

(80) સમતલો $x + y + z - 1 = 0$ અને $2x + 3y - z + 4 = 0$ ના છેદમાંથી પસાર થતા તથા X-અક્ષને સમાંતર સમતલનું સમીકરણ.....

(A) $y - 3z + 6 = 0$ (B) $3y - z + 6 = 0$ (C) $y + 3z + 6 = 0$ (D) $3y - 2z + 6 = 0$

ઉકેલ : $x + y + z - 1 = 0$ અને $2x + 3y - z + 4 = 0$ ના છેદમાંથી પસાર થતા સમતલનું સમીકરણ $x + y + z - 1 + \lambda (2x + 3y - z + 4) = 0$ છે.

$$\therefore (1 + 2\lambda)x + (1 + 3\lambda)y + (1 - \lambda)z + (-1 + 4\lambda) = 0$$

સમતલ X-અક્ષને સમાંતર છે.

$$\therefore 1 + 2\lambda = 0$$

$$\therefore \lambda = -\frac{1}{2}$$

$\therefore$ સમતલનું સમીકરણ $-y + 3z - 6 = 0$ છે.

એટલે કે $y - 3z + 6 = 0$ સમતલનું સમીકરણ છે.

જવાબ : (A)

(81) (1, 2, -3)માંથી પસાર થતા અને (-1, 3, 4) તથા (5, 2, -1)માંથી પસાર થતી રેખાને લંબ સમતલનું સમીકરણ.....

(A) $6x - y - 5z - 19 = 0$

(B) $6x + y - 5z - 23 = 0$

(C) $6x + y + 5z + 7 = 0$

(D) $6x - y + 5z + 19 = 0$

ઉકેલ : A(-1, 3, 4) અને B(5, 2, -1)માંથી પસાર થતી રેખાને લંબ-સમતલનો અભિલંબ સદિશ

$$\vec{n} = \vec{AB} = (6, -1, -5) \text{ છે.}$$

સમતલ (1, 2, -3)માંથી પસાર થાય છે.

$$\therefore \text{સમતલનું સમીકરણ } 6(x - 1) - 1(y - 2) - 5(z + 3) = 0 \text{ છે.}$$

$$\therefore 6x - y - 5z - 19 = 0 \text{ સમતલનું સમીકરણ છે.}$$

જવાબ : (A)

(82) જો (-1, 1, 1)નું ઊગમબિંદુથી જે અંતર થાય તેનાથી બમણું અંતર સમતલ $x - y - z + a = 0$ થી થાય, તો $a = \dots\dots$

(A) 3 અથવા 9

(B) 3 અથવા -9

(C) -3 અથવા 9

(D) -3 અથવા -9

ઉકેલ : (-1, 1, 1)નું ઊગમબિંદુથી અંતર = $\sqrt{3}$

$$\text{સમતલ } x - y - z + a = 0 \text{ થી } (-1, 1, 1) \text{નું લંબઅંતર} = \frac{|-1 - 1 - 1 + a|}{\sqrt{3}} = 2\sqrt{3}$$

$$\therefore a - 3 = \pm 6$$

$$\therefore a = 9 \text{ અથવા } a = -3$$

જવાબ : (C)

(83) સમતલ XOY, A(2, -3, 2) અને B(6, 7, -5)ને જોડતા રેખાખંડનું ગુણોત્તરમાં વિભાજન કરે છે.

(A) -1 : 3

(B) -5 : 2

(C) 2 : 5

(D) 3 : 7

ઉકેલ : સમતલ XOY આપેલ રેખાખંડનું A તરફથી $\lambda : 1$ ગુણોત્તરમાં વિભાજન કરે, તો વિભાજન કરતા બિંદુનો z-યામ = 0

$$\therefore \frac{-5\lambda + 2}{\lambda + 1} = 0$$

$$\therefore \lambda = \frac{2}{5}$$

$$\therefore \text{ગુણોત્તર } 2 : 5$$

જવાબ : (C)

(84) બિંદુ P(1, 4, 5)માંથી XY અને YZ સમતલો પર અનુક્રમે લંબ $\overline{PA}$ અને $\overline{PB}$ દોરેલા છે. સમતલ OAB નું સમીકરણ.....

(A) $20x + 5y + 4z = 0$

(B) $x + 4y + 5z = 0$

(C) $20x + 5y - 4z = 0$

(D) $20x - 5y + 4z = 0$

ઉકેલ : P(1, 4, 5)માંથી XY પરનો લંબપાદ A(1, 4, 0) અને YZ સમતલ પરનો લંબપાદ B(0, 4, 5) છે.

ધારો કે સમતલ OABનું સમીકરણ $ax + by + cz = 0$ છે.

તે A અને B માંથી પસાર થાય છે.

$\therefore a + 4b = 0$ અને ... (1)

$4b + 5c = 0$... (2)

સમીકરણ (1) અને (2)ને ઉકેલતાં

$a = -4b = 5c$

$\therefore \frac{a}{20} = \frac{b}{-5} = \frac{c}{4} = k$ ($k \neq 0$) (ધારો કે)

$\therefore$ સમતલનું સમીકરણ $20kx - 5ky + 4kz = 0$

$\therefore 20x - 5y + 4z = 0$

જવાબ : (D)

(85) એક ચલ-સમતલ, નિશ્ચિત બિંદુ (a, b, c) માંથી પસાર થાય છે અને અક્ષોને P, Q, R માં છેદે છે. યામ-સમતલોને સમાંતર તથા P, Q અને R માંથી પસાર થતા સમતલોના છેદબિંદુનો બિંદુગણ.....

(A) $ax + by + cz = 1$ (B) $ax + by + cz = -1$ (C) $\frac{a}{x} + \frac{b}{y} + \frac{c}{z} = 1$ (D) $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$

ઉકેલ : ધારો કે ચલ-સમતલ, અક્ષોને $P(p, o, o)$, $Q(o, q, o)$ અને $R(o, o, r)$ માં છેદે છે.

$\therefore$ સમતલનું સમીકરણ $\frac{x}{p} + \frac{y}{q} + \frac{z}{r} = 1$

તે (a, b, c) માંથી પસાર થાય છે.

$\therefore \frac{a}{p} + \frac{b}{q} + \frac{c}{r} = 1$... (1)

યામ-સમતલોને સમાંતર તથા P, Q અને R માંથી પસાર થતા સમતલોનાં સમીકરણ અનુક્રમે $x = p$, $y = q$, $z = r$ છે.

$\therefore p, q, r$ નો (1)માંથી લોપ કરતાં આ સમતલોના છેદબિંદુનો બિંદુગણ $\frac{a}{x} + \frac{b}{y} + \frac{c}{z} = 1$.

જવાબ : (C)

(86) બિંદુઓ $(0, -1, 3)$, $(1, 2, 2)$ અને $(3, 1, 1)$ માંથી પસાર થતા સમતલનું $(8, 5, 7)$ બિંદુથી લંબઅંતર

(A) $\sqrt{76}$

(B) $\sqrt{71}$

(C) $\sqrt{66}$

(D) $\sqrt{73}$

ઉકેલ : આપેલાં બિંદુઓમાંથી પસાર થતા સમતલનું સમીકરણ

$$\begin{vmatrix} x-0 & y+1 & z-3 \\ 1-0 & 2+1 & 2-3 \\ 3-0 & 1+1 & 1-3 \end{vmatrix} = 0$$

$$\therefore \begin{vmatrix} x & y+1 & z-3 \\ 1 & 3 & -1 \\ 3 & 2 & -2 \end{vmatrix} = 0$$

$$\therefore x(-4) - (y+1)(1) + (z-3)(-7) = 0$$

$$\therefore -4x - y - 1 - 7z + 21 = 0$$

$$\therefore 4x + y + 7z = 20$$

હવે, સમતલ $4x + y + 7z - 20 = 0$ નું $(8, 5, 7)$ થી લંબઅંતર

$$= \frac{|4(8)+1(5)+7(7)-20|}{\sqrt{16+1+49}}$$

$$= \frac{66}{\sqrt{66}} = \sqrt{66}$$

જવાબ : (C)

(87) $\frac{x}{3} = \frac{y}{4} = \frac{z}{2}$ અને $\frac{x}{4} = \frac{y}{2} = \frac{z}{3}$ બંને રેખાઓને સમાવતા સમતલને લંબ અને રેખા $\frac{x}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z}{4}$ ને સમાવતા સમતલનું સમીકરણ..... [IIT : 2010]

(A) $x + 2y - 2z = 0$ (B) $3x + 2y - 2z = 0$ (C) $x - 2y + z = 0$ (D) $5x + 2y - 4z = 0$

