\frac{1}{20}$

ઉકેલ : $n = \binom{6}{3} = 20$

સમબાજુ ત્રિકોણ મળે તેવી બે જ શક્યતા હોય. આથી, $r = 2$

$P(A) = \frac{r}{n} = \frac{1}{10}$ **જવાબ : (C)**

(37) એક પાસાને બે વખત ઉછાળવાના યાદૃચ્છિક પ્રયોગમાં પ્રથમ પ્રયત્ને 1, 2 અથવા 3 અંક મળે તથા બીજા પ્રયત્ને 2, 4, 5 અથવા 6 અંક મળે તે ઘટનાની સંભાવના ...... છે.

(A) $\frac{1}{3}$ (B) $\frac{2}{3}$ (C) $\frac{3}{4}$ (D) $\frac{1}{4}$

ઉકેલ : A : પાસાં પર 1, 2 અથવા 3 મળે. આથી, $P(A) = \frac{3}{6}$

B : પાસાં પર 2, 4, 5 અથવા 6 અંક મળે. આથી, $P(B) = \frac{4}{6}$

$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B) = \frac{3}{6} \cdot \frac{4}{6} = \frac{12}{36} = \frac{1}{3}$ **જવાબ : (A)**

(38) રાજ પોતાના ઘરમાં માતા-પિતા આગળ 90 % સાચું બોલે છે. જ્યારે પત્નિ આગળ 60 % સાચું બોલે છે. કોઈ એક પ્રસંગને અનુલક્ષી માતા-પિતા અને પત્નિ આગળ વિરોધાભાસી બોલે તેની સંભાવના ...... % છે.

(A) 32 (B) 100 (C) 40 (D) 42

ઉકેલ : ઘટના A : માતા-પિતા આગળ સાચું બોલે. આથી, $P(A) = \frac{90}{100}$. આથી, $P(A') = \frac{10}{100}$

ઘટના B : પત્નિ આગળ સાચું બોલે. આથી, $P(B) = \frac{60}{100}$. આથી, $P(B') = \frac{40}{100}$

બંને આગળ વિરોધાભાસી બોલે તે ઘટનાની સંભાવના

$= P(A \cap B') + P(A' \cap B)$

$= P(A) \cdot P(B') + P(A') \cdot P(B)$

$= \frac{90}{100} \cdot \frac{40}{100} + \frac{10}{100} \cdot \frac{60}{100} = \frac{36}{100} + \frac{6}{100} = \frac{42}{100} = 0.42$ **જવાબ : (D)**

(39) 100 પ્રશ્નોની એક પ્રશ્ન પુસ્તિકામાંથી કૌટિલ્ય 90 પ્રશ્નના સાચા ઉત્તર આપે છે. સપ્તેશ તે જ પ્રશ્ન પુસ્તિકાના 70 જવાબો સાચા આપે છે. કોઈ એક પ્રશ્ન યાદૃચ્છિક રીતે પસંદ કરી બંનેને ગણવા આપવામાં આવે તો બંનેમાંથી કોઈ એકે સાચો જવાબ આપ્યો હોય તેની સંભાવના ...... છે.

(A) 0.03 (B) 0.97 (C) 0.7 (D) 0.07

ઉકેલ : ઘટના A : કૌટિલ્ય પ્રશ્નના સાચા જવાબ આપે.

$P(A) = \frac{90}{100}$. આથી, $P(A') = \frac{10}{100}$

ઘટના B : સપ્તેશ પ્રશ્નના સાચા જવાબ આપે.

$P(B) = \frac{70}{100}$. આથી, $P(B') = \frac{30}{100}$

પસંદ કરેલ પ્રશ્નનો જવાબ બંનેએ ખોટો આપ્યો હોય તે ઘટનાની સંભાવના

$P(A' \cap B') = P(A') \cdot P(B') = \frac{10}{100} \cdot \frac{30}{100} = \frac{3}{100} = 0.03$

$\therefore$ ઓછામાં ઓછા એક વ્યક્તિ સાચો જવાબ આપ્યો હોય તેની સંભાવના

$= 1 - P(A' \cap B') = 1 - 0.03 = 0.97$ **જવાબ : (B)**

(40) હરેશ તીરંદાજીમાં નિશાન તાકે તેની સંભાવના $\frac{1}{4}$ છે. હરેશ 25 વખત નિશાન તાકે છે, તો તેનું વિચરણ ...... થાય.

(A) $\frac{5}{8}$ (B) $\frac{75}{16}$ (C) $\frac{75}{4}$ (D) 25

ઉકેલ : હરેશની નિશાન તાકવાની સંભાવના $p = \frac{1}{4}$. આથી, $q = 1 - p = \frac{3}{4}$

$n = 25$. આથી, વિચરણ $= npq = 25 \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{3}{4} = \frac{75}{16}$ **જવાબ : (B)**

(41) કોઈ એક કાર ઉત્પાદક કંપની A અને B એમ બે મોડેલની કાર બનાવે છે. કંપનીએ બનાવેલ A મોડેલની 100 કારમાંથી 6 કાર ખામીયુક્ત બને છે. જ્યારે B મોડેલની 100 કારમાંથી 2 કાર ખામીયુક્ત બને છે. યાદૃચ્છિક રીતે પસંદ કરેલ કાર ખામીરહિત હોય તે ઘટનાની સંભાવના ...... છે.

(A) 0.96 (B) 0.94 (C) 0.98 (D) 0.02

ઉકેલ : ધારો કે યાદૃચ્છિક રીતે પસંદ કરેલી કાર ખામીરહિત હોય તે ઘટના C હોય, તો

પસંદ કરેલ ખામીરહિત કાર A મોડેલની, હોય તેની સંભાવના $P(C|A) = \frac{94}{100}$

પસંદ કરેલ ખામીરહિત કાર B મોડેલની હોય તેની સંભાવના $P(C|B) = \frac{98}{100}$

A અથવા B મોડેલની કાર પસંદ થાય તેની સંભાવના = $\frac{1}{2}$

$P(C) = P(A) \cdot P(C|A) + P(B) \cdot P(C|B)$

$= \frac{1}{2} \cdot \frac{94}{100} + \frac{1}{2} \cdot \frac{98}{100} = \frac{47}{100} + \frac{49}{100} = \frac{96}{100} = 0.96$ **જવાબ : (A)**

(42) વ્યાવહારિક પ્રશ્નોની ચર્ચામાં પતિનો અભિપ્રાય હકારાત્મક હોય તેની સંભાવના $\frac{3}{5}$ છે. જ્યારે પત્નિનો અભિપ્રાય હકારાત્મક હોય તેની સંભાવના $\frac{2}{5}$ છે. કોઈ પ્રશ્નની ચર્ચામાં બંનેનો અભિપ્રાય અલગ-અલગ હોય તેની સંભાવના ...... છે.

(A) $\frac{13}{25}$ (B) $\frac{12}{25}$ (C) $\frac{6}{25}$ (D) $\frac{19}{25}$

ઉકેલ : ઘટના A : પતિનો અભિપ્રાય હકારાત્મક

$\therefore P(A) = \frac{3}{5}$. આથી, $P(A') = \frac{2}{5}$

ઘટના B : પત્નિનો અભિપ્રાય હકારાત્મક

$\therefore P(B) = \frac{2}{5}$. આથી, $P(B') = \frac{3}{5}$

$\therefore$ માંગેલ ઘટનાની સંભાવના

$= P(A \cap B') + P(A' \cap B)$

$= P(A) \cdot P(B') + P(A') \cdot P(B) = \frac{3}{5} \cdot \frac{3}{5} + \frac{2}{5} \cdot \frac{2}{5} = \frac{13}{25}$ **જવાબ : (A)**

(43) એક પાસાને 10 વખત ઉછાળતાં બરાબર બે વખત પાંચ મળે તે ઘટનાની સંભાવના ...... છે.

(A) $\frac{5^9}{4.6^8}$ (B) $\frac{3}{2}\left(\frac{1}{6}\right)^8$ (C) $\frac{3}{2} \cdot \frac{55}{65}$ (D) $\frac{3}{2} \cdot \frac{56}{65}$

ઉકેલ : $n = 10$

A : પાસાં પર પાંચ મળે તે ઘટના. આથી, $p = P(A) = \frac{1}{6}$, $q = \frac{5}{6}$

$\therefore P(X = 2) = \binom{10}{2} \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^2 \left(\frac{5}{6}\right)^8 = \frac{10 \times 9}{2} \times \frac{1}{6^2} \times \frac{5^8}{6^8} = \frac{5^9}{4.6^8}$ **જવાબ : (A)**

(44) એક શાળાના 10 % વિદ્યાર્થીઓ નાપાસ થયા છે. શાળામાંથી યાદૃચ્છિક રીતે પૂરવણી સહિત પસંદ કરેલ કોઈ પણ 4 વિદ્યાર્થીઓ પાસ થયેલ વિદ્યાર્થી પૈકીના હોય તેની સંભાવના ...... છે.

(A) 0.081 (B) 0.6561 (C) 0.3561 (D) 0.046

ઉકેલ : ઘટના A : પસંદ થયેલ વિદ્યાર્થી નાપાસ હોય. આથી, $P(A) = \frac{10}{100} = \frac{1}{10} = 0.1$

ઘટના A' = પસંદ થયેલ વિદ્યાર્થી પાસ હોય. આથી, $P(A') = 0.9$

અહીં $n = 4$

$P(X = 4) = \binom{4}{4}(0.9)^4 \cdot (0.1)^0 = 0.6561$ **જવાબ : (B)**

(45) એક દ્વિપદી વિતરણમાં મધ્યક 4 અને વિચરણ $\frac{4}{3}$ છે. $P(X \geq 1) =$ ......

(A) 1 (B) 0 (C) $\frac{1}{729}$ (D) $\frac{728}{729}$

ઉકેલ : મધ્યક $= np = 4$, વિચરણ $= npq = \frac{4}{3}$

$\therefore \frac{npq}{np} = \frac{\frac{4}{3}}{4} = \frac{1}{3}$. આથી, $q = \frac{1}{3}$,

આથી, $p = 1 - q = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$. આથી $n = 6$ (કારણ કે $np = 4$)

$P(X \geq 1) = 1 - P(X = 0)$

$= 1 - \binom{6}{0}\left(\frac{2}{3}\right)^0\left(\frac{1}{3}\right)^6$

$= 1 - 1 \cdot 1 \cdot \frac{1}{3^6} = 1 - \frac{1}{3^6} = 1 - \frac{1}{729} = \frac{728}{729}$ **જવાબ : (D)**

(46) એક પેટીમાં 10 સોનાના સિક્કા અને 5 ચાંદીના સિક્કા છે. બીજી પેટીમાં 8 સોનાના સિક્કા અને 7 ચાંદીના સિક્કા છે. યાદચ્છિક રીતે એક પેટી પસંદ કરી, તેમાંથી એક સિક્કો લેવામાં આવે છે. તે સોનાનો હોય તેની સંભાવના ...... છે.

(A) $\frac{2}{5}$ (B) $\frac{3}{5}$ (C) $\frac{80}{225}$ (D) $\frac{12}{30}$

ઉકેલ :

પેટી B_1 → 10 સોનાના સિક્કા, 5 ચાંદીના સિક્કા

પેટી B_2 → 8 સોનાના સિક્કા, 7 ચાંદીના સિક્કા

ઘટના A : પસંદ થયેલ સિક્કો સોનાનો હોય તથા ઘટના B_1 અને B_2 પ્રથમ તથા બીજી પેટીની પસંદગી દર્શાવે છે.

$P(A) = P(B_1) \cdot P(A|B_1) + P(B_2) \cdot P(A|B_2) = \frac{1}{2} \cdot \frac{10}{15} + \frac{1}{2} \cdot \frac{8}{15} = \frac{18}{30} = \frac{3}{5}$ **જવાબ : (B)**

(47) એક પેટીમાં કુલ 20 સફરજન છે. તે પૈકીના 4 બગડી ગયાં છે. યાદચ્છિક રીતે પસંદ કરેલ 2 સફરજન બગડી ગયેલ હોય તેની ગાણિતિક અપેક્ષા ...... છે.

(A) $\frac{1}{5}$ (B) $\frac{2}{5}$ (C) $\frac{3}{5}$ (D) 1

ઉકેલ : કુલ 20 સફરજન છે. સારાં સફરજન 16 છે. બગડી ગયેલાં સફરજન 4 છે.

X = પસંદ થયેલ સફરજન બગડી ગયેલ હોય.

$P(X = 0) = \frac{\binom{16}{2}\binom{4}{0}}{\binom{20}{2}} = \frac{16 \times 15}{20 \times 19} = \frac{12}{19}$

$$P(X = 1) = \frac{\binom{16}{1}\binom{4}{1}}{\binom{20}{2}} = \frac{16 \times 4 \times 2}{20 \times 19} = \frac{32}{95}$$

$$P(X = 2) = \frac{\binom{16}{0}\binom{4}{2}}{\binom{20}{2}} = \frac{4 \times 3}{20 \times 19} = \frac{3}{95}$$

x_i	0	1	2
$p(x_i)$	$\frac{12}{19}$	$\frac{32}{95}$	$\frac{3}{95}$

ગાણિતિક અપેક્ષા $= \sum_{i=1}^{n} x_i \; p(x_i) = 0 \cdot \left(\frac{12}{19}\right) + 1\left(\frac{32}{95}\right) + 2\left(\frac{3}{95}\right) = \frac{32+6}{95} = \frac{38}{95} = \frac{2}{5}$ **જવાબ : (B)**

(48) બે સમતોલ પાસાને પાંચ વખત ફેંકવામાં આવે છે. બંને પાસાં પર સમાન અંક મળે તે ઘટનાને સફળતા કહીએ, તો બરાબર બે સફળતા મળે તેની સંભાવના ...... છે.

(A) $\frac{625}{3888}$ (B) $\frac{125}{1296}$ (C) $\frac{25}{216}$ (D) $\frac{1}{10}$

ઉકેલ : અહીં પાસાને પાંચ વખત ફેંકવામાં આવે છે. આથી, $n = 5$

બે પાસાને એક વખત ઉછાળવાના પ્રયોગમાં ઘટના A : પાસાં પરના અંક સમાન હોય.

$\therefore$ A = {(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4), (5, 5), (6, 6)}

$\therefore$ સફળતાની સંભાવના $p = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$. નિષ્ફળતાની સંભાવના $q = \frac{5}{6}$

$$P(X = 2) = \binom{n}{x} p^x \cdot q^{n-x}$$

$$= \binom{5}{2}\left(\frac{1}{6}\right)^2 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^3 = 10 \cdot \frac{1}{6} \times \frac{1}{6} \cdot \frac{5 \times 5 \times 5}{6 \times 6 \times 6} = \frac{1250}{7776} = \frac{625}{3888}$$ **જવાબ : (A)**

(49) એક સમતોલ પાસાની રમતમાં ભાગ લેનાર વ્યક્તિને પાસાં પર મળતો પૂર્ણાંક 1 અથવા 2 હોય, તો તેના હરીફ પાસેથી ₹ 10 મળે છે. જો 3, 4, 5 કે 6 હોય, તો ખેલાડીએ તેના પ્રતિસ્પર્ધીને કેટલા રૂપિયા ચૂકવવા જોઈએ કે જેથી રમત સમતોલ બને ?

(A) 2 (B) 3 (C) 5 (D) 10

ઉકેલ : ધારો કે પ્રતિસ્પર્ધીને ચૂકવવી પડતી રકમ a છે.

જો X = ખેલાડીને મળતી રકમ હોય, તો

અહીં, E(X) = 0

$$X(x) = \begin{cases} 10 & x = 1, 2 \\ a & x = 3, 4, 5, 6 \end{cases}$$

x_i	10	a
$p(x_i)$	$\frac{2}{6}$	$\frac{4}{6}$

$$E(X) = \sum x_i \; p(x_i) = 10\left(\frac{2}{6}\right) + a\left(\frac{4}{6}\right) = \frac{20}{6} + \frac{4a}{6}$$

$\therefore$ 20 – 4a = 0

$\therefore$ a = –5

$\therefore$ ખેલાડીએ તેના પ્રતિસ્પર્ધીને ₹ 5 ચૂકવવા પડે. **જવાબ : (C)**

(50) એક પેટીમાં 1 થી 25 પૂર્ણાંક લખેલ કાર્ડ્સ છે. તેમાંથી યાદચ્છિક રીતે એક પછી એક એમ બે કાર્ડ્સ પૂરવણી વગર પસંદ કરવામાં આવે છે. બંને કાર્ડ્સ પરનો પૂર્ણાંક યુગ્મ હોય તે ઘટનાની સંભાવના ...... છે.

(A) $\frac{12}{25}$ (B) $\frac{11}{50}$ (C) $\frac{2}{5}$ (D) $\frac{1}{2}$

ઉકેલ : 1 થી 25 માં યુગ્મ પૂર્ણાંક ગણ = {2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20, 22, 24}

A : પસંદ કરેલ પ્રથમ કાર્ડ પરનો પૂર્ણાંક યુગ્મ હોય. આથી, $P(A) = \frac{12}{25}$

B : પસંદ કરેલ કાર્ડ દ્વિતીય કાર્ડ પરનો પૂર્ણાંક યુગ્મ હોય. આથી, $P(B|A) = \frac{11}{50}$

$\therefore$ માગેલ સંભાવના $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B|A) = \frac{12}{25} \cdot \frac{11}{24} = \frac{11}{50}$ **જવાબ : (B)**

(51) E અને F નિરપેક્ષ ઘટનાઓ છે. P(E) = 0.35 તથા $P(E \cup F) = 0.60$, તો ઘટના F ન ઉદ્ભવે તેની સંભાવના ...... છે.

(A) $\frac{5}{13}$ (B) $\frac{8}{13}$ (C) $\frac{1}{13}$ (D) $\frac{7}{13}$

ઉકેલ : નિરપેક્ષ ઘટનાઓ E અને F માટે,

$P(E \cap F) = P(E) \cdot P(F) = 0.35\ P(F)$

$P(E \cup F) = P(E) + P(F) - P(E \cap F)$

$\therefore\ 0.60 = 0.35 + P(F) - 0.35\ P(F)$

$\therefore\ 0.25 = (1 - 0.35)\ P(F)$

$\therefore\ P(F) = \frac{0.25}{0.65} = \frac{5}{13}$

$\therefore$ F ન ઉદ્ભવે તે ઘટનાની સંભાવના $P(F') = 1 - P(F) = 1 - \frac{5}{13} = \frac{8}{13}$ **જવાબ : (B)**

(52) એક પેટીમાં 3 સફેદ, 3 લાલ અને 4 કાળા રંગના દડાઓ છે. પેટીમાંથી યાદચ્છિક રીતે બે દડાઓ પૂરવણી વગર પસંદ કરવામાં આવે છે. ઓછામાં ઓછો એક દડો કાળા રંગનો હોય, તે ઘટનાની સંભાવના ...... છે.

(A) $\frac{1}{3}$ (B) $\frac{2}{3}$ (C) $\frac{2}{15}$ (D) $\frac{13}{15}$

ઉકેલ : પેટીમાં સફેદ 3 + લાલ 3 + કાળા 4 = કુલ 10 દડા છે.

$\therefore$ ઘટના B_1 : પસંદ કરેલ પ્રથમ દડો કાળા રંગનો ન હોય.

ઘટના B_2 : પસંદ કરેલ બીજો દડો કાળા રંગનો ન હોય.

$$P(B_1) = \frac{\binom{6}{1}}{\binom{10}{1}} = \frac{6}{10},\quad P(B_2|B_1) = \frac{\binom{5}{1}}{\binom{9}{1}} = \frac{5}{9}$$

$\therefore$ બંને દડા કાળા રંગના ન હોય તે ઘટનાની સંભાવના

$P(B_1 \cap B_2) = P(B_1) \cdot P(B_2|B_1) = \frac{6}{10} \cdot \frac{5}{9} = \frac{1}{3}$

$\therefore$ ઓછામાં ઓછો એક દડો કાળા રંગનો હોય તેની સંભાવના $= 1 - P(B_1 \cap B_2) = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$

જવાબ : (B)

બીજી રીત :

માગેલ સંભાવના = એક અથવા બે દડા કાળા રંગના હોય, તેની સંભાવના

$$= \frac{\binom{4}{1}\binom{6}{1}}{\binom{10}{2}} + \frac{\binom{4}{2}}{\binom{10}{2}}$$

$$= \frac{24}{45} + \frac{6}{45} = \frac{30}{45} = \frac{2}{3}$$ **જવાબ : (B)**

(53) એક સમતોલ ન હોય તેવા પાસાને ઉછાળવાની ઘટનામાં તેના પરના અંકો 1, 2, 3, 4, 5, 6 પૈકી મળતા અંકોની સંભાવના નીચે મુજબ છે :

અંક	1	2	3	4	5	6
સંભાવના	0.15	0.05	0.25	0.15	0.25	0.15

જો પાસાં પર મળતા અંકો 3 અથવા 4 હોય, તેવું આપેલ હોય ત્યારે પાસાં પર મળતો અંક 3 હોય તે ઘટનાની સંભાવના ...... છે.

(A) $\frac{5}{8}$ (B) $\frac{3}{8}$ (C) $\frac{1}{4}$ (D) $\frac{1}{2}$

ઉકેલ : ઘટના A = પાસાં પર મળતો અંક 3 હોય, B = પાસાં પર મળતો અંક 4 હોય.

$P(A) = 0.25 \quad P(B) = 0.15$

$\therefore \quad P(A \cup B) = P(A) + P(B) = 0.25 + 0.15 = 0.40$

$$P\left(A|A \cup B\right) = \frac{P(A \cap (A \cup B)}{P(A \cup B)}$$

$$= \frac{P(A)}{P(A \cup B)} = \frac{0.25}{0.40} = \frac{5}{8}$$ **જવાબ : (A)**

(54) એક પેટીમાં પાંચ સફેદ અને પાંચ કાળા દડાઓ છે. યાદચ્છિક રીતે પેટીમાંથી બે દડાઓની બે વખત પસંદગી (1) પૂરવણી રહિત (2) પૂરવણી સહિત કરવામાં આવે છે. પ્રથમ પસંદગી વખતે બંને દડાઓ સફેદ અને બીજી પસંદગી વખતે બંને દડાઓ કાળા મળે તેની સંભાવના અનુક્રમે ...... અને ...... છે.

(A) $\frac{5}{63}, \frac{4}{81}$ (B) $\frac{4}{81}, \frac{5}{63}$ (C) $\frac{4}{63}, \frac{5}{81}$ (D) $\frac{5}{81}, \frac{4}{63}$

ઉકેલ : પૂરવણીરહિત :

ઘટના A : પસંદ કરેલ બંને દડાઓ સફેદ હોય.

ઘટના B : પસંદ કરેલ બંને દડાઓ કાળા હોય.

અહીં પૂરવણીરહિત પસંદગીમાં

પ્રથમ ઘટના માટે $P(A) = \frac{\binom{5}{2}}{\binom{10}{2}} = \frac{5 \times 4}{10 \times 9} = \frac{2}{9}$, દ્વિતીય ઘટના $P(B \mid A) = \frac{\binom{5}{2}}{\binom{8}{2}} = \frac{5 \times 4}{8 \times 7} = \frac{5}{14}$

માંગેલ ઘટનાની સંભાવના

$\therefore \quad P(A \cap B) = \frac{2}{9} \cdot \frac{5}{14} = -\frac{5}{63}$

(અહીંથી નક્કી થાય કે જવાબ A છે.)

પૂરવણી સહિત :

અહીં ઘટના A અને B નિરપેક્ષ ઘટનાઓ થશે.

$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$

$= \dfrac{\binom{5}{2}}{\binom{10}{2}} \cdot \dfrac{\binom{5}{2}}{\binom{10}{2}} = \frac{2}{9} \cdot \frac{2}{9} = \frac{4}{81}$ **જવાબ : (A)**

(55) કોઈ ચોક્કસ રોગ માટે આયુર્વેદિક (A) અને હોમિયોપેથી (H) એમ બે સારવાર ઉપલબ્ધ છે. આયુર્વેદીક (A) સારવારથી દર્દી રોગમુક્ત થવાની સંભાવના $\frac{1}{2}$ છે. હોમિયોપેથી સારવારથી દર્દી રોગમુક્ત થવાની સંભાવના $\frac{5}{8}$ છે. (1) વ્યક્તિને રોગમુક્ત થવાની સંભાવના કેટલી ? (2) વ્યક્તિ રોગમુક્ત થયો હોય અને તેણે આર્યુવેદિક સારવાર લીધી હોય, તેની સંભાવના કેટલી ?

(A) $\frac{9}{16}, \frac{4}{9}$ (B) $\frac{2}{3}, \frac{1}{3}$ (C) $\frac{3}{4}, \frac{2}{3}$ (D) 1, $\frac{1}{2}$

ઉકેલ : A : વ્યક્તિ આયુર્વેદિક પદ્ધતિ પસંદ કરે છે. $P(A) = \frac{1}{2}$

B : વ્યક્તિ હોમિયોપેથી સારવાર પસંદ કરે છે. $P(B) = \frac{1}{2}$

C : વ્યક્તિ રોગમુક્ત થાય છે. $P(C|A) = \frac{1}{2}$, $P(C|B) = \frac{5}{8}$

$P(C) = P(A) \cdot P(C|A) + P(B)P(C|B) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{5}{8} = \frac{9}{16}$

(અહીંથી જ જવાબ A નક્કી થઈ ગયો.)

વ્યક્તિ સાજો થયેલ છે, તો તેણે આયુર્વેદિક સારવાર લીધી હોય તેની સંભાવના શોધીએ.

$P(A|C) = \dfrac{P(A \cap C)}{P(C)} = \dfrac{P(A)P(C|A)}{P(C)} = \dfrac{\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}}{\frac{9}{16}} = \dfrac{16}{9 \times 4} = \dfrac{4}{9}$ **જવાબ : (A)**

(56) જો $P(A \cup B) = P(A)$ તો $P(A|B) = ...$

(A) $\dfrac{P(A)}{P(B)}$ (B) 1 (C) $P(A \cap B)$ (D) $P(A)$

ઉકેલ : $P(A) + P(B) - P(A \cap B) = P(A)$

$\therefore P(A \cap B) = P(B)$

$\therefore P(A|B) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(B)} = \dfrac{P(B)}{P(B)} = 1$ **જવાબ : (B)**

(57) A અને B નિરપેક્ષ ઘટનાઓ છે. $P(A \cup B) = 0.5$ અને $P(A) = 0.2$ તો $P(B) = ...$

(A) $\frac{1}{2}$ (B) $\frac{2}{3}$ (C) $\frac{3}{8}$ (D) $\frac{2}{5}$

ઉકેલ : $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

$\therefore P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A) \cdot P(B)$

$\therefore 0.5 = 0.2 + P(B) - 0.2P(B)$

$\therefore 0.3 = 0.8\ P(B)$

$\therefore P(B) = \frac{3}{8}$ **જવાબ : (C)**

(58) આઠ સમતોલ સિક્કાને એક સાથે એક વખત ઉછાળવામાં આવે છે, તો ઓછામાં ઓછી છ છાપ આવે તેની સંભાવના ...... થાય.

(A) $\frac{65}{265}$ (B) $\frac{63}{256}$ (C) $\frac{37}{128}$ (D) $\frac{37}{256}$

ઉકેલ : અહીં છાપ મળવાની સંભાવના $p = \frac{1}{2}$. આથી, $q = 1 - p = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$

$\therefore$ અહીં આઠ સમતોલ સિક્કાને ઉછાળવામાં આવે છે. $n = 8$

$$p(x) = \binom{8}{x}\left(\frac{1}{2}\right)^x \left(\frac{1}{2}\right)^{8-x}$$

$$= \binom{8}{x}\left(\frac{1}{2}\right)^8$$

$P(X \geq 6) = p(6) + p(7) + p(8) = \left[\binom{8}{6}+\binom{8}{7}+\binom{8}{8}\right]\left(\frac{1}{2}\right)^8 = \frac{(28+8+1)}{256} = \frac{37}{256}$ **જવાબ : (D)**

(59) યાદચ્છિક ચલ X નું સંભાવના વિતરણ નીચે મુજબ છે :

X = *x*	0	1	2	3
***p*(*x*)**	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{8}$

$g(X) = 2X + 3$ નું વિચરણ ...... છે.

(A) 6 (B) 36 (C) 4 (D) 8

ઉકેલ : $E(X) = \sum x_i \; p(x_i)$

$$= 0\cdot\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+2\cdot\frac{1}{2}+3\cdot\frac{1}{8} = \frac{3}{2}$$

$E(X^2) = \sum x_i^2 \; p(x_i)$

$$= 0\cdot\frac{1}{4}+1\cdot\frac{1}{8}+4\cdot\frac{1}{2}+9\cdot\frac{1}{8} = \frac{13}{4}$$

$V(X) = E(X^2) - (E(X))^2 = \frac{13}{4}-\left(\frac{3}{2}\right)^2 = 1$

$\therefore$ $g(X) = 2X + 3$ નું વિચરણ $= 2^2 \; V(X) = 4V(X) = 4(1) = 4$ **જવાબ : (C)**

(60) દ્વિપદી વિતરણનું સંભાવના વિધેય $p(x) = \binom{6}{x}p^x \cdot q^{6-x}$, $x = 0, 1, 2, ..., 6$ છે. જો $3p(2) = 2p(3)$ હોય, તો $p =$ ......

(A) $\frac{1}{17}$ (B) $\frac{8}{9}$ (C) $\frac{9}{17}$ (D) $\frac{3}{4}$

ઉકેલ : અહીં $3p(2) = 2p(3)$

$\therefore$ $3\binom{6}{2} \cdot p^2 \cdot q^4 = 2\binom{6}{3}p^3 \cdot q^3$

$\therefore$ $3 \cdot 15p^2q^4 = 2 \cdot 20 \; p^3 \, q^3$

$\therefore$ $9q = 8p$

$\therefore$ $9(1 - p) = 8p$

$\therefore$ $p = \frac{9}{17}$ **જવાબ : (C)**

(61) એક યાદચ્છિક ચલ X નું સંભાવના વિતરણ નીચે પ્રમાણે છે :

X = *x*	–2	–1	0	1	2
***p*(*x*)**	0.2	0.1	0.3	0.3	0.1

તો E(X) = ... તથા E(3X + 2) = ... V(3X + 2) = ...

(A) 0, 2, 14.4 (B) 0, 0, 4 (C) 0, 2, 4.8 (D) 2, 2, 14.4

ઉકેલ : $E(X) = \sum x_i \, p(x_i)$

$= -2 \cdot (0.2) + (-1) \cdot (0.1) + 0 \cdot (0.3) + 1 \cdot (0.3) + 2 \cdot (0.1)$

$= -0.4 - 0.1 + 0 + 0.3 + 0.2 = 0$

$E(3X + 2) = 3E(X) + 2 = 3(0) + 2 = 2$

$E(X^2) = \sum x_i^2 \, p(x_i)$

$= 4(0.20) + 1(0.1) + 0.(0.3) + 1 \cdot (0.3) + 4 \cdot (0.1)$

$= 0.8 + 0.1 + 0 + 0.3 + 0.4 = 1.6$

$V(X) = E(X^2) - [E(X)]^2 = 1.6 - 0 = 1.6$

$\therefore \; V(3X + 2) = 3^2 V(X) = 9(1.6) = 14.4$ **જવાબ : (A)**

(62) એક સમતોલ સિક્કાને n વખત ઉછાળતાં ઓછામાં ઓછા એક વખત છાપ (H) મળે તે ઘટનાની સંભાવના ..... છે.

(A) $1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n$ (B) $1 - \left(\frac{1}{6}\right)^n$ (C) $1 - \left(\frac{5}{6}\right)^n$ (D) $\frac{6^n - 5^n}{7}$

ઉકેલ : અહીં સિક્કો n વખત ઉછાળવામાં આવે છે. નિદર્શાવકાશના ઘટકોની કુલ સંખ્યા = 2^n

એક પણ છાપ ન મળે તે ઘટના A હોય, તો $P(A) = \frac{1}{2^n}$ (A = {TTT ... T})

ઓછામાં ઓછી એક છાપ મળે તેની સંભાવના = $1 - \frac{1}{2^n}$ **જવાબ : (A)**

(63) 1 નું ઘનમૂળ સંકર સંખ્યા ω છે, $\omega \neq 1$. એક સમતોલ પાસાને ત્રણ વખત ઉછાળતાં પાસાં પર મળતા અંક અનુક્રમે r_1, r_2 અને r_3 હોય, તો $\omega^{r_1} + \omega^{r_2} + \omega^{r_3} = 0$ સાથે સંકળાયેલ ઘટનાની સંભાવના ...... છે.

(A) $\frac{1}{36}$ (B) $\frac{1}{216}$ (C) $\frac{1}{6}$ (D) $\frac{5}{6}$

ઉકેલ : અહીં સમતોલ પાસાને ત્રણ વખત ઉછાળવામાં આવે છે.