ઉકેલ : રેખાઓ $\frac{x}{3} = \frac{y}{4} = \frac{z}{2}$ અને $\frac{x}{4} = \frac{y}{2} = \frac{z}{3}$ ને સમાવતા સમતલને લંબસદિશ

$$\vec{a} = \vec{l}_1 \times \vec{l}_2 = (3, 4, 2) \times (4, 2, 3) = (8, -1, -10)$$

માંગેલ સમતલ રેખા $\frac{x}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z}{4}$ ને સમાવે છે.

$$\begin{aligned} \therefore \text{સમતલને અભિલંબ સદિશ } \vec{n} &= \vec{a} \times \vec{l} \\ &= (8, -1, -10) \times (2, 3, 4) \\ &= (26, -52, 26) \text{ એટલે કે } (1, -2, 1) \text{ છે.} \end{aligned}$$

સમતલનું એક બિંદુ ઊગમબિંદુ છે.

$$\therefore \text{સમતલનું સમીકરણ } (x-0) - 2(y-0) + (z-0) = 0$$

$$\therefore x - 2y + z = 0$$

જવાબ : (C)

(88) સમતલો $2x - y + z = 6$ અને $x + 2y + 3z = 3$ વચ્ચેના ખૂણાનું માપ.....

$$(A) \cos^{-1} \left(\frac{1}{2} \sqrt{\frac{1}{7}} \right) \quad (B) \cos^{-1} \left(\frac{1}{2} \sqrt{\frac{2}{7}} \right) \quad (C) \cos^{-1} \left(\frac{1}{2} \sqrt{\frac{3}{7}} \right) \quad (D) \cos^{-1} \left(\frac{1}{\sqrt{7}} \right)$$

ઉકેલ : સમતલો માટે $\vec{n}_1 = (2, -1, 1)$ અને $\vec{n}_2 = (1, 2, 3)$

$$\text{હવે, } \cos \theta = \frac{|\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2|}{|\vec{n}_1| |\vec{n}_2|}$$

$$= \frac{|2-2+3|}{\sqrt{4+1+1} \sqrt{1+4+9}} = \frac{3}{2\sqrt{21}} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{3}{7}}$$

$$\therefore \theta = \cos^{-1} \left(\frac{1}{2} \sqrt{\frac{3}{7}} \right)$$

જવાબ : (C)

(89) રેખા $\frac{x}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z}{4}$ અને સમતલ $3x + 2y - 3z = 4$ વચ્ચેના ખૂણાનું માપ.....

- (A) $\frac{\pi}{4}$ (B) 0 (C) $\cos^{-1} \left(\frac{24}{\sqrt{29}\sqrt{22}} \right)$ (D) $\frac{\pi}{2}$

ઉકેલ : $\vec{l} = (2, 3, 4), \vec{n} = (3, 2, -3)$

રેખા અને સમતલ વચ્ચેના ખૂણાનું માપ θ હોય, તો

$$\sin\theta = \frac{|\vec{l} \cdot \vec{n}|}{|\vec{l}| |\vec{n}|} = \frac{|2(3)+3(2)+4(-3)|}{\sqrt{29} \cdot \sqrt{22}} = 0$$

$\therefore \theta = 0$ (રેખા સમાંતર છે.) (રેખા સમતલમાં કેમ નથી ?)

જવાબ : (B)

(90) જો રેખા $x = \frac{y-1}{2} = \frac{z-3}{\lambda}$ અને સમતલ $x + 2y + 3z = 4$ વચ્ચેના ખૂણાનું માપ $\cos^{-1} \sqrt{\frac{5}{14}}$ હોય, તો $\lambda = \dots\dots$ [AIEEE : 2011]

- (A) $\frac{2}{3}$ (B) $\frac{3}{2}$ (C) $\frac{2}{5}$ (D) $\frac{5}{3}$

ઉકેલ : $\vec{l} = (1, 2, \lambda), \vec{n} = (1, 2, 3)$

રેખા અને સમતલ α વચ્ચેના ખૂણાનું માપ θ હોય, તો

$$\sin\theta = \frac{|\vec{l} \cdot \vec{n}|}{|\vec{l}| |\vec{n}|} = \frac{|1+4+3\lambda|}{\sqrt{5+\lambda^2} \cdot \sqrt{14}}$$

$$\therefore \cos\theta = \sqrt{1 - \frac{(5+3\lambda)^2}{(5+\lambda^2)14}}$$

$$\therefore \theta = \cos^{-1} \sqrt{\frac{14(5+\lambda^2)-(5+3\lambda)^2}{14(5+\lambda^2)}}$$

$$\therefore \cos^{-1} \sqrt{\frac{5}{14}} = \cos^{-1} \sqrt{\frac{70+14\lambda^2-25-30\lambda-9\lambda^2}{14(5+\lambda^2)}}$$

$$\therefore 5(5+\lambda^2) = 5\lambda^2 - 30\lambda + 45$$

$$\therefore 25 = -30\lambda + 45$$

$$\therefore 30\lambda = 20$$

$$\lambda = \frac{2}{3}$$

જવાબ : (A)

(91) રેખા $x = y = z$ ને સમાંતર બિંદુ $(1, -5, 9)$ નું સમતલ $x - y + z = 5$ થી અંતર

[AIEEE : 2011]

- (A) $10\sqrt{3}$ (B) $5\sqrt{3}$ (C) $3\sqrt{10}$ (D) $3\sqrt{5}$

ઉકેલ : રેખા $x = y = z$ ને સમાંતર $A(1, -5, 9)$ માંથી પસાર થતી રેખાનું સમીકરણ

$$\vec{r} = (1, -5, 9) + k(1, 1, 1), k \in \mathbb{R}$$

આ રેખા પરનું કોઈક બિંદુ $B(1 + k, -5 + k, 9 + k)$ એ સમતલ $x - y + z = 5$ પર આવેલું છે.

$$\therefore 1 + k + 5 - k + 9 + k = 5$$

$$\therefore k = -10$$

$$\therefore \text{સમતલ પરના બિંદુ } B(-9, -15, -1) \text{ નું } A(1, -5, 9) \text{ થી અંતર} = \sqrt{100 + 100 + 100}$$

$$= 10\sqrt{3}$$

જવાબ : (A)

(92) ઊગમબિંદુથી એક એકમ દૂર આવેલા $x - 2y + 2z - 5 = 0$ ને સમાંતર સમતલનું સમીકરણ.....

[AIEEE : 2012]

$$(A) x - 2y + 2z - 3 = 0$$

$$(B) x - 2y + 2z + 1 = 0$$

$$(C) x - 2y + 2z - 1 = 0$$

$$(D) x - 2y + 2z + 5 = 0$$

ઉકેલ : સમતલ $x - 2y + 2z - 5 = 0$ ને સમાંતર સમતલનું સમીકરણ $x - 2y + 2z + k = 0$ છે.

તેનું ઊગમબિંદુથી અંતર = 1.

$$\therefore \frac{|k|}{\sqrt{1+4+4}} = 1$$

$$\therefore k = \pm 3$$

વિકલ્પ $k = -3$ આપેલ વિકલ્પો પૈકી લઈ શકાય તેમ છે.

$$\therefore \text{સમતલનું સમીકરણ } x - 2y + 2z - 3 = 0$$

જવાબ : (A)

(93) $(2, -3, 1)$ અને $(3, -4, -5)$ પસાર થતી રેખા અને સમતલ $2x + y + z = 7$ નું છેદબિંદુ.....

$$(A) (1, 2, 7)$$

$$(B) (1, -2, 7)$$

$$(C) (-1, 2, 7)$$

$$(D) (1, -2, -7)$$

ઉકેલ : $(2, -3, 1)$ અને $(3, -4, -5)$ માંથી પસાર થતી રેખાનું સમીકરણ $\vec{r} = (2, -3, 1) + k(1, -1, -6)$ $k \in \mathbb{R}$ છે. કોઈક $k \in \mathbb{R}$ માટે રેખા પરનું કોઈ પણ બિંદુ $(2 + k, -3 - k, 1 - 6k)$ એ સમતલ $2x + y + z = 7$ પર આવેલું હોય, તો $2(2 + k) + (-3 - k) + (1 - 6k) = 7$.

$$\therefore 4 + 2k - 3 - k + 1 - 6k = 7$$

$$\therefore 5k = -5$$

$$\therefore k = -1$$

$$\therefore \text{છેદબિંદુ } (2 - 1, -3 + 1, 1 + 6) = (1, -2, 7) \text{ છે.}$$

જવાબ : (B)