$n = 6 \times 6 \times 6 = 216$

ઘટના $A = \{(r_1, r_2, r_3) \mid r_1, r_2, r_3 = 1, 2, 3, 4, 5, 6, \; \omega^{r_1} + \omega^{r_2} + \omega^{r_3} = 0, \omega \neq 1\}$

(1, 2, 3) (2, 3, 4), (3, 4, 5), (4, 5, 6) (1, 3, 5), (2, 4, 6)

$r = 6 \cdot 3! = 6 \cdot 6 = 36$

$\therefore \; P(A) = \frac{36}{216} = \frac{1}{6}$ **જવાબ : (C)**

(64) ગણ A અને ગણ B માં અનુક્રમે 4 અને 2 ઘટકો છે. A × B ના ઉપગણો પૈકી કોઈ એક ગણ યાદચ્છિક રીતે પસંદ કરતાં મળતાં ઉપગણમાં ઓછામાં ઓછા ત્રણ સભ્ય હોય, તે ઘટનાની સંભાવના ...... છે.

(A) $\frac{219}{256}$ (B) $\frac{3}{8}$ (C) $\frac{5}{8}$ (D) $\frac{37}{256}$

ઉકેલ : ગણ A ની સભ્યસંખ્યા = 4, ગણ B ની સભ્યસંખ્યા = 2

$\therefore$ A × B ની સભ્યસંખ્યા = 4 × 2 = 8

$\therefore$ A × B ના ઉપગણોની સંખ્યા = $2^8 = 256$

જેમાં એક પણ સભ્ય ન હોય તેવો ઉપગણ $\emptyset$ = 1

જેમાં એક જ સભ્ય હોય તેવા ઉપગણની સંખ્યા = $\binom{8}{1}$ = 8

જેમાં માત્ર બે જ સભ્ય હોય તેવા ઉપગણની સંખ્યા = $\binom{8}{2} = \frac{8 \times 7}{2}$ = 28

∴ જેમાં ઓછામાં ઓછા ત્રણ સભ્ય હોય તેવા ઉપગણની સંખ્યા = 256 − 1 − 8 − 28
= 256 − 37 = 219

∴ માંગેલ ઘટનાની સંભાવના = $\frac{219}{256}$ **જવાબ : (A)**

(65) કોઈ ચોક્કસ ત્રણ વિદ્યાર્થીઓ એક ગાણિતીય પ્રશ્ન ઉકેલે તેની સંભાવના અનુક્રમે $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$ અને $\frac{1}{4}$ છે. પ્રશ્નનો ઉકેલ મળે તેની સંભાવના ...... છે.

(A) $\frac{3}{4}$ (B) $\frac{1}{2}$ (C) $\frac{2}{3}$ (D) $\frac{1}{3}$

ઉકેલ : P(A) = $\frac{1}{2}$ P(B) = $\frac{1}{3}$ P(C) = $\frac{1}{4}$

ઘટના A પ્રથમ વિદ્યાર્થી દ્વારા પ્રશ્નનો ઉકેલ ન મળે તે હોય તો, P(A') = 1 − P(A) = $\frac{1}{2}$

ઘટના B બીજા વિદ્યાર્થી દ્વારા પ્રશ્નનો ઉકેલ ન મળે તે હોય તો, P(B') = 1 − P(B) = $\frac{2}{3}$

ઘટના C ત્રીજા વિદ્યાર્થી દ્વારા પ્રશ્નનો ઉકેલ ન મળે તે હોય તો, P(C') = 1 − P(C) = = $\frac{3}{4}$

પ્રશ્નનો ઉકેલ મળે તેની સંભાવના

$P(A \cup B \cup C) = 1 - P((A \cup B \cup C)')$

$= 1 - P(A' \cap B' \cap C')$

$= 1 - P(A') \cdot P(B') \cdot P(C') = 1 - \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{4} = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$ **જવાબ : (A)**

(66) એક સમતોલ પાસાને 5 વખત ઉછાળવાના યાદચ્છિક પ્રયોગમાં અયુગ્મ અંક મળે તેને સફળતા તરીકે લેતાં માહિતીનું વિચરણ ...... છે.

(A) $\frac{8}{3}$ (B) $\frac{3}{8}$ (C) $\frac{4}{5}$ (D) $\frac{5}{4}$

ઉકેલ : n = 5

પાસાં પર મળતા અયુગ્મ અંકની ઘટના {1, 3, 5}

∴ સફળતાની સંભાવના $p = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$. નિષ્ફળતાની સંભાવના $q = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$

વિચરણ = $npq = 5 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{5}{4}$ **જવાબ : (D)**

(67) જો દ્વિપદી વિચરણના યાદચ્છિક ચલ X ના મધ્યક અને વિચરણ અનુક્રમે 4 અને 2 હોય, તો P(X = 1) = ...

(A) $\frac{1}{16}$ (B) $\frac{1}{8}$ (C) $\frac{1}{4}$ (D) $\frac{1}{32}$

ઉકેલ : મધ્યક = np = 4. વિચરણ = npq = 2

∴ $\frac{npq}{np} = \frac{2}{4} \Rightarrow q = \frac{1}{2}$. આથી, $p = \frac{1}{2}$

$np = 4 \Rightarrow n\frac{1}{2} = 4 \Rightarrow n = 8$

ચલ X નું સંભાવના વિતરણ $p(x) = \binom{n}{x} p^x \cdot q^{n-x} = \binom{8}{x}\left(\frac{1}{2}\right)^x \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{8-x} = \binom{8}{x}\left(\frac{1}{2}\right)^8 = \binom{8}{x}\frac{1}{256}$

હવે $p(1) = \binom{8}{1}\frac{1}{256} = \frac{1}{32}$ **જવાબ : (D)**

(68) વ્યક્તિ A સત્ય બોલે તેની સંભાવના $\frac{4}{5}$ છે અને વ્યક્તિ B સત્ય બોલે તેની સંભાવના $\frac{3}{4}$ છે. કોઈ ઘટના માટે બંને વિરોધાભાસી નિવેદન આપે તેની સંભાવના ...... છે.

(A) $\frac{4}{5}$ (B) $\frac{1}{5}$ (C) $\frac{7}{20}$ (D) $\frac{3}{20}$

ઉકેલ : અહીં $P(A) = \frac{4}{5}$, $P(A') = \frac{1}{5}$. $P(B) = \frac{3}{4}$, $P(B') = \frac{1}{4}$

માંગેલ ઘટનાની સંભાવના $= P(A \cap B') + P(A' \cap B) = P(A) \cdot P(B') + P(A') \cdot P(B)$

$$= \frac{4}{5} \cdot \frac{1}{4} + \frac{1}{5} \cdot \frac{3}{4} = \frac{4}{20} + \frac{3}{20} = \frac{7}{20}$$

જવાબ : (C)

(69) યાદચ્છિક ચલ X નું સંભાવના વિતરણ નીચે મુજબ છે :

X = *x*	1	2	3	4	5	6	7	8
***p*(*x*)**	0.15	0.23	0.12	0.10	0.20	0.08	0.07	0.05

ઘટના E = {X અવિભાજ્ય સંખ્યા છે.} અને $F = \{X < 4\}$ તો ઘટના $E \cup F$ ની સંભાવના ...... છે.

(A) 0.50 (B) 0.35 (C) 0.77 (D) 0.89

ઉકેલ : $E = \{2, 3, 5, 7\}$ અને $F = \{1, 2, 3\}$

$E \cup F = \{1, 2, 3, 5, 7\}$

$P(E \cup F) = p(1) + p(2) + p(3) + p(5) + p(7)$

$= 0.15 + 0.23 + 0.12 + 0.20 + 0.07 = 0.77$ **જવાબ : (C)**

(70) જો દ્વિપદી વિતરણના યાદચ્છિક ચલ X ના મધ્યક અને વિચરણ અનુક્રમે 4 અને 2 હોય તો $p(2) =$ ......

(A) $\frac{8}{64}$ (B) $\frac{7}{64}$ (C) $\frac{57}{64}$ (D) $\frac{37}{256}$

ઉકેલ : અહીં $np = 4$, $npq = 2$ પરથી $n = 8$, $p = \frac{1}{2}$, $q = \frac{1}{2}$

$$p(x) = \binom{n}{x} p^x \cdot q^{n-x}$$

$$p(2) = \binom{8}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^2\left(\frac{1}{2}\right)^6 = \binom{8}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^8 = \frac{8 \times 7}{2} \times \frac{1}{2^8} = \frac{7}{2^6} = \frac{7}{64}$$ **જવાબ : (A)**

(71) A અને B ઘટનાઓ માટે $P((A \cup B)') = \frac{1}{6}$, $P(A \cap B) = \frac{1}{4}$, $P(A') = \frac{1}{4}$ તો ઘટના A અને B એ ......

(JEE 2014)

(A) સમસંભાવી અને નિવારક ઘટનાઓ છે. (B) સમસંભાવી છે પરંતુ નિરપેક્ષ ઘટનાઓ નથી.

(C) નિરપેક્ષ ઘટનાઓ છે, પરંતુ સમસંભાવી નથી. (D) નિઃશેષ અને નિરપેક્ષ ઘટના નથી.

ઉકેલ : $P((A \cup B)') = \frac{1}{6}$. આથી, $P(A \cup B) = 1 - \frac{1}{6} = \frac{5}{6}$

$\therefore$ $P(A') = \frac{1}{4}$. આથી, $P(A) = 1 - P(A') = \frac{3}{4}$. વળી $P(A \cap B) = \frac{1}{4}$

$\therefore$ $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

$\frac{5}{6} = \frac{3}{4} + P(B) - \frac{1}{4}$

$\therefore$ $P(B) = \frac{1}{3}$

$P(A) = \frac{3}{4}$ તથા $P(B) = \frac{1}{3}$ છે.

$\therefore$ A અને B સમસંભાવી ઘટનાઓ નથી.

$P(A \cap B) = \frac{1}{4}$. આથી, $P(A) \cdot P(B) = \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{4}$

$\therefore$ $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$

$\therefore$ A અને B નિરપેક્ષ ઘટનાઓ છે. **જવાબ : (C)**

(72) ઘટનાઓ A અને B માટે $P(A) = \frac{1}{4}$, $P(A|B) = \frac{1}{2}$, $P(B|A) = \frac{2}{3}$ તો $P(B) = ...$

(A) $\frac{1}{6}$ (B) $\frac{1}{3}$ (C) $\frac{2}{3}$ (D) $\frac{1}{2}$

ઉકેલ : $P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$, $P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$

$\therefore$ $P(B) \cdot P(A|B) = P(A) \cdot P(B|A)$. આથી, $P(B)\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4} \cdot \frac{2}{3}$

$\therefore$ $P(B) = \frac{1}{3}$ **જવાબ : (B)**

(73) 00, 01, 02, ..., 49 સંખ્યાઓ લખેલ હોય, તેવી 50 ટિકિટો છે. એક ટિકિટને યાદચ્છિક રીતે ઉપાડવામાં આવે છે. પસંદ કરેલ ટિકિટની સંખ્યાના અંકોનો ગુણાકાર શૂન્ય હોય, તેમ આપેલ હોય ત્યારે અંકોનો સરવાળો 8 થાય તે ઘટનાની સંભાવના ...... છે. [JEE : 2009]

(A) $\frac{1}{50}$ (B) $\frac{1}{40}$ (C) $\frac{1}{14}$ (D) $\frac{1}{49}$

ઉકેલ : A = {00, 01, 02, 03, 04, 05, 06, 07, 08, 09, 10, 20, 30, 40}

B = {08, 17, 26, 35, 44}

$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{1}{14}$ **જવાબ : (C)**

(74) ગણ U = {1, 2, 3, 4, 5, 6} માંથી યાદચ્છિક રીતે એક પછી એક પુનરાવર્તન કર્યા વગર બે અંક પસંદ કરવામાં આવે છે. પસંદ થયેલા અંકોમાં ઓછામાં ઓછો એક અંક 4 કરતાં નાનો હોય તેની સંભાવના ...... છે.

(A) $\frac{1}{15}$ (B) $\frac{14}{15}$ (C) $\frac{1}{5}$ (D) $\frac{4}{5}$

ઉકેલ : ગણ U = {1, 2, 3, 4, 5, 6}

અહીં પુનરાવર્તન કર્યા વગર ક્રમિક રીતે પસંદ કરેલા અંકની પસંદગીના કુલ પ્રકારની સંખ્યા

$n(U) = 6 \times 5 = 30$

A : પસંદ થયેલા અંકોમાં ઓછામાં ઓછો એક અંક 4 કરતાં ઓછો હોય.

$\therefore$ A' : પસંદ થયેલા બંને અંકો 4 કે તેથી મોટા હોય (એટલે કે 4, 5, 6 પૈકી એક)

$\therefore$ $n(A') = 3 \times 2 = 6$

$\therefore$ $n(A) = 30 - 6 = 24$

$\therefore$ $P(A) = \frac{n(A)}{n(U)} = \frac{24}{30} = \frac{4}{5}$ **જવાબ : (D)**

(75) ભારત એ ઇંગ્લૅન્ડ અને ઑસ્ટ્રેલિયા સામે બે-બે વન-ડે રમે છે. પ્રત્યેક જીત માટે 2 ગુણ, પ્રત્યેક હાર માટે 0 ગુણ તથા પ્રત્યેક અનિર્ણિત મૅચ માટે 1 ગુણ મેળવે છે. ભારત 0, 1 અને 2 ગુણાંક મેળવે તે ઘટનાની સંભાવના અનુક્રમે 0.45, 0.05 અને 0.50 છે. ભારત ઓછામાં ઓછો 7 ગુણાંક મેળવે તેની સંભાવના ...... છે.

(A) 0.625 (B) 0.0250 (C) 0.0875 (D) એક પણ નહિ.

ઉકેલ : અહીં 4 મૅચ રમાય છે. ભારતને ઓછામાં ઓછા 0 અને વધુમાં વધુ 8 ગુણાંક મળી શકે.
ભારત ઓછામાં ઓછા 7 ગુણાંક મેળવે છે એટલે 7 કે 8 ગુણાંક.
ચારેય મૅચમાં કુલ 7 ગુણાંક મળવાની શક્યતા
$1 + 2 + 2 + 2$ કે $2 + 1 + 2 + 2$, $2 + 2 + 1 + 2$ કે $2 + 2 + 2 + 1$
$p(7) = 4\ (0.050 \times 0.5 \times 0.5 \times 0.5) = 0.025$
8 ગુણાંક મળવાની શક્યતા $2 + 2 + 2 + 2$
$p(8) = 0.5 \times 0.5 \times 0.5 \times 0.5 = 0.0625$
$\therefore$ 7 કે વધુ ગુણાંક મળવાની સંભાવના $= p(7) + p(8) = 0.025 + 0.0625 = 0.0875$ **જવાબ : (C)**

(76) $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ માંથી કોઈ પણ ત્રણ અંકોનું પુનરાવર્તન રહિત પસંદગી કરતાં મળતો અંક વધુમાં વધુ 6 હોય, તે ઘટના આપેલ હોય ત્યારે ઓછામાં ઓછો 3 હોય તેની સંભાવના ...... છે. [AIEEE : 2012]

(A) $\frac{3}{8}$ (B) $\frac{1}{5}$ (C) $-\frac{1}{5}$ (D) $\frac{2}{5}$

ઉકેલ : $S = \{1, 2, 3, ..., 8\}$
ત્રણેય અંકોમાં વધુમાં વધુ 6 હોય તેની પસંદગી $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ માંથી થાય.
ત્રણેય અંકોમાં ઓછામાં ઓછો 3 હોય તેની પસંદગી $B = \{3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ માંથી થાય.

$$P(B \mid A) = \frac{\binom{4}{3}}{\binom{6}{3}} = \frac{4}{20} = \frac{1}{5}$$ **જવાબ : (B)**

(77) બે સમતોલ પાસાને ત્રણ વખત ઉછાળવામાં આવે છે. પાસાં પર મળતા અંકોનો સરવાળો 9 હોય તેમ બે વખત મળે, તેની સંભાવના ...... છે.