(94) $(3, -2, 1)$ માંથી પસાર થતા ને રેખાઓ $\frac{x}{4} = \frac{y-1}{-3} = \frac{z+2}{-2}$ અને $\frac{x-2}{-2} = \frac{y}{-2} = \frac{z-1}{3}$ ને સમાંતર સમતલનું સમીકરણ

$$(A) 13x - 8y + 14z - 37 = 0$$

$$(B) 13x + 8y + 14z + 37 = 0$$

$$(C) 13x - 8y - 14z - 41 = 0$$

$$(D) 13x + 8y + 14z - 37 = 0$$

ઉકેલ : $(3, -2, 1)$ માંથી પસાર થતા સમતલનું સમીકરણ

$$a(x - 3) + b(y + 2) + c(z - 1) = 0$$

સમતલ, રેખાઓ $\frac{x}{4} = \frac{y-1}{-3} = \frac{z+2}{-2}$ અને $\frac{x-2}{-2} = \frac{y}{-2} = \frac{z-1}{3}$ ને સમાંતર છે, તેથી સમતલનો અભિલંબ

$$\vec{n} = \vec{l}_1 \times \vec{l}_2 = (4, -3, -2) \times (-2, -2, 3) = (-13, -8, -14)$$

$$\therefore \text{સમતલનું સમીકરણ } 13(x-3) + 8(y+2) + 14(z-1) = 0$$

$$\therefore 13x + 8y + 14z = 37$$

જવાબ : (D)

- (95) $(3, 1, -1)$ થી $\frac{2}{\sqrt{3}}$ અંતરે આવેલા અને સમતલો $x + 2y + 3z = 2$ તથા $x - y + z = 3$ ની છેદરેખામાંથી પસાર થતા સમતલનું સમીકરણ..... [IIT : 2012]

(A) $5x - 11y + z = 17$

(B) $\sqrt{2}x + y = 3\sqrt{2} - 1$

(C) $x + y + z = \sqrt{3}$

(D) $x - \sqrt{2}y = 1 - \sqrt{2}$

- ઉકેલ : સમતલો $x + 2y + 3z - 2 = 0$ અને $x - y + z - 3 = 0$ ની છેદરેખામાંથી પસાર થતા સમતલનું સમીકરણ $x + 2y + 3z - 2 + \lambda(x - y + z - 3) = 0$,

$$\therefore (1 + \lambda)x + (2 - \lambda)y + (3 + \lambda)z + (-2 - 3\lambda) = 0$$

સમતલનું બિંદુ $(3, 1, -1)$ થી અંતર $\frac{2}{\sqrt{3}}$ છે.

$$\therefore \frac{|3 + 3\lambda + 2 - \lambda - 3 - \lambda - 2 - 3\lambda|}{\sqrt{(1+\lambda)^2 + (2-\lambda)^2 + (3+\lambda)^2}} = \frac{2}{\sqrt{3}}$$

$$\therefore 3(4\lambda^2) = 4(3\lambda^2 + 4\lambda + 14)$$

$$\therefore 4\lambda + 14 = 0$$

$$\therefore \lambda = -\frac{7}{2}$$

$$\therefore \text{સમતલનું સમીકરણ } \left(1 - \frac{7}{2}\right)x + \left(2 + \frac{7}{2}\right)y + \left(3 - \frac{7}{2}\right)z - \left(2 + 3\left(-\frac{7}{2}\right)\right) = 0$$

$$\therefore 5x - 11y + z = 17$$

જવાબ : (A)

- (96) બિંદુ P એ સમતલ $5x - 4y - z = 1$ અને $Q(2, 3, 5)$ તથા $R(1, -1, 4)$ ને જોડતી રેખાનું છેદબિંદુ છે.

જો $T(2, 1, 4)$ માંથી $\overleftrightarrow{QR}$ પરનો લંબપાદ S હોય, તો $\overline{PS}$ ની લંબાઈ

[IIT : 2012]

(A) $\frac{1}{\sqrt{2}}$

(B) $\sqrt{2}$

(C) 2

(D) $2\sqrt{2}$

- ઉકેલ : $\overleftrightarrow{QR}$ નું સમીકરણ $\vec{r} = (2, 3, 5) + k(1, 4, 1), k \in \mathbb{R}$

રેખા પરનું બિંદુ $(2 + k, 3 + 4k, 5 + k)$ એ રેખા અને સમતલ $5x - 4y - z = 1$ નું છેદબિંદુ P હોય, તો

$$5(2 + k) - 4(3 + 4k) - (5 + k) = 1$$

$$\therefore 10 + 5k - 12 - 16k - 5 - k = 1$$

$$\therefore 12k = -8. \text{ આથી, } k = -\frac{2}{3}$$

$$\therefore \text{છેદબિંદુ P} \left(2 - \frac{2}{3}, 3 - \frac{8}{3}, 5 - \frac{2}{3}\right) = P\left(\frac{4}{3}, \frac{1}{3}, \frac{13}{3}\right)$$

ધારો કે બિંદુ T માંથી $\overleftrightarrow{QR}$ પરનો લંબપાદ કોઈક k માટે

$S(2 + k, 3 + 4k, 5 + k)$ છે.

હવે, $T = (2, 1, 4)$

$$\overrightarrow{TS} \perp \overrightarrow{l}$$

$$\therefore \overrightarrow{TS} \cdot \overrightarrow{l} = 0$$

$$\therefore (k, 2 + 4k, 1 + k) \cdot (1, 4, 1) = 0$$

$$\therefore k + 8 + 16k + 1 + k = 0$$

$$\therefore 18k = -9. \text{ આથી, } k = -\frac{1}{2}$$

$$\therefore S \left(2 - \frac{1}{2}, 3 - \frac{4}{2}, 5 - \frac{1}{2} \right) = \left(\frac{3}{2}, \frac{2}{2}, \frac{9}{2} \right)$$

$$\begin{aligned} \text{અંતર PS} &= \sqrt{\left(\frac{4}{3} - \frac{3}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{3} - \frac{2}{2}\right)^2 + \left(\frac{13}{3} - \frac{9}{2}\right)^2} \\ &= \frac{1}{6} \sqrt{1 + 16 + 1} = \frac{1}{\sqrt{2}} \end{aligned}$$

જવાબ : (A)

(97) સમતલ $x + 2y - 5z + 9 = 0$ ને લંબ $(1, 2, 3)$ માંથી પસાર થતી રેખાનું સમીકરણ

$$(A) \frac{x+1}{1} = \frac{y+2}{2} = \frac{z-5}{3}$$

$$(B) \frac{x+1}{1} = \frac{y+2}{2} = \frac{z+3}{-5}$$

$$(C) \frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{2} = \frac{z+5}{3}$$

$$(D) \frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{2} = \frac{z-3}{-5}$$

ઉકેલ : સમતલનો અભિલંબ સદિશ $\vec{n} = (1, 2, -5)$ એ રેખાની દિશા હશે.

$$\therefore \text{રેખાનું સમીકરણ } \frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{2} = \frac{z-3}{-5} \quad ((B) \text{ ચકાસી જુઓ})$$

જવાબ : (D)

(98) $\frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{-1} = \frac{z-3}{4}$ માંથી પસાર થતા અને $x + 2y + z = 12$ ને લંબ-સમતલનું સમીકરણ.....

$$(A) 2x - 9y + 5z + 4 = 0$$

$$(B) 3x - 6y + 5z + 4 = 0$$

$$(C) 5x - 2y + 9z + 4 = 0$$

$$(D) 9x - 2y - 5z + 4 = 0$$

ઉકેલ : સમતલ રેખા $\frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{-1} = \frac{z-3}{4}$ માંથી પસાર થાય છે.

તેથી સમતલ બિંદુ $(1, -1, 3)$ માંથી પસાર થાય છે અને તેના અભિલંબ સદિશ $\vec{l} = 2\hat{i} - \hat{j} + 4\hat{k}$ ને લંબ છે.

માંગેલ સમતલનો અભિલંબ સદિશ $x + 2y + z = 12$ ના અભિલંબ સદિશ $\vec{n}_1 = (1, 2, 1)$ ને પણ લંબ છે.

$$\therefore \text{માંગેલ સમતલનો અભિલંબ સદિશ } \vec{n} = \vec{n}_1 \times \vec{l} = (1, 2, 1) \times (2, -1, 4) = (9, -2, -5)$$

$$\therefore \text{સમતલનું સમીકરણ } 9(x - 1) - 2(y + 1) - 5(z - 3) = 0$$

$$\therefore 9x - 2y - 5z + 4 = 0$$

જવાબ : (D)

(99) સમતલો $3x + 3y - 4z + 7 = 0$ અને $2x - 5y + z + 2 = 0$ ની છેદરેખામાંથી પસાર થતા તથા રેખા $x = 0, z = 0$ ને સમાંતર સમતલનું સમીકરણ

(A) $21x - 8y + 23 = 0$

(B) $23y + 20z + 23 = 0$

(C) $21x - 17z + 41 = 0$

(D) $20x - 21z + 41 = 0$

ઉકેલ : $3x + 3y - 4z + 7 = 0$ અને $2x - 5y + z + 2 = 0$ ની છેદરેખામાંથી પસાર થતા સમતલનું સમીકરણ $3x + 3y - 4z + 7 + \lambda (2x - 5y + z + 2) = 0$ છે.