(A) $\frac{8}{729}$ (B) $\frac{8}{243}$ (C) $\frac{1}{729}$ (D) $\frac{8}{9}$

ઉકેલ : મળતા અંકોનો સરવાળો 9 હોય તેને સફળતા તરીકે લઈએ, તો તે ઘટના
$A = \{(3, 6), (4, 5), (5, 4), (6, 3)\}$
$\therefore$ ઘટનાની સફળતાની સંભાવના $p = \frac{4}{36} = \frac{1}{9}$. આથી $q = 1 - \frac{1}{9} = \frac{8}{9}$
અહીં બે પાસા ત્રણ વખત ઉછાળવામાં આવે છે.
આથી, $n = 3$

$$\therefore\ p(x) = \binom{n}{x} p^x\ q^{n-x}$$

$$\therefore\ p(x) = \binom{3}{x}\left(\frac{1}{9}\right)^x\left(\frac{8}{9}\right)^{3-x} = \binom{3}{2}\left(\frac{1}{9}\right)^2\left(\frac{8}{9}\right)^1 = 3\cdot\frac{1}{9\times9}\times\frac{8}{9} = \frac{8}{243}$$ **જવાબ : (B)**

(78) બે બૉમ્બવાહક વિમાનો I અને II બરાબર નિશાન તાકે તેની સંભાવના અનુક્રમે 0.3 અને 0.2 છે. પ્રથમ વિમાન નિશાન ચુકે, ત્યારે જ બીજુ વિમાન બૉમ્બ ફેંકે છે. બીજું વિમાન નિશાન તાકે તેની સંભાવના ...... છે.

(A) $\frac{8}{21}$ (B) $\frac{5}{21}$ (C) $\frac{7}{22}$ (D) $\frac{5}{22}$

ઉકેલ : ધારો કે વિમાન I નિશાન તાકે તે ઘટના A છે, વિમાન II નિશાન તાકે તે ઘટના B છે.
$P(A) = 0.3,\ P(B) = 0.2,\ P(A') = 0.7,\ P(B') = 0.8$
માંગેલ સંભાવના

$$\begin{aligned} P(B) &= P(A')\,P(B) + P(A')\cdot P(B')\cdot P(A')\cdot P(B) + P(A')\cdot P(B')\cdot P(A')\cdot P(B')\cdot P(A')\cdot P(B) + \dots \infty \\ &= (0.7)\cdot(0.2) + (0.7)\cdot(0.8)\cdot(0.7)\cdot(0.2) + (0.7)\,(0.8)\,(0.7)\,(0.8)\,(0.7)\,(0.2) + \dots \infty \\ &= (0.7)\,(0.2)\,[1 + (0.7)\,(0.8) + (0.7)^2\,(0.8)^2 + \dots] \\ &= (0.7)\,(0.2)\left[\frac{1}{1-(0.7)(0.8)}\right] \quad \text{(અનંત સમગુણોત્તર શ્રેઢી)} \\ &= \frac{14}{100}\left(\frac{100}{100-56}\right) = \frac{14}{44} = \frac{7}{22} \end{aligned}$$ **જવાબ : (C)**

(79) એક પેટીમાં ત્રણ લાલ, ચાર વાદળી અને બે લીલા એમ કુલ નવ દડા છે. યાદચ્છિક રીતે પુનરાવર્તન રહિત ત્રણ દડા પસંદ કરવામાં આવે છે. ત્રણેય દડા ભિન્ન રંગના હોય તેની સંભાવના ...... છે.

(A) $\frac{2}{7}$ (B) $\frac{1}{21}$ (C) $\frac{2}{23}$ (D) $\frac{1}{3}$

ઉકેલ : $n(A) = \binom{3}{1}\binom{4}{1}\binom{2}{1} = 24$.

$n(U) = \binom{9}{3} = \frac{9 \cdot 8 \cdot 7}{6} = 84$

$P(A) = \frac{24}{84} = \frac{2}{7}$

જવાબ : (A)

(80) n પેટીઓ છે. દરેકમાં $n + 1$ દડા છે કે જેમાં i મી પેટીમાં i સફેદ દડાઓ છે અને $(n + 1 - i)$ લાલ દડાઓ છે. ઘટના u_i માં યાદચ્છિક રીતે i મી પેટી પસંદ કરવામાં આવે છે, જ્યાં $i = 1, 2, ..., n$ અને પસંદ કરેલ પેટીમાંથી એક દડો પસંદ કરવામાં આવે છે, પસંદ કરેલ દડો સફેદ રંગનો હોય તે ઘટના w છે. તો

(1) જો $P(u_i) \propto i$ જ્યાં $i = 1, 2, ..., n$ તો $\lim\limits_{n\to\infty} P(w) =$ ......

(A) 1 (B) $\frac{2}{3}$ (C) $\frac{3}{4}$ (D) $\frac{1}{4}$

ઉકેલ : $P(u_i) \propto i$

$\therefore \quad P(u_i) = ki$

$\sum P(u_i) = 1$. આથી, $\sum ki = 1$

$k\sum i = 1$. આથી, $\frac{kn(n+1)}{2} = 1$. આથી $k = \frac{2}{n(n+1)}$

હવે $P(w) = \sum P(u_i)P\left(w|u_i\right)$

$$= \sum ki \cdot \frac{i}{n+1} = \sum \frac{2i}{n(n+1)} \frac{i}{n+1} = \sum \frac{2i^2}{n(n+1)^2}$$

$$\therefore \quad \lim_{n\to\infty} P(w) = \lim_{n\to\infty} \sum \frac{2i^2}{n(n+1)^2}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{2}{n(n+1)^2} \cdot \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{(2n+1)}{3n+3} = \lim_{n\to\infty} \frac{2+\frac{1}{n}}{3+\frac{3}{n}} = \frac{2+0}{3+0} = \frac{2}{3}$$

જવાબ : (B)

(2) જો $P(u_i) = c$ જ્યાં c અચળ છે તો $P\left(u_n|w\right) =$ ......

(A) $\frac{2}{n+1}$ (B) $\frac{1}{n+1}$ (C) $\frac{n}{n+1}$ (D) $\frac{1}{2}$

ઉકેલ : $P\left(u_n|w\right) = \frac{P\left(w|u_n\right)P\left(u_n\right)}{P(w)}$

$$= \frac{c\left(\frac{n}{n+1}\right)}{c\left(\frac{\sum i}{n+1}\right)} = \frac{cn}{n+1} \times \frac{2(n+1)}{cn(n+1)} = \frac{2}{n+1} \qquad \left(P(w) = \frac{c}{n+1} + \frac{2c}{n+1} + \frac{3c}{n+1} + ... + \frac{nc}{n+1}\right)$$

જવાબ : (A)

(81) એક પેટી (I_1)માં 1, 2, 3 અંક લખેલાં ત્રણ કાર્ડ્સ છે. બીજી પેટી (I_2) માં 1, 2, 3, 4, 5 અંક લખેલાં કાર્ડ્સ છે અને ત્રીજી પેટી (I_3) માં 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 અંક લખેલાં કાર્ડ્સ છે. દરેક પેટીમાંથી એક કાર્ડ પસંદ કરવામાં આવે છે. x_i એ i મી પેટીમાંથી પસંદ કરેલ કાર્ડ પરનો અંક હોય, તો (i = 1, 2, 3)

(1) $x_1 + x_2 + x_3$ અયુગ્મ હોય તેની સંભાવના

(A) $\frac{29}{105}$ (B) $\frac{53}{105}$ (C) $\frac{57}{105}$ (D) $\frac{1}{2}$

(2) x_1, x_2, x_3 સમાંતર શ્રેણીમાં હોય તેની સંભાવના

(A) $\frac{9}{105}$ (B) $\frac{10}{105}$ (C) $\frac{11}{105}$ (D) $\frac{7}{105}$

ઉકેલ : (i) $x_1 + x_2 + x_3$ અયુગ્મ હોય તેની શક્યતા બે છે.

(i) x_1, x_2, x_3 ત્રણેય અયુગ્મ હોય.

(ii) કોઈ બે યુગ્મ અને એક અયુગ્મ

(i) x_1, x_2, x_3 ત્રણેય અયુગ્મ હોય તેની કુલ શક્યતા $2 \times 3 \times 4 = 24$

(ii) બે યુગ્મ અને એક અયુગ્મ (પહેલી પેટીમાંથી યુગ્મ, બીજી પેટીમાંથી યુગ્મ, ત્રીજી પેટીમાંથી અયુગ્મ તે રીતે)

$1 \cdot 2 \cdot 4 + 1 \cdot 3 \cdot 3 + 2 \cdot 2 \cdot 3 = 8 + 9 + 12 = 29$

$x_1 + x_2 + x_3$ અયુગ્મ મળે તેની કુલ શક્યતા $r = 24 + 29 = 53$

ત્રણ પેટીમાંથી એક-એક કાર્ડ પસંદ કરવાની કુલ શક્યતા

$n = 3 \times 5 \times 7 = 105$

$\therefore$ માંગેલ ઘટનાની સંભાવના $= \frac{r}{n} = \frac{53}{105}$

(2) x_1, x_2, x_3 સમાંતર શ્રેણીમાં હોય, તેની સંભાવના માટે

B = {(1, 2, 3), (1, 3, 5), (1, 4, 7), (2, 3, 4), (2, 4, 6), (3, 4, 5), (3, 5, 7), (3, 2, 1), (3, 3, 3), (1, 1, 1) (2, 2, 2)}

$P(B) = \frac{r}{n} = \frac{11}{105}$ **જવાબ : (1) (B), (2) (C)**

(82) પાસાની જોડને ત્યાં સુધી નાખવામાં આવે છે કે, પાસાં પર મળતા અંકોનો સરવાળો 4 અથવા 6 મળે. સરવાળો 6 પ્રથમ આવે તેની સંભાવના ...... છે.

(A) $\frac{3}{8}$ (B) $\frac{5}{8}$ (C) $\frac{7}{8}$ (D) $\frac{1}{8}$

ઉકેલ : ધારો કે E_n એ n મા પ્રયત્ને બંને પાસાં પરનો સરવાળો 6 પ્રથમ આવે તે ઘટના છે.

$\therefore$ પ્રથમ $(n - 1)$ પ્રયત્નમાં બંને પાસાં પરનો સરવાળો 4 કે 6 ન આવે.

સરવાળો 4 આવે તે (1, 3), (2, 2), (3, 1) દ્વારા અને સરવાળો 6 આવે તે (1, 5), (2, 4), (3, 3), (4, 2), (5, 1) દ્વારા શક્ય છે. નિદર્શાવકાશમાં કુલ 36 ઘટકો છે.

સરવાળો 4 કે 6 આવે તેની સંભાવના $= \frac{8}{36} = \frac{2}{9}$

$\therefore P(E_n) = \left(1 - \frac{2}{9}\right)^{n-1} \frac{5}{36} = \left(\frac{7}{9}\right)^{n-1} \times \frac{5}{36}$

$\therefore$ પ્રથમ વખત 6 આવે તેની સંભાવના

$P(E_1 \cup E_2 \cup ...) = P(E_1) + P(E_2) + ... \infty$

$= \frac{5}{36} + \frac{7}{9} \times \frac{5}{36} + \left(\frac{7}{9}\right)^2 \frac{5}{36} + ... \infty$

$= \frac{5}{36}\left(\frac{1}{1 - \frac{7}{9}}\right) = \frac{5}{36} \times \frac{9}{2} = \frac{5}{8}$ (અનંત સમગુણોત્તર શ્રેઢી $a + ar + ar^2 + ... = \frac{a}{1-r}, |r| < 1$) **જવાબ : (B)**

(83) રેલવે સ્ટેશન પર એક મુસાફર લૉકરમાં તેનો સમાન મૂકી બહાર ફરવા જાય છે. લૉકર ત્રણ આંકડાના કોડ (code)થી ખોલી શકાય છે. એક અજાણ્યો માણસ લૉકર ખોલવાનો પ્રયત્ન કરે છે.

(1) પ્રથમ પ્રયત્નમાં લૉકર ખૂલી જાય તેની સંભાવના...

(2) k પ્રયત્ન પછી લૉકર ખૂલી જાય તેની સંભાવના ($k < 1000$)...

(A) (1) 0.001 (2) $\frac{k}{100}$ (B) (1) 0.01 (2) $\frac{k}{1000}$

(C) (1) 0.001 (2) $\frac{k}{1000}$ (D) (1) 1 (2) $\frac{k}{10000}$

ઉકેલ : (1) ધારો કે A : લૉકર પ્રથમ પ્રયત્નમાં ખૂલી જાય તે ઘટના છે. ત્રણ આંકડાનો કોડ છે. આંકડા 0 થી 9 સુધીના છે.

$\therefore \quad P(A) = \frac{1}{10} \cdot \frac{1}{10} \cdot \frac{1}{10} = 0.001$

(2) ધારો કે B : લૉકર k પ્રયત્ન પછી ખૂલે છે.

B' : પ્રથમ k પ્રયત્નમાં લૉકર ખૂલતું નથી.

$\therefore \quad P(B) = 1 - P(B')$

$$= 1 - \frac{999}{1000} \cdot \frac{998}{999} \cdots \frac{1000-(k-1)}{1000-(k-2)} \cdot \frac{1000-k}{1000-(k-1)}$$

$$= 1 - \frac{1000-k}{1000} = \frac{k}{1000}$$

જવાબ : (C)

(84) એક સંચાર સંરચનામાં n ભાગ આવેલા છે. દરેક ભાગ સ્વતંત્ર રીતે કામ કરે તેની સંભાવના k છે. આખી સંચાર સંરચના ત્યારે જ કામ કરે જ્યારે તેના અડધાથી વધુ ભાગ કામ કરતા હોય. k ની કઈ કિંમત માટે 5 ભાગવાળી સંચાર સંરચના 3 ભાગવાળી સંચાર સંરચના કરતા વધુ સારી રીતે કામ કરે ?

(A) $< \frac{1}{2}$ (B) $> \frac{1}{2}$ (C) $> \frac{4}{5}$ (D) $> \frac{3}{4}$

ઉકેલ : સંચાર સંરચનાના કામ કરતા ભાગ એ પ્રચલ n, p વાળા દ્વિપદી વિતરણ થશે.

5 ભાગવાળી સંચાર સંરચના કામ કરે તેની સંભાવના

$${}_5C_3 k^3(1-k)^2 + {}_5C_4 k^4(1-k) + k^5$$

જ્યારે 3 ભાગવાળી સંચાર સંરચના કામ કરે તેની સંભાવના ${}_3C_2 k^2(1-k) + k^3$

જો 5 ભાગવાળી સંચાર સંરચના વધુ સારી રીતે કામ કરે, તો

$$10k^3(1-k)^2 + 5k^4(1-k) + k^5 > 3k^2(1-k) + k^3$$

$\therefore \quad 10k(1-k)^2 + 5k^2(1-k) + k^3 > 3(1-k) + k$

$\therefore \quad 10k(1-k)^2 + 5k^2(1-k) - 3(1-k) - k(1-k)(1+k) > 0$

$\therefore \quad (1-k)[10k - 10k^2 + 5k^2 - 3 - k - k^2] > 0$

$\therefore \quad (1-k)(-6k^2 + 9k - 3) > 0$

$\therefore \quad -3(1-k)(2k^2 - 3k + 1) > 0$

$\therefore \quad 3(k-1)^2(2k-1) > 0$

$\therefore \quad k > \frac{1}{2}$

જવાબ : (B)

નિષ્કર્ષ અને કારક પ્રકારના પ્રશ્નો

(A) વિધાન 1 તથા વિધાન 2 સત્ય છે. વિધાન 2 એ વિધાન 1 ની સાચી સમજૂતી માટે પર્યાપ્ત છે.

(B) વિધાન 1 તથા વિધાન 2 સત્ય છે. વિધાન 2 એ વિધાન 1 ની સાચી સમજૂતી માટે પર્યાપ્ત નથી.

(C) વિધાન 1 સત્ય છે, વિધાન 2 અસત્ય છે.

(D) વિધાન 1 અસત્ય છે, વિધાન 2 સત્ય છે.

(85) **વિધાન 1:** ધારો કે $A_i (i = 1, 2, ..., n)$ એ n નિરપેક્ષ ઘટનાઓ છે, જ્યાં $P(A'_i) = \frac{i}{i+1}$, $1 \le i \le n$.

એક પણ ઘટના ઉદ્‌ભવે નહિ તેની સંભાવના $\frac{n}{n+1}$ છે.

વિધાન 2 : જો $A_1, A_2, ..., A_n$ નિરપેક્ષ ઘટનાઓ હોય તો $P(A_1 \cap A_2 \cap ... \cap A_n) = P(A_1) \cdot P(A_2) ... P(A_n)$

ઉકેલ : P(એક પણ ઘટના ન ઉદ્‌ભવે.)

$= P(A'_1 \cap A'_2 \cap ... \cap A'_n)$

$= P(A'_1)\ P(A'_2)\ ...\ P(A'_n)$(જો $A_i = (i = 1, 2, ..., n)$ નિરપેક્ષ ઘટનાઓ હોય તો A'_i પણ નિરપેક્ષ થશે.)

$= \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} \times \frac{3}{4} \times ... \frac{n-1}{n} \times \frac{n}{n+1} = \frac{1}{n+1}$

$\therefore$ વિધાન 1 એ મિથ્યા છે તથા વિધાન 2 સત્ય છે. **જવાબ : (D)**

(86) બસ-સ્ટેશન પર ત્રણ બસમાં 10 મુસાફરો ગમે તે બસમાં બેસી શકે છે. (અગાઉ બસમાં એક પણ મુસાફર નથી) દરેક બસમાં ઓછામાં ઓછો એક મુસાફર બેઠેલ હોય તેની સંભાવના ...... છે.

(A) $\frac{{}_{10}P_3 \cdot 3^7}{3^{10}}$ (B) $1 - \frac{{}_{10}C_3 \cdot 3^7}{3^{10}}$ (C) $1 - \frac{2^{10}}{3^{10}}$ (D) $\frac{3^9 - 2^{10} + 1}{3^9}$

ઉકેલ : 10 મુસાફરો ગમે તે ત્રણ બસમાં બેસે તેના કુલ પ્રકાર $= 3^{10}$.

દરેક બસમાં ઓછામાં ઓછો એક મુસાફર બેઠેલ હોય એટલે કે બધા મુસાફર ગમે તે એક જ બસમાં બેઠા હોય તથા બધા મુસાફર ગમે તે બે બસમાં જ બેઠા હોય તેવું ન બની શકે.

બધા જ મુસાફરો એક જ બસમાં બેસે તો ત્રણમાંથી એક બસ $\binom{3}{1}$ રીતે પસંદ થઈ શકે અને બધા જ મુસાફરો તેમાં બેસે.

ત્રણમાંથી બે બસ $\binom{3}{2}$ રીતે પસંદ થઈ શકે અને એક જ બસમાં બધા મુસાફરો 2^{10} રીતે બેસી શકે. પરંતુ બંને બસમાં એક મુસાફર હોય જ. આથી તે $\binom{3}{2}$ $(2^{10} - 2)$ રીતે શક્ય છે.

$\therefore$ માંગેલ પ્રકારની સંખ્યા $= 3^{10} - \binom{3}{1} \times 1 - \binom{3}{2}(2^{10} - 2)$

$\therefore$ માંગેલ સંભાવના $= \frac{3^{10}-3-3(2^{10}-2)}{3^{10}}$

$= \frac{3^9 - 2^{10} + 1}{3^9}$ **જવાબ : (D)**

(87) બે યાદચ્છિક સંખ્યાઓનો ગુણાકાર કરવામાં આવે છે. જો આ સંખ્યાના એકમનો અંક યુગ્મ હોય તેની સંભાવના p છે તથા અયુગ્મ હોય, તો તેની સંભાવના q હોય, તો $\frac{10p}{q}$ = ...

(A) 10 (B) 20 (C) 30 (D) $\frac{1}{30}$

ઉકેલ : આપણે જાણીએ છીએ કે, બે અયુગ્મ સંખ્યાનો ગુણાકાર અયુગ્મ સંખ્યા થાય છે, જ્યારે બાકીના બધા પ્રકારમાં યુગ્મ સંખ્યા થાય છે.

$\therefore\ p = \frac{3}{4}$ અને $q = \frac{1}{4}$

$\therefore\ \frac{10p}{q} = 30$ **જવાબ : (C)**

(88) MATHEMATICS અને STATISTICS શબ્દમાંથી એક-એક અક્ષર પસંદ કરવામાં આવે છે. જો એકસરખા (સામાન્ય) અક્ષર પસંદ થવાની સંભાવના $\frac{a}{b}$ હોય, તો $a + b + 3 =$ ...... (a, b પરસ્પર અવિભાજ્ય)

(A) 50 (B) 62 (C) 60 (D) 65

ઉકેલ : MATHEMATICS ના અક્ષરોની સંખ્યા 11 છે.

$\therefore$ આ શબ્દમાંથી એક અક્ષર પસંદ થવાની સંભાવના $\frac{1}{11}$ છે.

STATISTICS ના અક્ષરોની સંખ્યા 10 છે.

$\therefore$ આ શબ્દમાંથી એક અક્ષર પસંદ થવાની સંભાવના $\frac{1}{10}$ છે. બંને શબ્દના સામાન્ય અક્ષરો A, T, I, C, S છે.

$\therefore$ સામાન્ય અક્ષરો પસંદ થવાની સંભાવના

$= \frac{2}{11}\times\frac{1}{10}+\frac{2}{11}\times\frac{3}{10}+\frac{1}{11}\times\frac{2}{10}+\frac{1}{11}\times\frac{1}{10}+\frac{1}{11}\times\frac{3}{10}=\frac{7}{55} = \frac{a}{b}$. આથી, $a = 7$, $b = 55$

$\therefore$ $a + b + 3 = 7 + 55 + 3 = 65$ **જવાબ : (D)**

(89) ચાર વિકલ્પવાળા બહુવિકલ્પી પ્રશ્નો કે જેમાં એક વિકલ્પ સત્ય છે, તેવા અમુક પ્રશ્નો વિદ્યાર્થીઓને ગૃહકાર્યમાં આપવામાં આવેલ છે તે રીતે આપેલ છે. વિદ્યાર્થી આ પ્રશ્નોના જવાબ ધારીને (અંદાજિત) અથવા એકબીજાની મદદ લઈને અથવા તે સાચો જવાબ પોતે જ જાણે છે તે રીતે આપે છે. અંદાજિત જવાબ આપવાની સંભાવના $\frac{1}{3}$ છે. એકબીજાની મદદ લઈને જવાબ આપવાની સંભાવના $\frac{1}{6}$ છે. વિદ્યાર્થીએ બીજા વિદ્યાર્થીની મદદ લીધી હોય ત્યારે તે સાચો જવાબ આપે તેની સંભાવના $\frac{1}{8}$ છે. વિદ્યાર્થીએ જવાબ સાચો આપ્યો હોય ત્યારે તે સાચો જવાબ જાણતો હોય તેની સંભાવના ...... છે.

(A) $\frac{29}{35}$ (B) $\frac{24}{29}$ (C) $\frac{1}{7}$ (D) $\frac{1}{9}$

ઉકેલ : ધારો કે ઘટના A : વિદ્યાર્થી ધારીને સાચો જવાબ આપે છે.

ઘટના B : વિદ્યાર્થી એકબીજાની મદદ લઈને સાચો જવાબ આપે છે.

ઘટના C : વિદ્યાર્થી સાચો જવાબ જાણે છે.

ઘટના D : વિદ્યાર્થી સાચો જવાબ આપે છે.

$P(A) = \frac{1}{3}$, $P(B) = \frac{1}{6}$, $P(C) = \frac{1}{2}$

$P(D|B) = \frac{1}{8}$, $P(D|A) = \frac{1}{4}$ (ધારણા કરવાથી ચાર વિકલ્પ), $P(D|C) = 1$ (સાચો જવાબ આપે છે.)

માગેલ સંભાવના $P(C \mid D) = \dfrac{P(C)\,P(D|C)}{P(A)\,P(D|A) + P(B)P(D|B) + P(C)P(D|C)}$

$= \dfrac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{4}+\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{8}+\frac{1}{2}\cdot 1} = \frac{24}{29}$ **જવાબ : (B)**

(90) છ વ્યક્તિઓની જન્મતારીખ બે ચોક્કસ કૅલેન્ડર મહિનામાં આવે તેની સંભાવના ...... છે.

(A) $\frac{341}{12^5}$ (B) $\frac{66}{12^5}$ (C) $\frac{352}{12^5}$ (D) $\frac{11}{12^5}$

ઉકેલ : છ વ્યક્તિઓની જન્મતારીખ ગમે તે મહિનામાં આવે તેવા પ્રકારની સંખ્યા $= 12^6$

બાર મહિનામાંથી બે મહિના પસંદ કરવાના પ્રકારની સંખ્યા $= {}_{12}C_2$

છ વ્યક્તિઓની જન્મતારીખ આ બે મહિનામાં આવે તેવા પ્રકાર $= 2^6$.

આ 2^6 પ્રકારમાંથી ($1^6 + 1^6 = 2$) પ્રકાર એવા થશે કે આ છ વ્યક્તિઓની જન્મતારીખ એક જ મહિનામાં આવે.

$\therefore$ $2^6 - 2$ પ્રકારે છ વ્યક્તિઓની જન્મતારીખ પસંદ થયેલ બે મહિનામાં આવે.

$\therefore$ માંગેલ સંભાવના $= \frac{{}_{12}C_2(2^6-2)}{12^6} = \frac{341}{12^5}$ **જવાબ : (A)**

(91) એક પેટીમાં 10 સફેદ અને 3 કાળા દડા આવેલ છે. જ્યાં સુધી કાળા દડા પૂરા ન થાય ત્યાં સુધી પેટીમાંથી એક પછી એક દડો પૂરવણી સિવાય યાદચ્છિક રીતે પસંદ કરવામાં આવે છે. સાતમા પ્રયત્ને આ પ્રક્રિયા પૂરી થાય તેની સંભાવના ...... છે.

(A) $\frac{5}{286}$ (B) $\frac{3}{286}$ (C) $\frac{7}{286}$ (D) $\frac{15}{286}$

ઉકેલ : માંગેલ સંભાવના

= પ્રથમ છ પ્રયત્નમાં બે કાળા તથા 4 સફેદ દડા આવે તેની સંભાવના $\times$ સાતમાં પ્રયત્ને કાળો દડો આવે તેની સંભાવના

$$= \frac{\binom{3}{2}\binom{10}{4}}{\binom{13}{6}} \times \frac{1}{7} = \frac{3 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 720}{24 \cdot 13 \cdot 12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8} \times \frac{1}{7} = \frac{15}{286}$$ **જવાબ : (D)**

(92) એક પેટીમાં 3 સફેદ અને 3 કાળા દડા આવેલ છે. ત્રણ દડા યાદચ્છિક રીતે પસંદ કરવામાં આવે છે અને પછી ત્રણ લાલ દડા પેટીમાં મૂકવામાં આવે છે અને ફરીથી ત્રણ દડા પસંદ કરવામાં આવે છે. પસંદ થયેલા ત્રણેય દડા અલગ-અલગ રંગના હોય તેની સંભાવના ...... છે.

(A) > 20 % (B) > 25 % (C) > 30 % (D) > 33 %

ઉકેલ : પ્રથમ વખતે ત્રણ સફેદ અથવા ત્રણ કાળા દડા પસંદ કર્યા હોય તો બીજા પ્રયત્નમાં ત્રણ ભિન્ન રંગના દડા મળે તે શક્ય નથી.

આથી બે સફેદ અને એક કાળો અથવા એક સફેદ અને બે કાળા દડા જ પસંદ કરી શકાય.

A : બે દડા સફેદ, એક દડો કાળો

B : બે દડા કાળા, એક દડો સફેદ

C : ત્રણે દડા ભિન્ન રંગના

$$P(A) = P(B) = \frac{\binom{3}{2}\binom{3}{1}}{\binom{6}{3}}$$

$$P(C \mid A) = P(C \mid B) = \frac{\binom{1}{1} \times \binom{2}{1} \times \binom{3}{1}}{\binom{6}{3}}$$

$\therefore$ $P(C) = P(A)P(C \mid A) + P(B)P(C \mid B)$

$$= 2\left[\frac{\binom{3}{2}\binom{3}{1}}{\binom{6}{3}} \times \frac{1 \times 2 \times 3}{\binom{6}{3}}\right]$$

$$= \frac{2 \times 3 \times 3 \times 6}{20 \times 20}$$

$$= \frac{27}{100} = 27\,\%$$ **જવાબ : (A), (B)**

(93) એક વ્યક્તિની ગાડી જ્યાં n ગાડી પાર્ક કરેલ છે તે જગ્યાએ પાર્ક કરી છે તથા તે ગાડી પાર્કિંગના છેડા પર નથી. થોડા સમય પછી જ્યારે આ વ્યક્તિ તેમની ગાડી લેવા આવે છે ત્યારે n માંથી m ગાડી બાકી રહી છે. આ વ્યક્તિની ગાડીની આજુબાજુની ગાડી જતી રહી હોય, તેની સંભાવના ...... છે.

(A) $\frac{n-m}{(n-1)!}$ (B) $\frac{n-m!}{(n-1)!}$ (C) $\frac{(n-m)(n-m-1)}{(n-1)(n-2)}$ (D) $\frac{(n-m)(n-m+1)}{(n-1)(n-2)}$

ઉકેલ : $n - 1$ ગાડીમાંથી $m - 1$ ગાડી જતી રહે છે. ($n - 1$ કારણ કે આ વ્યક્તિની ગાડી સિવાય)

$\therefore$ તેના કુલ પ્રકાર $\binom{n-1}{m-1}$ રીતે ગાડીઓ ગઈ.

હવે આ વ્યક્તિની ગાડીની આજુબાજુની ગાડી જતી રહી હોય તેના પ્રકાર = $\binom{n-3}{m-1}$

(આ $m - 1$ ગાડી $n - 3$ જગ્યાએથી જ ગઈ હોય)

$\therefore$ માંગેલ સંભાવના = $\dfrac{\binom{n-3}{m-1}}{\binom{n-1}{m-1}} = \dfrac{(n-3)!\,(n-m)!}{(n-m-2)!\,(n-1)!}$

$= \dfrac{(n-m-1)(n-m)}{(n-2)(n-1)}$ **જવાબ : (C)**

(94) માર્ટિન, ઈકબાલ અને દીપક વારાફરતી પાસો ઉછાળે છે. માર્ટિન શરૂઆત કરે છે પછી ઈકબાલ અને પછી દીપક એમ વારાફરતી પાસો ઉછાળે છે. દીપક દ્વારા પ્રથમ વખત પાસાં પરની સંખ્યા 6 આવે તેની સંભાવના ...... છે.

(A) $\frac{1}{3}$ (B) $\frac{2}{9}$ (C) $\frac{25}{91}$ (D) $\frac{5}{18}$

ઉકેલ : k મા પ્રયત્ને પ્રથમ વખત પાસાં પરની સંખ્યા 6 આવે તેની સંભાવના = $\left(\frac{5}{6}\right)^{k-1}\cdot\left(\frac{1}{6}\right)$

દીપક તેના પ્રથમ પ્રયત્નમાં સફળ થાય અથવા બીજા પ્રયત્નમાં સફળ થાય અથવા ત્રીજા પ્રયત્નમાં સફળ થાય. આમ, ચાલ્યા કરશે. એટલે કે પ્રયોગના ત્રીજા, છઠ્ઠા અને નવમા પ્રયત્નમાં સફળતા મળે.

$\therefore$ માંગેલ સંભાવના = $\left(\frac{5}{6}\right)^2\cdot\frac{1}{6}+\left(\frac{5}{6}\right)^5\cdot\frac{1}{6}+\ldots+\left(\frac{5}{6}\right)^{3n-1}\cdot\frac{1}{6}+\ldots\infty$

આ અનંત સમગુણોત્તર શ્રેઢીનો સરવાળો છે. પ્રથમ પદ $a = \left(\frac{5}{6}\right)^2\cdot\frac{1}{6}$. સામાન્ય ગુણોત્તર $r = \left(\frac{5}{6}\right)^3$

$\therefore$ માંગેલ સંભાવના = $\dfrac{a}{1-r} = \dfrac{\frac{5^2}{6^3}}{1-\frac{5^3}{6^3}} = \dfrac{25}{91}$ **જવાબ : (C)**

(95) દ્વિપદી વિતરણ $B\left(n, p=\frac{1}{4}\right)$ છે. પ્રયત્નોની સંખ્યા n છે. માટે જો ઓછામાં ઓછી એક સફળતા માટેની સંભાવના $\frac{9}{10}$ કે તેથી વધારે હોય, તો n એ ...... થી વધારે હોય. [AIEEE : 2009]

(A) $\dfrac{1}{log_{10}4+log_{10}3}$ (B) $\dfrac{9}{log_{10}4-log_{10}3}$ (C) $\dfrac{4}{log_{10}4-log_{10}3}$ (D) $\dfrac{1}{log_{10}4-log_{10}3}$

ઉકેલ : અહીં, $q = 1 - p = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$, $p = \frac{1}{4}$

હવે, $p(1) + p(2) + \ldots + p(n) \ge \frac{9}{10}$

$\therefore\ 1 - p(0) \ge \frac{9}{10}$

$\therefore\ 1 - \frac{9}{10} \ge p(0)$

$\therefore\ p(0) \le \frac{1}{10}$

$\therefore\ \binom{n}{0}\left(\frac{1}{4}\right)^0\left(\frac{3}{4}\right)^n \le \frac{1}{10}$

$\therefore\ \left(\frac{3}{4}\right)^n \le \frac{1}{10}$

$\therefore\ \left(\frac{4}{3}\right)^n \ge 10$

$\therefore\ log_{10}\left(\frac{4}{3}\right)^n \ge log_{10}10$

$\therefore\ n[log_{10}4 - log_{10}3] \ge 1$

$\therefore\ n \ge \dfrac{1}{log_{10}4-log_{10}3}$ **જવાબ : (D)**

(96) 22 મી સદીનું કોઈ વર્ષ યાદચ્છિક રીતે પસંદ કરતાં તેમાં 53 રવિવાર હોવાની સંભાવના ...... છે.