$\therefore (3 + 2\lambda)x + (3 - 5\lambda)y + (-4 + \lambda)z + (7 + 2\lambda) = 0$ માંગેલ સમતલનું સમીકરણ છે.

સમતલ રેખા $x = 0, z = 0$ ને સમાંતર છે એટલે કે $(0, 1, 0)$ સમતલના અભિલંબને લંબ છે.

$\therefore 3 - 5\lambda = 0$

$\therefore \lambda = \frac{3}{5}$

$\therefore$ સમતલનું સમીકરણ $21x - 17z + 41 = 0$

જવાબ : (C)

(100) $x + y + z - 6 = 0$ અને $2x + 3y + 4z + 5 = 0$ ની છેદરેખામાંથી પસાર થતા અને $4x + 5y - 3z = 8$ ને લંબ-સમતલનું સમીકરણ

(A) $x + 7y + 13z - 96 = 0$

(B) $x + 7y + 13z + 96 = 0$

(C) $x + 7y - 13z - 96 = 0$

(D) $x - 7y + 13z + 96 = 0$

ઉકેલ : આપેલાં સમતલોની છેદરેખામાંથી પસાર થતા સમતલનું સમીકરણ

$x + y + z - 6 + \lambda (2x + 3y + 4z + 5) = 0$

$\therefore (1 + 2\lambda)x + (1 + 3\lambda)y + (1 + 4\lambda)z + (-6 + 5\lambda) = 0$

તે સમતલ $4x + 5y - 3z = 8$ ને લંબ છે.

$\therefore 4(1 + 2\lambda) + 5(1 + 3\lambda) - 3(1 + 4\lambda) = 0$

$\therefore 11\lambda = -6$

$\therefore \lambda = -\frac{6}{11}$

$\therefore$ સમતલનું સમીકરણ $x + 7y + 13z + 96 = 0$

જવાબ : (B)

(101) $\frac{x}{3} = \frac{y-1}{2} = \frac{z+1}{-1}$ અને $\frac{x+1}{3} = \frac{y}{2} = \frac{z-2}{-1}$ માંથી પસાર થતા સમતલનું સમીકરણ

(A) $5x - 8y + z + 9 = 0$

(B) $5x - 8y + z + 3 = 0$

(C) $5x - 8y - z + 7 = 0$

(D) $5x + 8y - z - 9 = 0$

ઉકેલ : આપેલ રેખાઓ એકબીજાને સમાંતર છે. સમતલ બિંદુઓ $(0, 1, -1)$ અને $(-1, 0, 2)$ માંથી પસાર થાય છે અને $\vec{l} = (3, 2, -1)$

$\therefore$ સમતલનું સમીકરણ $\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ l_1 & l_2 & l_3 \end{vmatrix} = 0$

$\therefore \begin{vmatrix} x & y - 1 & z + 1 \\ -1 & -1 & 3 \\ 3 & 2 & -1 \end{vmatrix} = 0$

$\therefore -5x + 8(y - 1) + 1(z + 1) = 0$

$\therefore 5x - 8y - z + 7 = 0$ (રેખાઓ સંપાતી છે ?)

જવાબ : (C)

JEE અને Advanced JEE માં પુછાયેલા પ્રશ્નો :

(102) બે રેખાઓ $L_1 : x = 5, \frac{y}{3-\alpha} = \frac{z}{-2}$ અને $L_2 : x = \alpha, \frac{y}{-1} = \frac{z}{2-\alpha}$ સમતલીય હોય, તો α ની કિંમત (કિંમતો)

[JEE : 2013]

- (A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4

ઉકેલ : રેખાઓ માટે $\vec{a} = (5, 0, 0)$ $\vec{l} = (0, 3 - \alpha, -2)$ અને

$\vec{b} = (\alpha, 0, 0)$ $\vec{m} = (0, -1, 2 - \alpha)$. રેખાઓ સમતલીય છે.

$$\therefore (\vec{b} - \vec{a}) \cdot (\vec{l} \times \vec{m}) = 0$$

$$\text{અર્થાત્ } \begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ l_1 & l_2 & l_3 \\ m_1 & m_2 & m_3 \end{vmatrix} = 0$$

$$\therefore \begin{vmatrix} \alpha - 5 & 0 & 0 \\ 0 & 3 - \alpha & -2 \\ 0 & -1 & 2 - \alpha \end{vmatrix} = 0$$

$$\therefore (\alpha - 5) [(3 - \alpha)(2 - \alpha) - 2] = 0$$

$$\therefore (\alpha - 5)(\alpha^2 - 5\alpha + 4) = 0$$

$$\therefore \alpha = 5, \alpha = 4, \alpha = 1$$

જવાબ : (A), (D)

(103) બે રેખાઓ $L_1 : \frac{x-1}{2} = \frac{y}{-1} = \frac{z+3}{1}$, $L_2 : \frac{x-4}{1} = \frac{y+3}{1} = \frac{z+3}{2}$ છે

તથા બે સમતલો $\pi_1 : 7x + y + 2z = 3$ અને $\pi_2 : 3x + 5y - 6z = 4$ છે.

રેખા L_1 અને L_2 ના છેદબિંદુમાંથી સમતલ $ax + by + cz = d$ પસાર થાય છે તથા તે π_1 અને π_2 ને લંબ છે.

યાદી : 1 ને યાદી : 2 સાથે યોગ્ય રીતે જોડો અને આપેલ સંજ્ઞામાંથી સાચો જવાબ શોધો :

	યાદી : 1	યાદી : 2
P	$a =$	1. 13
Q	$b =$	2. -3
R	$c =$	3. 1
S	$d =$	4. -2
સંજ્ઞા :	P Q R S	
(A)	3 2 4 1	
(B)	1 3 4 2	
(C)	3 2 1 4	
(D)	2 4 1 3	

ઉકેલ : રેખા L_1 પરનું કોઈ પણ બિંદુ $M(2k_1 + 1, -k_1, k_1 - 3)$ અને

રેખા L_2 પરનું કોઈ પણ બિંદુ $N(k_2 + 4, k_2 - 3, 2k_2 - 3)$ છે.

L_1 અને L_2 ના છેદબિંદુ માટે કોઈક k_1 તથા k_2 માટે,

$$2k_1 + 1 = k_2 + 4, -k_1 = k_2 - 3; k_1 - 3 = 2k_2 - 3$$

$$\therefore 2k_1 - k_2 = 3 \text{ અને } k_1 + k_2 = 3$$

$$\therefore k_1 = 2; k_2 = 1$$

વળી, $k_1 = 2$ તથા $k_2 = 1$ લેતા $k_1 - 3 = 2k_2 - 3$ છે.

$$\therefore \text{છેદબિંદુ } M = N = (5, -2, -1)$$

સમતલ $ax + by + cz = d$, π_1 અને π_2 ને લંબ છે.

$$(a, b, c) = (7, 1, 2) \times (3, 5, -6) = (-16, 48, 32)$$

$$\therefore (a, b, c) = (1, -3, -2) \text{ લઈ શકાય.}$$

$$(x - 5) - 3(y + 2) - 2(z + 1) = 0$$

$$\therefore x - 3y - 2z = 13$$

$$\therefore P : a = 1, Q : b = -3, R : c = -2, S : d = 13$$

$$\therefore P \rightarrow 3, Q \rightarrow 2, R \rightarrow 4, S \rightarrow 1$$

$$\therefore P \quad Q \quad R \quad S \text{ એ } 3 \quad 2 \quad 4 \quad 1$$

જવાબ : (A)

$$(104) \text{ બે રેખાઓ } \frac{x-2}{1} = \frac{y-3}{1} = \frac{z-4}{-k} \text{ અને } \frac{x-1}{k} = \frac{y-4}{2} = \frac{z-5}{1} \text{ સમતલીય હોય, તો } k \text{ ની } \dots\dots$$

[JEE : 2013]

(A) ફક્ત એક કિંમત મળે. (B) ફક્ત બે કિંમત મળે. (C) ફક્ત ત્રણ કિંમત મળે. (D) કોઈ પણ કિંમત ન મળે.