(A) $\frac{3}{28}$ (B) $\frac{2}{28}$ (C) $\frac{7}{28}$ (D) $\frac{5}{28}$

ઉકેલ : ધારો કે ઘટતા B_1 : 22 મી સદીનું લીપવર્ષ પસંદ થાય.

B_2 : 22 મી સદીનું લીપવર્ષ પસંદ ન થાય.

A : પસંદ થયેલા વર્ષમાં 53 રવિવાર હોય.

હવે, 100 વર્ષમાં 25 લીપવર્ષ હોય, તેથી

$P(B_1) = \frac{25}{100} = \frac{1}{4}$, $P(B_2) = \frac{75}{100} = \frac{3}{4}$,

લીપવર્ષમાં 52 અઠવાડિયાં અને 2 દિવસ હોય છે.

$\therefore$ U = {(રવિ, સોમ), (સોમ, મંગળ), (મંગળ, બુધ), (બુધ, ગુરુ), (ગુરુ, શુક્ર), (શુક્ર, શનિ), (શનિ, રવિ)}

$\therefore$ લીપવર્ષમાં 53 રવિવાર હોવાની સંભાવના $P(A \mid B_1) = \frac{2}{7}$

લીપવર્ષ ન હોય, તો તેમાં 52 અઠવાડિયાં અને 1 દિવસ હોય.

$\therefore$ U = {રવિ, સોમ, મંગળ, બુધ, ગુરુ, શુક્ર, શનિ}

$\therefore$ લીપવર્ષ ન હોય તો તેમાં 53 રવિવાર આવવાની સંભાવના $P(A \mid B_2) = \frac{1}{7}$

$\therefore$ માંગેલ સંભાવના $P(A) = P(B_1) \cdot P(A \mid B_1) + P(B_2) \cdot P(A \mid B_2)$

$= \left(\frac{1}{4} \times \frac{2}{7}\right) + \left(\frac{3}{4} \times \frac{1}{7}\right) = \frac{5}{28}$ **જવાબ : (D)**

(97) એક યાદચ્છિક ચલ X એ 0, 1, 2, 3 કિંમતો ધારણ કરે છે અને તેનો મધ્યક 1.3 છે.
જો $P(X = 3) = 2P(X = 1)$ અને $P(X = 2) = 0.3$, તો $P(X = 0)$ = ...

(A) 0.1 (B) 0.2 (C) 0.3 (D) 0.4

ઉકેલ : ધારો કે $P(X = 0) = a$ અને $P(X = 1) = b$ તો $P(X = 3) = 2b$

x_i	$p(x_i)$	$x_i p(x_i)$
0	a	0
1	b	b
2	0.3	0.6
3	$2b$	$6b$
કુલ	$a + 3b + 0.3$	$7b + 0.6$

મધ્યક $E(X) = \sum x_i p(x_i)$

$1.3 = 7b + 0.6$. આથી, $7b = 0.7$. આથી, $b = 0.1$

હવે, $\sum p(x_i) = 1$

$\therefore$ $a + 3b + 0.3 = 1$

$\therefore$ $a + 0.3 + 0.3 = 1$. આથી, $a = 0.4$ **જવાબ : (D)**

(98) બે વિમાન I અને II વારાફરતી લક્ષ્ય પર બૉમ્બ નાંખે છે. વિમાન I અને II નું લક્ષ્ય પર બરોબર બૉમ્બ પડે તેની સંભાવના અનુક્રમે 0.3 અને 0.2 છે. જો વિમાન I નું લક્ષ્ય પર બૉમ્બ ન પડે તો જ વિમાન II બૉમ્બ ફેંકશે તો વિમાન II વડે લક્ષ્ય પર બૉમ્બ પડવાની સંભાવના ...... છે. [AIEEE : 2007]

(A) 0.14 (B) 0.2 (C) 0.7 (D) 0.06

ઉકેલ : ધારો કે ઘટના A : વિમાન I વડે લક્ષ પર બૉમ્બ પડે.

B : વિમાન II વડે લક્ષ પર બૉમ્બ પડે.

અહીં $P(A) = 0.3$ અને $P(B \mid A') = 0.2$. આથી, $P(A') = 1 - 0.3 = 0.7$

માંગેલ સંભાવના $P(A' \cap B) = P(A') \cdot P(B \mid A') = 0.7 \times 0.2 = 0.14$ **જવાબ : (A)**

(99) એક 18 પ્રયત્નોના દ્વિપદી વિતરણના મધ્યક અને વિચરણનો સરવાળો 10 હોય, તો દ્વિપદી વિતરણ ...... છે.

(A) $\binom{18}{x}\left(\frac{1}{3}\right)^x\left(\frac{2}{3}\right)^{18-x}$, $x = 0, 1, 2, \ldots 18$ (B) $\binom{18}{x}\left(\frac{2}{3}\right)^x\left(\frac{1}{3}\right)^{18-x}$, $x = 0, 1, 2, \ldots 18$

(C) $\binom{18}{x}\left(\frac{1}{2}\right)^{18}$, $x = 0, 1, 2, \ldots 18$ (D) $\binom{18}{x}\left(\frac{1}{5}\right)^x\left(\frac{4}{5}\right)^{18-x}$, $x = 0, 1, 2, \ldots 18$

ઉકેલ : અહીં, $n = 18$, તથા મધ્યક + વિચરણ = 10. આથી, $np + npq = 10$, $p + q = 1$

હવે, $18p + 18p(1 - p) = 10$

$\therefore\ 18p + 18p - 18p^2 - 10 = 0$

$\therefore\ 18p^2 - 36p + 10 = 0$

$\therefore\ 9p^2 - 18p + 5 = 0$

$\therefore\ (3p - 5)(3p - 1) = 0$

$\therefore\ p = \frac{5}{3}$ (અશક્ય) અથવા $p = \frac{1}{3}$. આથી, $q = 1 - p = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$ $(0 < p < 1)$

આથી $p(x) = \binom{n}{x} p^x q^{n-x} = \binom{18}{x}\left(\frac{1}{3}\right)^x\left(\frac{2}{3}\right)^{18-x}$, $x = 0, 1, 2, \ldots 18$ **જવાબ : (A)**

(100) જો 12 સમાન દડાઓ ત્રણ ભિન્ન પેટીઓમાં મૂકવાના છે, તો કોઈ એક પેટીમાં 3 દડા આવે તેની સંભાવના ...... છે. [JEE : 2015]

(A) $220\left(\frac{1}{3}\right)^{12}$ (B) $22\left(\frac{1}{3}\right)^{11}$ (C) $\frac{55}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^{11}$ (D) $55\left(\frac{2}{3}\right)^{10}$

ઉકેલ : $r = \binom{12}{3} \cdot 2^9$, $n = 3^{12}$

કુલ પ્રકારો $= \frac{r}{n} = \frac{\binom{12}{3}2^9}{3^{12}} = \frac{55}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^{11}$ **જવાબ : (C)**

(101) એક બહુવિકલ્પ પરીક્ષામાં 5 પ્રશ્નો છે. દરેક પ્રશ્નના ત્રણ જવાબો છે, જેમાંથી ફક્ત એક જવાબ સાચો છે. કોઈ વિદ્યાર્થી માત્ર અટકળ દ્વારા ચાર અથવા ચારથી વધારે સાચા જવાબો આપે તેની સંભાવના ...... હોય.

(A) $\frac{11}{3^5}$ (B) $\frac{10}{3^5}$ (C) $\frac{17}{3^5}$ (D) $\frac{13}{3^5}$

ઉકેલ : 5 પ્રશ્નોના જવાબો આપવાના કુલ પ્રકારો $n = 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 = 3^5$

ચાર સાચા જવાબ આપવા માટે ચાર પ્રશ્નો પસંદ કરી તેના સાચા જવાબ આપવા પડે અને બાકીના એક પ્રશ્નનો ખોટો જવાબ આપવો પડે.

આવી કુલ રીત $= \left[\binom{5}{4} \times 1\right] \times 2 = 5 \times 2 = 10$

પાંચ સાચા જવાબ આપવાની કુલ રીત = 1

$\therefore$ આ ઘટનાના કુલ ઘટકોની સંખ્યા $r = 10 + 1 = 11$

$\therefore$ માંગેલી સંભાવના $= \frac{r}{n} = \frac{11}{3^5}$ **જવાબ : (A)**

બીજી રીત :

$n = 5, p = \frac{1}{3}, q = \frac{2}{3}$

માંગેલી સંભાવના $= p(4) + p(5)$

$= \binom{5}{4}\left(\frac{1}{3}\right)^4\left(\frac{2}{3}\right)^1 + \binom{5}{5}\left(\frac{1}{3}\right)^5\left(\frac{2}{3}\right)^0$

$= \frac{5 \times 2}{3^5} + \frac{1}{3^5}$

$= \frac{10+1}{35} = \frac{11}{3^5}$ **જવાબ : (A)**

(102) જો પરસ્પર નિવારક ઘટનાઓ A અને B માટે $P(A) = \frac{3x+1}{3}$ અને $P(B) = \frac{1-x}{4}$, તો x ની શક્ય તમામ કિંમતોનો ગણ ...... અંતરાલમાં છે. [JEE : 2013]

(A) [0, 1] (B) $\left[\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right]$ (C) $\left[-\frac{1}{3}, \frac{5}{9}\right]$ (D) $\left[-\frac{7}{9}, \frac{4}{9}\right]$

ઉકેલ : અહીં, $0 \le P(A) \le 1$, $0 \le P(B) \le 1$

$0 \le \frac{3x+1}{3} \le 1$, $0 \le \frac{1-x}{4} \le 1$

$\therefore$ $0 \le 3x + 1 \le 3$, $0 \le 1 - x \le 4$

$\therefore$ $-1 \le 3x \le 2$, $-1 \le -x \le 3$

$\therefore$ $-\frac{1}{3} \le x \le \frac{2}{3}$, $-3 \le x \le 1$ (1)

વળી, $0 \le P(A \cup B) \le 1$

$\therefore$ $0 \le P(A) + P(B) \le 1$ (A, B પરસ્પર નિવારક છે.)

$\therefore$ $0 \le \frac{3x+1}{3} + \frac{1-x}{4} \le 1$

$\therefore$ $0 \le \frac{12x+4+3-3x}{12} \le 1$

$\therefore$ $0 \le 9x + 7 \le 12$. આથી, $-\frac{7}{9} \le x \le \frac{5}{9}$ (2)

$\max\left\{-\frac{1}{3}, -3, -\frac{7}{9}\right\} \le x \le \min\left\{\frac{2}{3}, 1, \frac{5}{9}\right\}$

$-\frac{1}{3} \le x \le \frac{5}{9}$. આથી $x \in \left[-\frac{1}{3}, \frac{5}{9}\right]$ **જવાબ : (C)**

(103) જો બે ઘટનાઓ A અને B માટે $P(A \cup B) = P(A \cap B)$, તો નીચેના પૈકી કયું વિધાન સત્ય નથી. [Online JEE : 2014]

(A) A અને B સમસંભાવી છે. (B) $P(A \cap B') = 0$

(C) $P(A' \cap B) = 0$ (D) $P(A) + P(B) = 1$

ઉકેલ : અહીં $P(A \cup B) = P(A \cap B)$

$\therefore$ $P(A) + P(B) - P(A \cap B) = P(A \cap B)$

$\therefore$ $(P(A) - P(A \cap B)) + P(B) - P(A \cap B) = 0$

$\therefore$ $P(A \cap B') + P(A' \cap B) = 0$

$\therefore$ $P(A \cap B') = 0$ અને $P(A' \cap B) = 0$ (1)

$\therefore$ $P(A) - P(A \cap B) = 0$ અને $P(B) - P(A \cap B) = 0$

$\therefore$ $P(A) = P(A \cap B)$ અને $P(B) = P(A \cap B)$

$\therefore$ $P(A) = P(B)$ (2)

$\therefore$ (A), (B) અને (C) સત્ય છે. તેથી (D) સત્ય નથી. **જવાબ : (D)**

(104) એક ગણ S માં 7 સભ્યો છે. યાદૃચ્છિક રીતે S નો એક અરિક્ત ઉપગણ A અને S નો એક સભ્ય x પસંદ કરવામાં આવે છે તો $x \in$ A હોય તેની સંભાવના ...... છે. [Online JEE : 2014]

(A) $\frac{1}{2}$ (B) $\frac{64}{127}$ (C) $\frac{63}{128}$ (D) $\frac{32}{128}$

ઉકેલ : S ના અરિક્ત ઉપગણોની સંખ્યા $= 2^7 - 1 = 127$. આથી, $n = 127$

આ S ના 127 અરિક્ત ઉપગણો પૈકી જેમાં x ન હોય તેવા અરિક્ત ઉપગણોની સંખ્યા $= 2^6 - 1 = 63$.

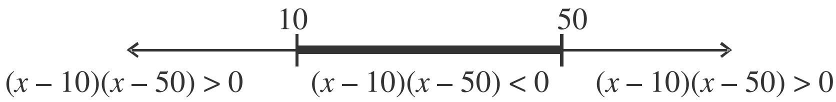
જેમાં x હોય તેવા ઉપગણોની સંખ્યા $= 127 - 63 = 64$. આથી, $r = 64$

$\therefore$ માંગેલી સંભાવના $= \frac{r}{n} = \frac{64}{127}$ **જવાબ : (B)**

(105) ગણ {1, 2, 3, ... 100} માંથી એક સંખ્યા x પસંદ કરવામાં આવે છે, તો ઘટના A = પસંદ થયેલ સંખ્યા x માટે $\frac{(x-10)(x-50)}{(x-30)} \ge 0$ તો P(A) = ... [Online JEE : 2014]

(A) 0.71 (B) 0.70 (C) 0.51 (D) 0.20

ઉકેલ : $(x - 10)(x - 50) = 0 \Rightarrow x = 10$ અથવા $x = 50$



વિકલ્પ 1 : જો $(x - 10)(x - 50) \ge 0$ અને $(x - 30) > 0$ તો $\frac{(x-10)(x-50)}{(x-30)} \ge 0$

$\therefore$ $x \in \{1, 2, ..., -10\} \cup \{50, 51, ... 100\}$ અને $x > 30$

$\therefore$ $x \in \{50, 51, ..., 100\}$

વિકલ્પ 2 : જો $(x - 10)(x - 50) \le 0$ તથા $x < 30$ અને $(x - 30) < 0$ તો $\frac{(x-10)(x-50)}{(x-30)} \ge 0$

$\therefore$ $x \in \{10, 11, ..., 29\}$

આમ વિકલ્પ (1) અને (2) પરથી

A = {10, 11, ... 29} $\cup$ {50, 51, ..., 100}

$\therefore$ A નાં ઘટકોની સંખ્યા $r = 20 + 51 = 71$

$\therefore$ $P(A) = \frac{71}{100} = 0.71$ **જવાબ : (A)**

(106) A, B અને C જોડયુક્ત નિરપેક્ષ ઘટનાઓ છે, જ્યાં $P(C) > 0$ અને $P(A \cap B \cap C) = 0$ તો $P(A' \cap B' | C) =$ ...... [JEE : 2011]

(A) $P(B') - P(C')$ (B) $P(A') + P(B')$ (C) $P(B') - P(B')$ (D) $P(A') - P(B)$

ઉકેલ : $P(A' \cap B' | C) = \frac{P(A' \cap B' \cap C)}{P(C)}$

$$= \frac{P[(A \cup B)' \cap C]}{P(C)}$$

$$= \frac{P(C) - P[(A \cup B) \cap C]}{P(C)}$$

$$= \frac{P(C) - P[(A \cap C) + P(B \cap C) - P(A \cap B \cap C)]}{P(C)}$$

$$= \frac{P(C) - P(A \cap C) - P(B \cap C) + 0}{P(C)}$$

$$= \frac{P(C) - P(A) \cdot P(C) - P(B)\, P(C)}{P(C)}$$

$$= \frac{P(C)\,[1 - P(A) - P(B)]}{P(C)}$$

$= 1 - P(A) - P(B)$

$= P(A') - P(B)$ **જવાબ : (D)**

(107) સફળતાની સંભાવના p હોય તેવા 5 બર્નુલી પ્રયત્નો કરવામાં આવે છે. ઓછામાં ઓછા એક પ્રયત્નમાં નિષ્ફળતા મળે તેની સંભાવના $\frac{31}{32}$ કે તેથી વધુ હોય તો p ...... અંતરાલમાં હોય. [JEE : 2011]

(A) $\left(\frac{3}{4}, \frac{11}{12}\right]$ (B) $\left[0, \frac{1}{2}\right]$ (C) $\left(\frac{11}{12}, 1\right]$ (D) $\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{4}\right]$

ઉકેલ : ધારો કે ઘટના A : ઓછામાં ઓછા એક પ્રયત્નમાં નિષ્ફળતા મળે.