ઉકેલ : રેખાઓ માટે $\vec{a} = (2, 3, 4)$, $\vec{l} = (1, 1, -k)$ અને $\vec{b} = (1, 4, 5)$, $\vec{m} = (k, 2, 1)$. રેખાઓ સમતલીય છે.

$$\therefore \begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ l_1 & l_2 & l_3 \\ m_1 & m_2 & m_3 \end{vmatrix} = 0$$

$$\therefore \begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -k \\ k & 2 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$$\therefore -1(1 + 2k) - 1(1 + k^2) + 1(2 - k) = 0$$

$$\therefore -1 - 2k - 1 - k^2 + 2 - k = 0$$

$$\therefore k^2 + 3k = 0$$

$$\therefore k(k + 3) = 0$$

$$\therefore k = 0 \text{ અથવા } -3$$

$$\therefore k \text{ ની બે કિંમત મળે.}$$

જવાબ : (B)

$$(105) \text{ જો રેખાઓ } \frac{x+1}{2} = \frac{y-1}{1} = \frac{z+1}{3} \text{ અને } \frac{x+2}{2} = \frac{y-k}{3} = \frac{z}{4} \text{ સમતલીય હોય, તો } k = \dots\dots$$

[JEE : 2013]

$$(A) \frac{11}{2}$$

$$(B) -\frac{11}{2}$$

$$(C) \frac{9}{2}$$

$$(D) -\frac{9}{2}$$

ઉકેલ : રેખાઓ માટે, $\vec{a} = (-1, 1, -1)$, $\vec{l} = (2, 1, 3)$ અને $\vec{b} = (-2, k, 0)$, $\vec{m} = (2, 3, 4)$.

રેખાઓ સમતલીય છે.

$$\therefore (\vec{a} - \vec{b}) \cdot (\vec{l} \times \vec{m}) = 0$$

$$\therefore (1, 1 - k, -1) \cdot (-5, -2, 4) = 0$$

$$\therefore -5 - 2 + 2k - 4 = 0$$

$$\therefore k = \frac{11}{2}$$

જવાબ : (A)

- (106) ઊગમબિંદુથી સમતલ $4x - 3y + z + 13 = 0$ પરના લંબપાદ Q નું સમતલના બિંદુ $R(-1, 1, -6)$ થી અંતર..... [JEE 2013]

(A) $\sqrt{14}$

(B) $\sqrt{\frac{19}{2}}$

(C) $3\sqrt{\frac{7}{2}}$

(D) $\frac{3}{\sqrt{2}}$

ઉકેલ : ઊગમબિંદુ $O(0, 0, 0)$ થી સમતલનું લંબઅંતર

$$OQ = \frac{|13|}{\sqrt{16 + 9 + 1}} = \frac{13}{\sqrt{26}} = \sqrt{\frac{13}{2}}$$

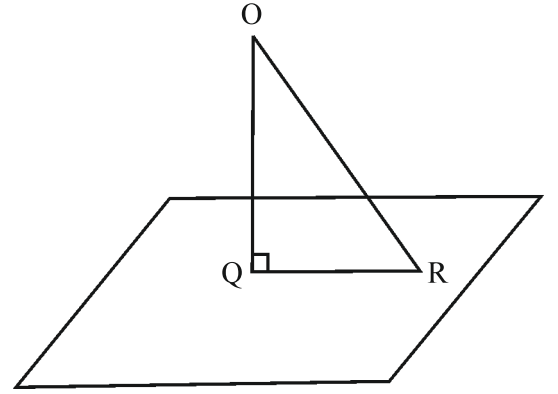
$$OR = \sqrt{1 + 1 + 36} = \sqrt{38}$$

$$\therefore QR = \sqrt{OR^2 - OQ^2}$$

$$= \sqrt{38 - \frac{13}{2}}$$

$$= \sqrt{\frac{63}{2}}$$

$$= 3\sqrt{\frac{7}{2}}$$



આકૃતિ 21.7

જવાબ : (C)

- (107) જો બે રેખાઓની દિક્કોસાઈન l, m અને n એ સમીકરણ $l + m + n = 0$ અને $l^2 + m^2 - n^2 = 0$ નું સમાધાન કરે, તો તેમની વચ્ચેના લઘુકોણનું માપ.... [JEE : 2013]

(A) $\frac{\pi}{12}$

(B) $\frac{\pi}{6}$

(C) $\frac{\pi}{3}$

(D) $\frac{\pi}{4}$

ઉકેલ : દાખલો (34) નો ઉકેલ

- (108) અવકાશની બે રેખાઓ $L_1 : \{x = \sqrt{\lambda} y + \sqrt{\lambda} - 1, z = (\sqrt{\lambda} - 1)y + \sqrt{\lambda}\}$ અને

$L_2 : \{x = \sqrt{\mu} y + (1 - \sqrt{\mu}), z = (1 - \sqrt{\mu})y + \sqrt{\mu}\}$ વડે વ્યાખ્યાયિત છે. L_1 અને L_2 પરસ્પર લંબ હોય, તો.... [JEE : 2013]

(A) $\sqrt{\lambda} + \sqrt{\mu} = 1$

(B) $\lambda \neq \mu$

(C) $\lambda + \mu = 0$

(D) $\lambda = \mu$

ઉકેલ : રેખા $L_1 : \frac{x - (\sqrt{\lambda} - 1)}{\sqrt{\lambda}} = \frac{y}{1} = \frac{z - \sqrt{\lambda}}{\sqrt{\lambda} - 1}$

અને $L_2 : \frac{x - (1 - \sqrt{\mu})}{\sqrt{\mu}} = \frac{y}{1} = \frac{z - \sqrt{\mu}}{1 - \sqrt{\mu}}$

$$\therefore \vec{l} = (\sqrt{\lambda}, 1, \sqrt{\lambda} - 1) \text{ અને } \vec{m} = (\sqrt{\mu}, 1, 1 - \sqrt{\mu})$$

$$\begin{aligned}
L_1 \perp L_2 &\Rightarrow \vec{l} \perp \vec{m} \\
&\Rightarrow \vec{l} \cdot \vec{m} = 0 \\
&\Rightarrow \sqrt{\lambda\mu} + 1 + \sqrt{\lambda} - \sqrt{\lambda\mu} - 1 + \sqrt{\mu} = 0 \\
&\Rightarrow \sqrt{\lambda} + \sqrt{\mu} = 0 \text{ તથા } \lambda \text{ અને } \mu \text{ અનુશ્લ} \\
&\Rightarrow \lambda = \mu = 0
\end{aligned}$$

જવાબ : (C), (D)

(109) $x + 2y = 3$ અને $y - 2z + 1 = 0$ ની છેદરેખામાંથી પસાર થતા તથા પ્રથમ સમતલને લંબ-સમતલનું સમીકરણ....
[JEE : 2013]

(A) $2x - y - 10z = 9$ (B) $2x - y + 7z = 11$ (C) $2x - y + 10z = 11$ (D) $2x - y - 9z = 10$

ઉકેલ : આપેલાં સમતલોની છેદરેખામાંથી પસાર થતા સમતલનું સમીકરણ $x + 2y - 3 + \lambda (y - 2z + 1) = 0$

$\therefore x + (2 + \lambda)y - 2\lambda z - (3 - \lambda) = 0$ નો અભિલંબ સદિશ $\vec{n}_1 = (1, 2 + \lambda, -2\lambda)$ અને તેને લંબ-સમતલ

$x + 2y = 3$ નો અભિલંબ સદિશ $\vec{n}_2 = (1, 2, 0)$ છે.

$$\therefore \vec{n}_1 \perp \vec{n}_2 \Rightarrow \vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2 = 0 \Rightarrow 1 + 4 + 2\lambda = 0 \Rightarrow \lambda = -\frac{5}{2}$$

$\therefore$ સમતલનું સમીકરણ $2x - y + 10z = 11$

જવાબ : (C)

(110) જેની દિક્કોસાઈનો સમીકરણ $l + m + n = 0$ અને $l^2 = m^2 + n^2$ નું સમાધાન કરે તેવી રેખાઓ વચ્ચેના ખૂણાનું માપ છે.
[JEE : 2014]

(A) $\frac{\pi}{3}$ (B) $\frac{\pi}{4}$ (C) $\frac{\pi}{6}$ (D) $\frac{\pi}{2}$

ઉકેલ : દાખલા (34)ના ઉકેલ પ્રમાણે ગણવો.

જવાબ : (A)

(111) રેખા $\frac{x-1}{3} = \frac{y-3}{1} = \frac{z-4}{-5}$ નું સમતલ $2x - y + z + 3 = 0$ માં પ્રતિબિંબ રેખા છે. [JEE : 2014]

$$(A) \frac{x+3}{3} = \frac{y-5}{1} = \frac{z-2}{-5} \quad (B) \frac{x+3}{-3} = \frac{y-5}{-1} = \frac{z+2}{5}$$

$$(C) \frac{x-3}{3} = \frac{y+5}{1} = \frac{z-2}{-5} \quad (D) \frac{x-3}{-3} = \frac{y+5}{-1} = \frac{z-2}{5}$$

ઉકેલ : સમતલ $2x - y + z + 3 = 0$ નો અભિલંબ

$$\vec{n} = (2, -1, 1) \text{ છે.}$$

$\therefore$ A માંથી પસાર થતી સમતલ

$2x - y + z + 3 = 0$ ને લંબરેખા $\overleftrightarrow{AM}$ નું

$$\text{સમીકરણ } \frac{x-1}{2} = \frac{y-3}{-1} = \frac{z-4}{1} \text{ થાય.}$$

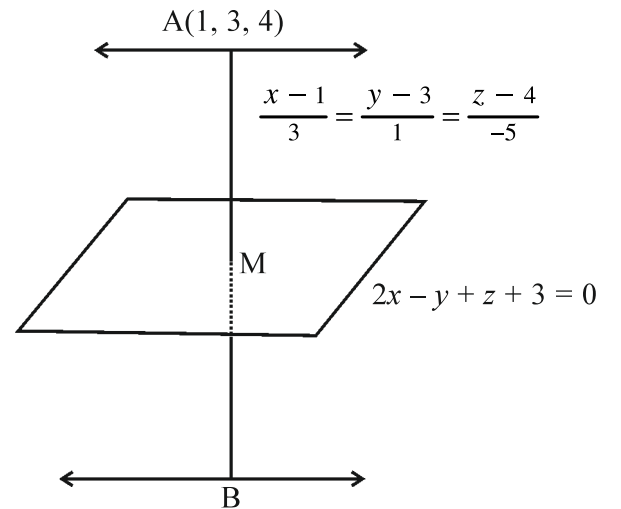
ધારો કે સમતલમાં A નું પ્રતિબિંબ B છે, $B \in \overleftrightarrow{AM}$

$\therefore$ કોઈક $k \in \mathbb{R}$ માટે

$B(1 + 2k, 3 - k, 4 + k)$ છે.

$$\overline{AB} \text{ નું મધ્યબિંદુ } M\left(\frac{2+2k}{2}, \frac{6-k}{2}, \frac{8+k}{2}\right)$$

સમતલનું બિંદુ છે.



આકૃતિ 21.8

$$\therefore 2 \left(\frac{2+2k}{2} \right) - \left(\frac{6-k}{2} \right) + \left(\frac{8+k}{2} \right) + 3 = 0$$

$$\therefore 4 + 4k - 6 + k + 8 + k + 6 = 0$$

$$\therefore 6k = -12$$

$$\therefore k = -2$$

$$\therefore B (-3, 5, 2) \text{ થશે.}$$

$$\therefore \text{આપેલ રેખાની પ્રતિબિંબ રેખા } \frac{x+3}{3} = \frac{y-5}{1} = \frac{z-2}{-5} \text{ થશે.}$$

જવાબ : (A)

(112) રેખાઓ $\frac{x-1}{3} = \frac{y-2}{1} = \frac{z-3}{2}$ અને $\frac{x-3}{1} = \frac{y-1}{2} = \frac{z-2}{3}$ ના છેદબિંદુમાંથી પસાર થતા અને ઊગમબિંદુથી ન્યૂનતમ અંતરે આવેલા સમતલનું સમીકરણ.... [JEE : 2014]

$$(A) 7x + 2y + 4z = 54$$

$$(B) 3x + 4y + 5z = 49$$

$$(C) 4x + 3y + 5z = 50$$

$$(D) 5x + 4y + 3z = 57$$

ઉકેલ : ધારો કે રેખા $\frac{x-1}{3} = \frac{y-2}{1} = \frac{z-3}{2}$ પરનું બિંદુ $P(1+3k, 2+k, 3+2k)$ એ આપેલ રેખાઓનું છેદબિંદુ છે.

$$\therefore P \text{ એ રેખા } \frac{x-3}{1} = \frac{y-1}{2} = \frac{z-2}{3} \text{ પર આવેલું છે.}$$

$$\therefore \frac{1+3k-3}{1} = \frac{2+k-1}{2} = \frac{3+2k-2}{3}$$

$$\therefore 6k - 4 = k + 1$$

$$\therefore 5k = 5$$

$$\therefore k = 1$$

$$(k = 1 \text{ માટે } \frac{2+k-1}{2} = \frac{3+2k-2}{3} \text{ પણ છે જ.})$$

$\therefore$ રેખાઓના છેદબિંદુ $P(4, 3, 5)$ નું અંતર OP એ સમતલનું ઊગમબિંદુથી ન્યૂનતમ અંતર થશે. સમતલનો અભિલંબ

$$\text{સદિશ } \vec{OP} = \vec{n} = (4, 3, 5)$$

$\therefore$ ઊગમબિંદુથી ન્યૂનતમ અંતરે આવેલા સમતલનું સમીકરણ

$$a(x - x_1) + b(y - y_1) + c(z - z_1) = 0$$

$$\therefore 4(x - 4) + 3(y - 3) + 5(z - 5) = 0$$

$$\therefore 4x + 3y + 5z = 50$$

જવાબ : (C)

(113) ત્રિપરિમાણીય અવકાશની એક રેખા X-અક્ષ અને Y-અક્ષ સાથે θ માપનો ખૂણો $\left(0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}\right)$ બનાવે, તો θ ની તમામ કિંમતોનો ગણ છે.

$$(A) \left[\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2} \right]$$

$$(B) \left[\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3} \right]$$

$$(C) \left(0, \frac{\pi}{4} \right]$$

$$(D) \left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2} \right]$$

ઉકેલ : ધારો કે રેખા Z-અક્ષ સાથે α માપનો ખૂણો બનાવે છે.

$$\therefore \cos^2 \theta + \cos^2 \theta + \cos^2 \alpha = 1$$

$$\therefore \cos^2 \alpha = 1 - 2\cos^2 \theta$$

$$\therefore \cos^2 \alpha = -\cos 2\theta$$

$$\begin{aligned}
0 \leq \cos^2 \alpha \leq 1 &\Rightarrow 0 \leq -\cos 2\theta \leq 1 \\
&\Rightarrow -1 \leq \cos 2\theta \leq 0 \\
&\Rightarrow \frac{\pi}{2} \leq 2\theta \leq \pi \\
&\Rightarrow \frac{\pi}{4} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}
\end{aligned}$$

$$\therefore \theta \in \left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2} \right]$$

જવાબ : (D)

(114) રેખા $\frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{2} = \frac{z-3}{3}$ ને સમાવતું તથા $\frac{x}{1} = \frac{y}{1} = \frac{z}{4}$ રેખાને સમાંતર સમતલ બિંદુમાંથી પસાર થાય છે. [JEE : 2014]

- (A) (1, -2, 5) (B) (1, 0, 5) (C) (0, 3, -5) (D) (-1, -3, 0)

ઉકેલ : સમતલમાં આવેલી રેખા પરનું બિંદુ A(1, 2, 3) સમતલનું પણ બિંદુ છે. સમતલનો અભિલંબ સદિશ એ

$$\vec{l} = (1, 2, 3) \text{ તથા } \vec{m} = (1, 1, 4) \text{ સદિશની દિશાવાળી રેખાને લંબ છે.}$$

$$\therefore \text{સમતલનો અભિલંબ સદિશ } \vec{n} = \vec{l} \times \vec{m} = (1, 2, 3) \times (1, 1, 4) = (5, -1, -1)$$

$$\therefore \text{સમતલનું સમીકરણ } 5(x-1) -1(y-2) -1(z-3) = 0$$

$$\therefore 5x - y - z = 0$$

આપેલ બિંદુઓ પૈકી માત્ર બિંદુ (1, 0, 5) આ સમતલ પર આવેલું છે તે ચકાસી શકાય.