$\therefore$ A' = બધા જ પ્રયત્નોમાં સફળતા મળે.

$P(A') = p(5) = \binom{5}{5} p^5\ q^0 = p^5$

હવે, $P(A) \geq \frac{31}{32}$

$\therefore\ 1 - P(A') \geq \frac{31}{32}$

$\therefore\ P(A') \leq \frac{1}{32}$

$\therefore\ p^5 \leq \left(\frac{1}{2}\right)^5$. આથી, $p \leq \frac{1}{2}$

$\therefore\ p \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$ $(p \geq 0)$ **જવાબ : (B)**

(108) ગણ {1, ,2, 3, ..., 8} માંથી પૂરવણી વગર ત્રણ સંખ્યાઓ પસંદ કરવાની છે. જો પસંદ થયેલ ત્રણ સંખ્યાઓ પૈકી મહત્તમ સંખ્યા 6 છે તેમ આપેલ હોય તો ત્રણ સંખ્યાઓ પૈકી ન્યૂનતમ સંખ્યા 3 હોય તેની સંભાવના ...... છે. [JEE : 2012]

(A) $\frac{3}{8}$ (B) $\frac{1}{5}$ (C) $\frac{1}{4}$ (D) $\frac{2}{5}$

ઉકેલ : ઘટના A : પસંદ થયેલ ત્રણ સંખ્યાઓ પૈકી મહત્તમ સંખ્યા 6 હોય અને બાકીની બે 1 થી 5 માંથી હોય.

$$P(A) = \frac{\binom{1}{1}\binom{5}{2}}{\binom{8}{3}} = \frac{10}{8 \times 7} = \frac{5}{28}$$

ઘટના B : પસંદ થયેલ ત્રણ સંખ્યાઓ પૈકી ન્યૂનતમ સંખ્યા 3 હોય અને બાકીની 4 થી 8 માંથી હોય.

$$\therefore\ P(B) = \frac{\binom{1}{1}\binom{5}{2}}{\binom{8}{3}} = \frac{5}{28}$$

ઘટના $(A \cap B)$: પસંદ થયેલ ત્રણ સંખ્યાઓ પૈકી મહત્તમ 6 હોય, ન્યૂનતમ 3 હોય અને એક 4 અને 5 માંથી એક હોય.

$$\therefore \quad P(A \cap B) = \frac{\binom{1}{1}\binom{1}{1}\binom{2}{1}}{\binom{8}{3}} = \frac{1}{28}$$

હવે, માંગેલ સંભાવના $P(B \mid A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{\frac{1}{28}}{\frac{5}{28}} = \frac{1}{5}$ **જવાબ : (B)**

બીજી રીત :

મહત્તમ સંખ્યા 6. આથી, ધારો કે બાકીની બે સંખ્યાઓ a, b હોય.

$U = \{(a, b, 6)\}$, $a = 1, 2, 3, 4$, $b = 1, 2, 3, 4, 5$

$\therefore \quad n(U) = \binom{5}{2} = 10$

$\therefore \quad A = \{\{3, 4, 6\}, \{3, 5, 6\}\}$. આથી, $n(B) = 2$

$\therefore \quad P(A) = \frac{2}{10} = \frac{1}{5}$ **જવાબ : (B)**

(109) એક માણસ નિશાન તાકી શકે તેની સંભાવના $\frac{2}{5}$ છે. તે k વખત નિશાન તાકે છે, તો k ની કઈ ધન ન્યૂનતમ કિંમત માટે તે ઓછામાં ઓછી એક વખત નિશાન તાકી શકશે તેની સંભાવના $\frac{7}{10}$ થી વધુ હોય.

[Online JEE : 2013]

(A) 3 (B) 5 (C) 2 (D) 4

ઉકેલ : અહીં $p = \frac{2}{5}$, $q = 1 - p = \frac{1}{5}$ અને $n = k$

અહીં, $p(1) + p(2) + ... + p(k) > \frac{7}{10}$

$\therefore \quad 1 - p(0) > \frac{7}{10}$

$\therefore \quad p(0) < \frac{3}{10}$

$\therefore \quad \binom{k}{0}\left(\frac{3}{5}\right)^k < \frac{3}{10}$

$\therefore \quad \frac{10}{3} \times \left(\frac{3}{5}\right)^k < 1$

$\therefore \quad k = 3, 4, 5, ...$

$\therefore$ k ની ન્યૂનતમ કિંમત 3 છે. **જવાબ : (A)**

(110) બે નિરપેક્ષ ઘટનાઓ આપેલ છે. જો એક જ ઘટના ઉદ્ભવે તેની સંભાવના $\frac{26}{49}$ હોય અને એક પણ ઘટના ન ઉદ્ભવે તેની સંભાવના $\frac{15}{49}$ હોય, તો બે ઘટનાઓ પૈકી વધારે સંભાવનાવાળી ઘટનાની સંભાવના ...... છે.

[Online JEE : 2013]

(A) $\frac{4}{7}$ (B) $\frac{6}{7}$ (C) $\frac{3}{7}$ (D) $\frac{5}{7}$

ઉકેલ : ધારો કે P(A) = x અને P(B) = y, જ્યાં A અને B એ આપેલ નિરપેક્ષ ઘટનાઓ છે.

$$P[(A \cap B') \cup (A' \cap B)] = \frac{26}{49} \text{ અને } P(A' \cap B') = \frac{15}{49}$$

$$\therefore \quad P(A \cap B') + P(A' \cap B) = \frac{26}{49} \text{ અને } P(A') \cdot P(B') = \frac{15}{49}$$

$$\therefore \quad P(A) \cdot P(B') + P(A') \cdot P(B) = \frac{26}{49} \text{ અને } (1 - P(A))(1 - P(B)) = \frac{15}{49}$$

$$\therefore \quad x(1 - y) + (1 - x)y = \frac{26}{49} \text{ અને } (1 - x)(1 - y) = \frac{15}{49}$$

$$\therefore \quad x + y - 2xy = \frac{26}{49} \qquad \text{અને } 1 - x - y + xy = \frac{15}{49}$$

$$\therefore \quad x + y - xy = 1 - \frac{15}{49} = \frac{34}{49}$$

$$(x + y - xy) - xy = \frac{26}{49}$$

$\therefore \quad \frac{34}{49} - xy = \frac{26}{49}$. આથી, $xy = \frac{8}{49}$. આથી, $y = \frac{8}{49x}$

વળી $x + y - xy = \frac{34}{49}$

$$\therefore \quad x + y - \frac{8}{49} = \frac{34}{49}$$

$$\therefore \quad x + \frac{8}{49x} = \frac{34}{49} + \frac{8}{49} = \frac{6}{7}$$

$\therefore \quad 49x^2 + 8 = 42x$

$\therefore \quad 49x^2 - 42x + 8 = 0$

$\therefore \quad (7x - 3)^2 = 1$

$\therefore \quad 7x - 3 = 1$ અથવા $7x - 3 = -1$

$\therefore \quad x = \frac{4}{7}$ અથવા $x = \frac{2}{7}$

હવે, $x \cdot y = \frac{8}{49}$ તેથી $y = \frac{2}{7}$ અથવા $\frac{4}{7}$

$\therefore$ માંગેલી સંભાવના = $\frac{4}{7}$ **જવાબ : (A)**

(111) જો યાદચ્છિક ચલ X ને n અને p પ્રચલોવાળું દ્વિપદી વિતરણ B(n, p) હોય કે જેથી P(X = 2) = P(X = 3) તો X નો મધ્યક E(X) = ... [Online JEE : 2014]

(A) $2p$ (B) $3 - p$ (C) $\frac{p}{2}$ (D) $\frac{p}{3}$

ઉકેલ : અહીં $p(2) = p(3)$

$$\therefore \quad \binom{n}{2} p^2 q^{n-2} = \binom{n}{3} p^3 q^{n-3}$$

$$\therefore \quad \frac{n(n-1)q}{2} = \frac{n(n-1)(n-2)p}{6}$$

$\therefore \quad 3q = (n - 2)p$

$\therefore \quad 3q = np - 2p$

$\therefore \quad 3(1 - p) = np - 2p$

$\therefore \quad 3 - 3p + 2p = np$

$\therefore \quad 3 - p = E(X)$ (મધ્યક $E(X) = np$)

$\therefore \quad E(X) = 3 - p$ **જવાબ : (B)**

(112) ઘટનાઓ A અને E ની સંભાવના ધન છે. ($P(A \cap E) \neq 0$)

વિધાન 1 : $P(E \mid A) \geq P(A \mid E) \cdot P(E)$

વિધાન 2 : $P(A \mid E) \geq P(A \cap E)$ [JEE : 2014]

(A) બંને વિધાન સત્ય છે. (B) બંને વિધાન અસત્ય છે.

(C) વિધાન 1 સત્ય છે અને વિધાન 2 અસત્ય છે. (D) વિધાન 1 અસત્ય છે અને વિધાન 2 સત્ય છે.

ઉકેલ : $P(E \mid A) \geq P(A \mid E) \cdot P(E)$

$\Leftrightarrow \frac{P(A \cap E)}{P(A)} \geq \frac{P(A \cap E)}{P(E)} \cdot P(E)$

$\Leftrightarrow P(A) \leq 1$ જે સત્ય છે.

આથી, વિધાન 1 સત્ય છે

વળી, $P(A \mid E) \geq P(A \cap E)$

$\Leftrightarrow \frac{P(A \cap E)}{P(E)} \geq P(A \cap E)$

$\Leftrightarrow 1 \geq P(E)$

$\therefore$ વિધાન 2 સત્ય છે. **જવાબ : (A)**

(113) બે સમતોલ પાસા A અને B ને એક વખત ઉછાળવામાં આવે છે. ઘટના E_1 = પાસા A પર અંક ચાર આવે તે ઘટના E_2 = પાસા B પર અંક બે આવે તે ઘટના અને ઘટના E_3 = બંને પાસા પરના અંકનો સરવાળો અયુગ્મ થાય તે ઘટના દર્શાવે તો નીચેનામાંથી કયું સત્ય નથી ?

(A) E_1 અને E_2 નિરપેક્ષ છે. (B) E_2 અને E_3 નિરપેક્ષ છે.

(C) E_1 અને E_3 નિરપેક્ષ છે. (D) E_1, E_2 અને E_3 નિરપેક્ષ છે.

ઉકેલ : $P(E_1) = \frac{1}{6}$, $P(E_2) = \frac{1}{6}$, $P(E_3) = \frac{1}{2}$

$P(E_1 \cap E_2) = \frac{1}{36} = P(E_1) \cdot P(E_2)$ (એક જ ઘટક (4, 2))

$P(E_2 \cap E_3) = \frac{3}{36} = \frac{1}{12} = P(E_2) \cdot P(E_3)$ ((1, 2), (3, 2), (5, 2) ઘટકો)

$P(E_1 \cap E_3) = \frac{3}{36} = \frac{1}{12} = P(E_1) \cdot P(E_3)$ ((4, 1), (4, 3), (4, 5) ઘટકો)

$P(E_1 \cap E_2 \cap E_3) = 0 \neq P(E_1) \cdot P(E_2) \cdot P(E_3)$ **જવાબ : (D)**

એક કરતાં વધુ સાચા વિકલ્પો :

(114) A અને B નિરપેક્ષ ઘટનાઓ છે. જ્યાં $P(A) = \frac{1}{2}$ અને $P(B) = \frac{1}{5}$ તો, ...

(A) $P(A \cup B) = \frac{3}{5}$ (B) $P(A \mid B) = \frac{1}{2}$

(C) $P(A \mid (A \cup B)) = \frac{5}{6}$ (D) $P((A \cap B) \mid (A' \cup B')) = 0$

ઉકેલ : $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

$= P(A) + P(B) - P(A) \cdot P(B)$ (A અને B નિરપેક્ષ ઘટના છે.)

$= \frac{1}{2} + \frac{1}{5} - \left(\frac{1}{2} \times \frac{1}{5}\right) = \frac{3}{5}$

$P(A \mid B) = P(A) = \frac{1}{2}$

$$P(A \mid A \cup B) = \frac{P[A \cap (A \cup B)]}{P(A \cup B)} = \frac{P(A)}{P(A \cup B)} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{3}{5}} = \frac{5}{6}$$

$A' \cup B' = (A \cap B)'$

$\therefore \ P((A \cap B) \mid (A' \cup B')) = 0$ **જવાબ : (A), (B), (C), (D)**

(115) ઘટનાઓ A અને B માટે $P(A) = P(A \mid B) = \frac{1}{4}$ અને $P(B \mid A) = \frac{1}{2}$ તો ......

(A) A અને B નિરપેક્ષ ઘટનાઓ છે.

(B) A અને B પરસ્પર નિવારક ઘટનાઓ છે.

(C) $P(A' \mid B) = \frac{3}{4}$

(D) $P(B' \mid A) = \frac{1}{2}$

ઉકેલ : $P(A) = P(A \mid B)$. આથી, $P(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$

$\therefore \ P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$. તેથી A અને B નિરપેક્ષ ઘટનાઓ છે.

$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B \mid A) = \frac{1}{4} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{8} \neq 0$

તેથી A અને B પરસ્પર નિવારક ઘટનાઓ નથી.

$P(A' \mid B) = P(A') = 1 - P(A) = 1 \cdot \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$ (A', B પણ નિરપેક્ષ)

$P(B' \mid A') = P(B') = 1 - P(B) = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$ (A', B' પણ નિરપેક્ષ)

જવાબ : (A), (C), (D)

(116) એક વિદ્યાર્થી I, II, III એમ ત્રણ પરીક્ષા આપી રહ્યો છે. જો તે પરીક્ષા I અને II અથવા પરીક્ષા I અને III માં પાસ થાય તો તે પાસ થયો છે તેમ કહેવાય. પરીક્ષા I, II અને III માં પાસ થવાની સંભાવના અનુક્રમે p, q અને $\frac{1}{2}$ છે તથા વિદ્યાર્થીની પાસ થવાની સંભાવના $\frac{1}{2}$ હોય તો ......

(A) $p = \frac{3}{4}, \ q = \frac{1}{3}$

(B) $p = \frac{2}{3}, \ q = \frac{1}{2}$

(C) $p = \frac{3}{5}, \ q = \frac{2}{3}$

(D) p અને q ની અનંત કિંમતો હોઈ શકે.

ઉકેલ : ધારો કે A, B, C પરીક્ષા I, II અને III માં પાસ થાય તેવી ઘટનાઓ છે.

$\therefore \ P(A) = p, \ P(B) = q, \ P(C) = \frac{1}{2}$ અને ઘટના X એ વિદ્યાર્થી પાસ થાય તે ઘટના છે.

$\therefore \ P(X) = P[(A \cap B \cap C') \cup (A \cap B' \cap C) \cup (A \cap B \cap C)]$

$$\frac{1}{2} = P(A) \cdot P(B) \cdot P(C') + P(A) \cdot P(B') \cdot P(C) + P(A) \cdot P(B) \cdot P(C)$$

$$= pq\left(1-\frac{1}{2}\right) + p(1 - q)\left(\frac{1}{2}\right) + pq\left(\frac{1}{2}\right)$$

$$= \frac{1}{2}[pq + p - pq + pq]$$

$$\frac{1}{2} = \frac{1}{2}p(1 + q)$$

$\therefore \ p(1 + q) = 1$

(A), (B), (C) ત્રણેની કિંમતો આ સમીકરણનું સમાધાન કરે છે તથા તેવી p અને q ની કિંમતો મળી શકે કે જે $p(1 + q) = 1$ નું સમાધાન કરી શકે. **જવાબ : (A), (B), (C), (D)**

(117) એક દ્વિપદી યાદચ્છિક ચલ X નો મધ્યક અને વિચરણ અનુક્રમે a અને b હોય, તો ......

(A) $a > b > 0$ (B) $\frac{a}{b} > 1$

(C) $\frac{a^2}{a-b}$ એ ધનપૂર્ણાંક સંખ્યા છે. (D) $\frac{a^2}{a+b}$ એ ધનપૂર્ણાંક સંખ્યા છે.

ઉકેલ : અહીં, $a = np$, $b = npq$

હવે, $0 < q < 1$. તેથી $0 < npq < np$. આથી, $0 < b < a$

$\therefore \quad 0 < b < a \Rightarrow a > b > 0 \Rightarrow \frac{a}{b} > 1$

વળી, $\frac{a^2}{a-b} = \frac{n^2p^2}{np-npq} = \frac{np}{1-q} = n$ જે ધનપૂર્ણાંક સંખ્યા છે.

સ્પષ્ટ છે કે D અસત્ય છે. **જવાબ : (A), (B), (C)**

(118) ગણ {1, 2, 3, ..., 15} માંથી પૂરવણી વગર ત્રણ સંખ્યાઓ પસંદ કરવાની છે. ધારો કે ઘટના E_1 એ પસંદ થયેલી ત્રણ સંખ્યાઓ પૈકી ન્યૂનતમ સંખ્યા 5 હોય તે છે અને ઘટના E_2 એ પસંદ થયેલ ત્રણ સંખ્યાઓ પૈકી મહત્તમ સંખ્યા 10 હોય તો ......

(A) $P(E_1) = \frac{9}{91}$ (B) $P(E_2) = \frac{36}{455}$ (C) $P(E_1 \cap E_2) = \frac{4}{455}$ (D) $P(E_1 | E_2) = \frac{1}{9}$

ઉકેલ : $P(E_1)$ = P(એક સંખ્યા 5 અને બીજી બે સંખ્યાઓ 6 થી 15 માંથી પસંદ કરવી.)

$$= \frac{{}^1C_1 \times {}^{10}C_2}{{}^{15}C_3} = \frac{45 \times 6}{15 \cdot 14 \cdot 13} = \frac{9}{91}$$

$P(E_2)$ = P (એક સંખ્યા 10 અને બીજી બે સંખ્યાઓ 1 થી 9 માંથી પસંદ કરવી.)

$$= \frac{{}^1C_1 \times {}^9C_2}{{}^{15}C_3} = \frac{36 \times 6}{15 \cdot 14 \cdot 13} = \frac{36}{455}$$

$$P(E_1 \cap E_2) = \frac{6 \times 4}{15 \cdot 14 \cdot 13} = \frac{4}{455}$$

$$P(E_1 | E_2) = \frac{P(E_1 \cap E_2)}{P(E_2)} = \frac{4}{36} = \frac{1}{9}$$

જવાબ : (A), (B), (C), (D)

જોડકાં જોડો :

(119) એક માણસની એક પગલું આગળ ચાલવાની સંભાવના 0.4 અને એક પગલું પાછા જવાની સંભાવના 0.6 છે. ધારો કે તે માણસ 11 પગલાં ચાલે છે અને તે પોતાના પ્રારંભિક સ્થાનથી r પગલાં દૂર હોય તેની સંભાવના p_r હોય તો ......

(A) p_1	(P) 0
(B) p_3	(Q) ${}^{11}C_5\ (0.24)^5$
(C) p_{10}	(R) $(0.4)^{11} + (0.6)^{11}$
(D) p_{11}	(S) ${}^{11}C_4\ (0.24)^4\ (0.28)$

ઉકેલ : ધારો કે X એ માણસ દ્વારા આગળ ચાલેલાં પગલાંની સંખ્યા દર્શાવે તો, $n = 11$, $p = 0.4$, $q = 0.6$

$p_1 = p(X = 5) + P(X = 6)$

$= {}^{11}C_5\, p^5\, q^6 + {}^{11}C_6\, p^6\, q^5$

$= {}^{11}C_5\, p^5\, q^6 + {}^{11}C_5\, p^6\, q^5$

$= {}^{11}C_5\, p^5\, q^5\, (q + p)$ $\qquad (p + q = 1)$

$= {}^{11}C_5\, (pq)^5\, (1)$

$= {}^{11}C_5\, (0.24)^5$ $\qquad$ આથી, (A) → (Q)

$p_3 = p(X = 4) + p(X = 7)$

$= {}^{11}C_4\, p^4\, q^7 + {}^{11}C_7\, p^7\, q^4$

$= {}^{11}C_4\, (pq)^4 \times [(q^3 + p^3)]$

$= {}^{11}C_4\, (pq)^4\, [(p + q)^3 - 3pq(p + q)]$ $\quad (p + q = 1)$

$= {}^{11}C_4\, (pq)^4\, (1 - 3pq)$

$= {}^{11}C_4\, (0.24)^4(0.28)$ $\qquad$ આથી, (B) → (S)

$p_{10} = 0$ $\qquad$ આથી, (C) → (P)

$p_{11} = p(X = 0) + p(X = 11)$

$= \binom{11}{0} p^0 q^{11} + \binom{11}{11} p^{11} q^0$

$= q^{11} + p^{11}$

$= (0.6)^{11} + (0.4)^{11}$ $\qquad$ આથી, (D) → (R)

નોંધ : જો આગળ ચાલેલાં પગલાંની સંખ્યા X હોય અને પાછાં ચાલેલાં પગલાંની સંખ્યા Y હોય તો

$X + Y = 11$ અને $|X - Y| = r$.

હવે જો $r = 1$ તો $X = 5$ અથવા $X = 6$

જો $r = 3$, તો $X = 4$ અથવા $X = 7$

જો $r = 11$, તો $X = 0$ અથવા $X = 11$

પરંતુ જો $r = 0$ લેતાં $X = \frac{11}{2}$ મળે જે શક્ય નથી, તેથી $p_{10} = 0$.

જવાબ :

	P	Q	R	S
A	○	●	○	○
B	○	○	○	●
C	●	○	○	○
D	○	○	●	○

(120) એક સમતોલ પાસાને જ્યાં સુધી 6 ન આવે ત્યાં સુધી ઉછાળવામાં આવે છે. જો X એ સમતોલ પાસો ઉછાળવાની સંખ્યા દર્શાવે તો ......

(i) $P(X = 3)$	(a) $\frac{25}{36}$
(ii) $P(X \geq 3)$	(b) $\frac{125}{216}$
(iii) $P(X \geq 6) \mid X \geq 3)$	(c) 6
(iv) $E(X)$	(d) $\frac{25}{216}$

(A) (i) → (d), (ii) → (a), (iii) → (c), (iv) → (b)

(B) (i) → (d), (ii) → (a), (iii) → (b), (iv) → (c)

(C) (i) → (d), (ii) → (b), (iii) → (a), (iv) → (c)

(D) (i) → (a), (ii) → (d), (iii) → (b), (iv) → (c)

ઉકેલ : અહીં, $p = \frac{1}{6}$, $q = \frac{5}{6}$

$P(X = r) = pq^{r-1}$

$\therefore \quad P(X = 3) = \left(\frac{1}{6}\right)\left(\frac{5}{6}\right)^2 = \frac{25}{216}$ (i) → (d)

$\therefore \quad P(X \geq 3) = 1 - [P(X = 1) + P(X = 2)] = 1 - \left[\frac{1}{6} + \frac{1}{6}\left(\frac{5}{6}\right)\right] = 1 - \frac{11}{36} = \frac{25}{36}$ (ii) → (a)

$$P(X \geq 6 \mid X \geq 3) = \frac{P[(X \geq 6) \cap (X \geq 3)]}{P(X \geq 3)} = \frac{P(X \geq 6)}{P(X \geq 3)}$$

$P(X \geq 6) = pq^5 + pq^6 + pq^7 + ... = \frac{pq^5}{1-q} = \frac{pq^5}{p} = q^5$. તે જ રીતે $P(X \geq 3) = q^2$

$P(X \geq 6 \mid X \geq 3) = \frac{q^5}{q^2} = q^3 = \frac{125}{216}$ (iii) → (b)

$E(X) = \sum_{r=1}^{\infty} r \cdot P(X = r) = \sum_{r=1}^{\infty} rpq^{r-1} = \frac{p}{(1-q)^2} = \frac{p}{p^2} = 6$ (iv) → (c)

જવાબ : (B)

નોંધ : (1) $\sum_{r=1}^{\infty} rpq^{r-1} = s$ હોય, તો

$s = p(1 + 2q + 3q^2 + ... + \infty)$

$\therefore \quad qs = p(q + 2q^2 + 3q^3 + ... + \infty)$

$\therefore \quad (1 - q)s = p(1 + q + q^2 + ... + \infty) = \pm\frac{p}{1-q}$

નોંધ : (2) સૌપ્રથમ (ii) ગણતાં (ii) → (a) મળે. આથી, જવાબ (A) કે (B) જ હોઈ શકે. હવે, (iii) ગણતાં (iii) → (b) મળે. આથી, જવાબ (B) છે.

(121) યાદચ્છિક ચલ Xનો મધ્યક અને પ્રમાણિત વિચલન અનુક્રમે 10 અને 5 છે. યોગ્ય જોડ શોધો.

(i) $E(X^2)$	(*p*) 0
(ii) $E[X(X + 1)]$	(*q*) 135
(iii) $E\left(\frac{X-10}{5}\right)$	(*r*) 125
(iv) $E\left(\frac{X-10}{5}\right)^2$	(*s*) 1

(A) (i) → (q), (ii) → (r), (iii) → (p), (iv) → (s)

(B) (i) → (r), (ii) → (p), (iii) → (s), (iv) → (p)

(C) (i) → (r), (ii) → (q), (iii) → (p), (iv) → (s)

(D) (i) → (p), (ii) → (q), (iii) → (r), (iv) → (s)

ઉકેલ : મધ્યક E(X) = 10, વિચરણ σ_X = 5, V(X) = 25

$\therefore \ \frac{npq}{np} = \frac{5}{10}$. આથી, $q = \frac{1}{2}$. $p = 1 - q = \frac{1}{2}$ તથા $np = 20$ હોવાથી $n = 20$

$V(X) = E(X^2) - (E(X))^2$

$25 = E(X^2) - (10)^2$

$E(X^2) = 100 + 25 = 125$ (i) → (*r*)

$E[X(X + 1)] = E(X^2 + X) = E(X^2) + E(X) = 125 + 10 = 135$ (ii) → (*q*)

$E\left(\frac{X-10}{5}\right) = E\left(\frac{1}{5}X - 2\right) = \frac{1}{5}E(X) - 2 = \frac{1}{5}(10) - 2 = 0$ (iii) → (*p*)

$E\left(\frac{X-10}{5}\right)^2 = E\left(\frac{X^2 - 20X + 100}{25}\right)$

$= \frac{1}{25}E(X^2) - \frac{4}{5}E(X) + 4$

$= \frac{1}{25}(125) - \frac{4}{5}(10) + 4 = 5 - 8 + 4 = 1$ (iv) → (*s*) **જવાબ : (C)**

નોંધ : (i) → (*r*) પછી (ii) → (*p*) ગણતાં જવાબ (C) મળે.

નિષ્કર્ષ અને કારક પ્રકારના પ્રશ્નો :

(A) વિધાન 1, 2 સત્ય છે તથા વિધાન 2 એ વિધાન 1ની સાચી સમજૂતી આપે છે.

(B) વિધાન 1, 2 સત્ય છે પણ વિધાન 2 એ વિધાન 1ની સાચી સમજૂતી નથી આપતું.

(C) વિધાન 1 સત્ય છે, વિધાન 2 અસત્ય છે.

(D) વિધાન 1 અસત્ય છે, વિધાન 2 સત્ય છે.

(122) ગણ {1, 2, 3, ..., 20} માંથી 4 સંખ્યાઓ યાદચ્છિક રીતે પસંદ કરવામાં આવે છે.

વિધાન 1 : પસંદ થયેલ 4 સંખ્યાઓ ક્રમમાં ગોઠવતાં સમાંતર શ્રેણી મળે તેની સંભાવના $\frac{1}{85}$ છે.

વિધાન 2 : જો પસંદ થયેલ સંખ્યાઓ સમાંતર શ્રેણી રચે તો સામાન્ય તફાવતની તમામ શક્ય કિંમતો {±1, ±2, ±3, ±4, ±5} છે.

ઉકેલ : U = {1, 2, 3, ..., 20}

સામાન્ય તફાવત d = 6 લેતાં, 20, 20 − 6 = 14, 16 − 6 = 8, 8 − 6 = 2

એટલે કે 20, 14, 8, 2 એમ ચાર સંખ્યા મળે.

આમ, d = ±6 શક્ય છે.

∴ વિધાન 2 અસત્ય છે.

હવે, d = ±6 માટે 4 સંખ્યાઓ 2 રીતે મળી શકે.

d = ±5 માટે 4 સંખ્યાઓ 5 રીતે મળી શકે.

2, 8, 14, 20; 1, 7, 13, 19;

1, 6, 11, 16; 2, 7, 12, 17, 3, 8, 13, 18 અથવા 4, 9, 14, 19

ઉપરની જેમ આગળ વધી શકાય.

d = ±4 માટે 4 સંખ્યાઓ 8 રીતે મળી શકે.

d = ±3 માટે 4 સંખ્યાઓ 11 રીતે મળી શકે.

d = ±2 માટે 4 સંખ્યાઓ 14 રીતે મળી શકે.

d = ±1 માટે 4 સંખ્યાઓ 17 રીતે મળી શકે.

∴ માંગેલી સંભાવના = $\frac{2+5+8+11+14+17}{^{20}C_4}$ = $\frac{57 \times 24}{20 \times 19 \times 18 \times 17}$ = $\frac{1}{85}$

∴ વિધાન 1 સત્ય છે. **જવાબ : (C)**

$P(A) \neq P(B)$ હોય, તો

(123) જો A, B અને C પરસ્પર નિરપેક્ષ ઘટનાઓ હોય તો

વિધાન 1 : A અને $B \cup C$ પણ નિરપેક્ષ ઘટનાઓ છે.

વિધાન 2 : A અને $B \cap C$ પણ નિરપેક્ષ ઘટનાઓ છે.

ઉકેલ : A, B અને C પરસ્પર નિરપેક્ષ ઘટનાઓ છે.

$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$, $P(B \cap C) = P(B) \cdot P(C)$, $P(A \cap C) = P(A) \cdot P(C)$ અને

$P(A \cap B \cap C) = P(A) \cdot P(B) \cdot P(C)$.

હવે, $P[A \cap (B \cup C)] = P[(A \cap B) \cup (A \cap C)]$

$= P(A \cap B) + P(A \cap C) - P(A \cap B \cap C)$

$= P(A) \cdot P(B) + P(A) \cdot P(C) - P(A) \cdot P(B) \cdot P(C)$

$= P(A) [P(B) + P(C) - P(B) \cdot P(C)]$

$= P(A) [P(B) + P(C) - P(B \cap C)]$

$= P(A) \cdot P(B \cup C)$

અને $P[A \cap (B \cap C)] = P(A \cap B \cap C)$

$= P(A) \cdot P(B) \cdot P(C)$

$= P(A) \cdot P(B \cap C)$

∴ વિધાન 1 અને 2 સત્ય છે, પરંતુ વિધાન 2 એ વિધાન 1 ની સમજૂતી માટે પર્યાપ્ત નથી. **જવાબ : (B)**

(124) **વિધાન 1 :** 52 પત્તાંના ઢગમાંથી એક પત્તું યાદચ્છિક રીતે પસંદ કરવામાં આવે છે, તો તે પત્તું એક્કો હોય કે રાની હોય તેની સંભાવના $\frac{1}{13}$ છે.

વિધાન 2 : $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

ઉકેલ : વિધાન 2 સત્ય છે.

હવે, ધારો કે ઘટના A = પસંદ થયેલ પત્તું એક્કો છે.

ઘટના B = પસંદ થયેલ પત્તું રાની છે.

∴ $P(A) = \frac{4}{52} = \frac{1}{13}$, $P(B) = \frac{4}{52} = \frac{1}{13}$, $P(A \cap B) = 0$

∴ $P(A \cup B) = P(A) + P(B) = \frac{1}{13} + \frac{1}{13} = \frac{2}{13} \neq \frac{1}{13}$

∴ વિધાન : 1 અસત્ય છે. **જવાબ : (D)**

●●●