જવાબ : (B)

(115) સમતલો $x = ay + b$ અને $z = cy + d$ ની છેદરેખાનું સંમિત સ્વરૂપ.... [JEE : 2014]

$$(A) \frac{x-b}{a} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-d}{c}$$

$$(B) \frac{x-b-a}{a} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-d-c}{c}$$

$$(C) \frac{x-b}{b} = \frac{y-0}{1} = \frac{z-c}{d}$$

$$(D) \frac{x-b-a}{b} = \frac{y-1}{0} = \frac{z-d-c}{d}$$

ઉકેલ : સમતલ $x - ay = b$ નો અભિલંબ સદિશ $\vec{n}_1 = (1, -a, 0)$ અને સમતલ $z - cy = d$ નો અભિલંબ સદિશ $\vec{n}_2 = (0, -c, 1)$

$$\therefore \text{સમતલોની છેદરેખાની દિશાનો સદિશ } \vec{l} = \vec{n}_1 \times \vec{n}_2$$

$$= (1, -a, 0) \times (0, -c, 1)$$

$$= (-a, -1, -c)$$

$$\text{અથવા } \vec{l} = (a, 1, c)$$

છેદરેખા પરના કોઈક બિંદુ માટે $y = 1$ લેતાં $x = a + b$ અને $z = c + d$

$\therefore$ છેદરેખા પર એક બિંદુ $(a + b, 1, c + d)$ છે.

$$\therefore \text{છેદરેખાનું સંમિત સ્વરૂપ } \frac{x-a-b}{a} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-c-d}{c}$$

જવાબ : (B)

(116) જો સમતલો $4x - 2y - 4z + 1 = 0$ અને $4x - 2y - 4z + d = 0$ વચ્ચેનું અંતર 7 હોય, તો d

[JEE : 2014]

- (A) 41 અથવા -42 (B) 42 અથવા -43 (C) -41 અથવા 43 (D) -42 અથવા 44

ઉકેલ : સમાંતર સમતલો વચ્ચેનું અંતર $= \frac{|d_1 - d_2|}{|\vec{n}|}$

$$\therefore 7 = \frac{|d - 1|}{\sqrt{16 + 4 + 16}}$$

$$42 = d - 1 \text{ અથવા } -42 = d - 1$$

$$\therefore d = 43 \quad \text{અથવા} \quad d = -41$$

જવાબ : (C)

(117) રેખા $2(x + 1) = y = z + 4$ અને સમતલ $2x - y + \sqrt{\lambda}z + 4 = 0$ વચ્ચેના ખૂણાનું માપ $\frac{\pi}{6}$ હોય, તો $\lambda =$

[JEE : 2014]

- (A) $\frac{135}{7}$ (B) $\frac{45}{11}$ (C) $\frac{45}{7}$ (D) $\frac{135}{11}$

ઉકેલ : રેખા $\frac{x+1}{1} = \frac{y}{2} = \frac{z+4}{2}$ ની દિશા $\vec{l} = (1, 2, 2)$ અને સમતલ $2x - y + \sqrt{\lambda}z + 4 = 0$ નો અભિલંબ સદિશ $\vec{n} = (2, -1, \sqrt{\lambda})$.

$$\text{રેખા અને સમતલ વચ્ચેના ખૂણાનું માપ } \theta \text{ લેતાં, } \sin \theta = \frac{|\vec{l} \cdot \vec{n}|}{|\vec{l}| |\vec{n}|}$$

$$\therefore \sin \frac{\pi}{6} = \frac{|2 - 2 + 2\sqrt{\lambda}|}{\sqrt{1 + 4 + 4} \cdot \sqrt{4 + 1 + \lambda}}$$

$$\therefore \frac{1}{2} = \frac{2\sqrt{\lambda}}{3\sqrt{5 + \lambda}}$$

$$\therefore 45 + 9\lambda = 16\lambda. \text{ આથી } \frac{45}{7} = \lambda$$

જવાબ : (C)

(118) રેખાઓ $\frac{x}{1} = \frac{y}{-1} = \frac{z}{1}$ તથા $\frac{x-1}{0} = \frac{y+1}{-2} = \frac{z}{1}$ ની વચ્ચેના ન્યૂનતમ અંતરને સમાવતી રેખાનું સમીકરણ....

[JEE : 2014]

- (A) $\frac{x}{1} = \frac{y}{-1} = \frac{z}{-2}$ (B) $\frac{x-1}{1} = \frac{y+1}{-1} = \frac{z}{-2}$ (C) $\frac{x-1}{1} = \frac{y+1}{-1} = \frac{z}{1}$ (D) $\frac{x}{-2} = \frac{y}{1} = \frac{z}{2}$

ઉકેલ : રેખા $\frac{x}{1} = \frac{y}{-1} = \frac{z}{1}$ પર કોઈક $k_1 \in \mathbb{R}$ માટે બિંદુ $P(k_1, -k_1, k_1)$ અને રેખા $\frac{x-1}{0} = \frac{y+1}{-2} = \frac{z}{1}$ પર કોઈક $k_2 \in \mathbb{R}$ માટે બિંદુ $Q(1, -2k_2 - 1, k_2)$ છે.

$\leftrightarrow$
PQ એ આપેલ બંને રેખાઓને લંબ હોય, તો PQ ન્યૂનતમ અંતર થાય.

$$\vec{PQ} = (-k_1 + 1, -2k_2 + k_1 - 1, k_2 - k_1)$$

$$\vec{PQ} \perp \vec{l} \text{ અને } \vec{PQ} \perp \vec{m},$$

$$\text{જ્યાં } \vec{l} = (1, -1, 1) \text{ અને } \vec{m} = (0, -2, 1)$$

$$\begin{aligned} \vec{PQ} &= k(\vec{l} \times \vec{m}) \\ &= k(1, -1, -2) \end{aligned}$$

$$\therefore -k_1 + 1 = 2k_2 - k_1 + 1 \quad \dots(1)$$

$$\therefore 2(-2k_2 + k_1 - 1) = k_2 - k_1 \quad \dots(2)$$

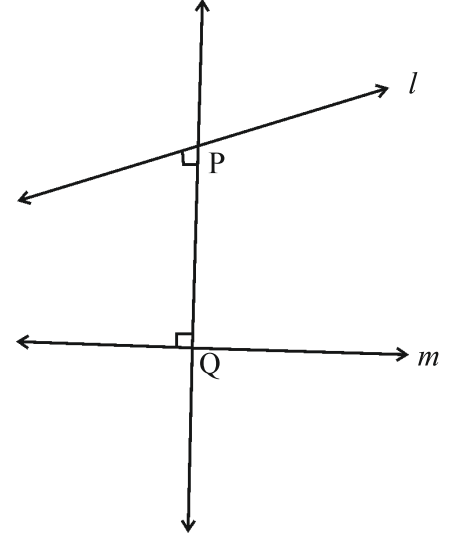
$$(1) \text{ પરથી } k_2 = 0$$

$$\therefore 2k_1 - 2 = -k_1$$

$$\therefore k_1 = \frac{2}{3}$$

$$\therefore Q(1, -2k_2 - 1, k_2) = (1, -1, 0)$$

$$\begin{aligned} \overleftrightarrow{PQ} \text{ ની દિશાનો સદિશ} &= \left(1 - \frac{2}{3}, -1 + \frac{2}{3}, 0 - \frac{2}{3}\right) \\ &= \left(\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}\right) \text{ એટલે કે } (1, -1, -2) \end{aligned}$$



આકૃતિ 21.9

$$\therefore \text{આપેલ રેખાઓ વચ્ચેના ન્યૂનતમ અંતરને સમાવતી રેખાનું સમીકરણ } \frac{x-1}{1} = \frac{y+1}{-1} = \frac{z}{-2} \text{ છે.}$$

જવાબ : (B)

જુઓ કે,

$$(1, -1, 1) \times (0, -2, 1) = (1, -1, -2)$$

$\therefore$ જવાબ (A) કે (B) શક્ય છે.

(119) બિંદુ $P(\lambda, \lambda, \lambda)$ માંથી રેખાઓ $y = x, z = 1$ અને $y = -x, z = -1$ પર $\overline{PQ}$ અને $\overline{PR}$ લંબ દોરેલા છે. જો બિંદુ P એ $\angle QPR$ કાટખૂણો બને તેવું હોય, તો λ ની શક્ય કિંમત (કિંમતો)....

(A) $\sqrt{2}$

(B) 1

(C) -1

(D) $-\sqrt{2}$

ઉકેલ : રેખા $L_1 : \frac{x}{1} = \frac{y}{1} = \frac{z-1}{0}$ પરનું કોઈ પણ બિંદુ, $Q(k_1, k_1, 1)$ અને $\vec{l} = (1, 1, 0)$ અને રેખા

$L_2 : \frac{x}{1} = \frac{y}{-1} = \frac{z+1}{0}$ પરનું કોઈ પણ બિંદુ $R(k_2, -k_2, -1)$ અને $\vec{m} = (1, -1, 0)$

$$\vec{PQ} = (k_1 - \lambda, k_1 - \lambda, 1 - \lambda). \text{ વળી, } \vec{PQ} \perp L_1$$

$$\therefore \vec{PQ} \cdot \vec{l} = 0$$

$$\therefore k_1 - \lambda + k_1 - \lambda = 0. \text{ આથી, } k_1 = \lambda$$

$$\text{તથા } \vec{PR} \perp L_2. \text{ આથી, } \vec{PR} \cdot \vec{m} = 0$$

$$\therefore (k_2 - \lambda, -k_2 - \lambda, -1 - \lambda) \cdot (1, -1, 0) = 0$$

$$\therefore k_2 - \lambda + k_2 + \lambda = 0$$

$$\therefore k_2 = 0$$

$\angle QPR$ કાટખૂણો છે.

$$\therefore \vec{PQ} \perp \vec{PR}. \text{ આથી, } \vec{PQ} \cdot \vec{PR} = 0$$

$$\therefore (k_1 - \lambda)(k_2 - \lambda) + (k_1 - \lambda)(-k_2 - \lambda) + (1 - \lambda)(-1 - \lambda) = 0$$

$$\therefore (1 - \lambda)(-1 - \lambda) = 0 \quad (k_1 = \lambda)$$

$$\therefore \lambda^2 - 1 = 0$$

$$\therefore \lambda = 1 \text{ અથવા } \lambda = -1$$

$\lambda = 1$ લેતાં $P = Q = (1, 1, 1)$. આથી, $\lambda = 1$ શક્ય નથી.

$$\therefore \lambda = -1$$

જવાબ : (C)

- (120) R^3 માં સમતલ $\pi_1 : y = 0$ અને $\pi_2 : x + z = 1$ છે. સમતલ π_1 અને π_2 થી ભિન્ન સમતલ π_3 છે. તે π_1 અને π_2 ની છેદરેખામાંથી પસાર થાય છે. જો બિંદુ $(0, 1, 0)$ નું π_3 થી અંતર 1 હોય અને (α, β, γ) થી π_3 નું અંતર 2 હોય, તો નીચેનામાંથી સત્ય છે. [JEE : 2015]

$$(A) 2\alpha + \beta + 2\gamma + 2 = 0$$

$$(B) 2\alpha - \beta + 2\gamma + 4 = 0$$

$$(C) 2\alpha + \beta - 2\gamma - 10 = 0$$

$$(D) 2\alpha - \beta + 2\gamma - 8 = 0$$

ઉકેલ : π_1 અને π_2 ની છેદરેખામાંથી પસાર થતા સમતલ π_3 નું સમીકરણ $x + z - 1 + \lambda (y) = 0$

$$\pi_3 \text{ નું } (0, 1, 0) \text{ થી અંતર} = 1 = \frac{|0 + 0 - 1 + \lambda|}{\sqrt{1 + 1 + \lambda^2}}$$

$$\therefore (\lambda^2 + 2) = \lambda^2 - 2\lambda + 1$$

$$\therefore 2\lambda = -1$$

$$\therefore \lambda = \frac{-1}{2}$$

$$\pi_3 \text{ નું સમીકરણ } 2x - y + 2z - 2 = 0$$

$$\pi_3 \text{ નું } (\alpha, \beta, \gamma) \text{ થી અંતર} = 2 = \frac{|2\alpha - \beta + 2\gamma - 2|}{\sqrt{4 + 1 + 4}}$$

$$\therefore 2(3) = |2\alpha - \beta + 2\gamma - 2|$$

$$\therefore 2\alpha - \beta + 2\gamma - 2 = 6 \text{ અથવા } 2\alpha - \beta + 2\gamma - 2 = -6$$

$$\therefore 2\alpha - \beta + 2\gamma - 8 = 0 \text{ તથા } 2\alpha - \beta + 2\gamma + 4 = 0$$

જવાબ : (B), (D)

- (121) ધારો કે R^3 ની રેખા L ઊગમબિંદુમાંથી પસાર થાય છે તથા L પરનાં બધાં જ બિંદુઓ સમતલ $\pi_1 : x + 2y - z + 1 = 0$ અને $\pi_2 : 2x - y + z - 1 = 0$ થી સમાન અંતરે આવેલાં છે. ધારો કે L નાં બિંદુઓથી π_1 પર દોરેલા લંબપાદનો બિંદુગણ M છે. નીચેનામાંથી કયાં બિંદુ (બિંદુઓ) M ના સભ્ય છે ? [JEE : 2015]

$$(A) \left(0, \frac{-5}{6}, \frac{-2}{3}\right) \quad (B) \left(\frac{-1}{6}, \frac{-1}{3}, \frac{1}{6}\right) \quad (C) \left(\frac{-5}{6}, 0, \frac{1}{6}\right) \quad (D) \left(\frac{-1}{3}, 0, \frac{2}{3}\right)$$

ઉકેલ : રેખા L નાં બધાં જ બિંદુઓ π_1 અને π_2 સમતલથી સમાન અંતરે આવેલાં છે, એટલે કે રેખા L એ π_1 અને π_2 ની વચ્ચેના ખૂણાના દુભાજક સમતલ પર આવેલી છે.

$$\text{દુભાજક સમતલનું સમીકરણ } \frac{x + 2y - z + 1}{\sqrt{1 + 4 + 1}} = \pm \frac{2x - y + z - 1}{\sqrt{4 + 1 + 1}}$$

$$\therefore x + 2y - z + 1 = 2x - y + z - 1 \text{ અથવા } x + 2y - z + 1 = -2x + y - z + 1$$

$$\therefore x - 3y + 2z - 2 = 0 \text{ અથવા } 3x + y = 0$$

$$\text{ધારો કે રેખાનું સમીકરણ } \frac{x-0}{l} = \frac{y-0}{m} = \frac{z-0}{n} \text{ છે.}$$

તેનાં બિંદુઓ દુભાજક સમતલો પર આવેલાં છે.

$$\therefore l - 3m + 2n = 0 \text{ અને } 3l + m = 0$$

$$\therefore \frac{l}{-2} = \frac{m}{6} = \frac{n}{10}$$

$$\therefore \frac{l}{-1} = \frac{m}{3} = \frac{n}{5}$$

$$\therefore \text{રેખાનું સમીકરણ } \frac{x}{-1} = \frac{y}{3} = \frac{z}{5}$$

$\therefore$ રેખા પરનું કોઈ પણ બિંદુ $A(-k, 3k, 5k)$ થશે.

ધારો કે બિંદુ A માંથી સમતલ π_1 પરનો લંબપાદ $B(x, y, z)$ છે.

$$\therefore \frac{x+k}{1} = \frac{y-3k}{2} = \frac{z-5k}{-1} = -\left(\frac{1(-k) + 2(3k) - 1(5k) + 1}{(1)^2 + (2)^2 + (-1)^2}\right)$$

$$\therefore \frac{x+k}{1} = \frac{y-3k}{2} = \frac{z-5k}{-1} = \frac{-1}{6}$$

$$\therefore \text{લંબપાદ } (x, y, z) = \left(\frac{-1}{6} - k, \frac{-2}{6} + 3k, \frac{1}{6} + 5k\right)$$

$$\text{હવે, } k = 0 \text{ લેતાં લંબપાદ } \left(\frac{-1}{6}, \frac{-1}{3}, \frac{1}{6}\right)$$

$$\text{અને, } k = \frac{-1}{6} \text{ લેતાં લંબપાદ } \left(0, \frac{-5}{6}, \frac{2}{3}\right)$$

જવાબ : (A), (B)

$$(122) \text{ રેખા } \frac{x-2}{3} = \frac{y+1}{4} = \frac{z-2}{12} \text{ અને સમતલ } x - y + z = 16 \text{ ના છેદબિંદુથી } (1, 0, 2) \text{ નું અંતર } \dots\dots$$

[JEE : 2015]

$$(A) 2\sqrt{14}$$

$$(B) 8$$

$$(C) 3\sqrt{21}$$

$$(D) 13$$

ઉકેલ : રેખા પરનું કોઈ પણ બિંદુ $(3k + 2, 4k - 1, 12k + 2)$ એ સમતલનું પણ બિંદુ હોય, તો

$$3k + 2 - 4k + 1 + 12k + 2 = 16$$

$$\therefore 11k = 11$$

$$\therefore k = 1$$

$\therefore$ રેખા અને સમતલનું છેદબિંદુ $(5, 3, 14)$ છે.

$$(1, 0, 2) \text{ થી તેનું અંતર } = \sqrt{(5-1)^2 + (3-0)^2 + (14-2)^2} = \sqrt{16 + 9 + 144} = 13 \quad \text{જવાબ : (D)}$$

(123) $2x - 5y + z = 3$ અને $x + y + 4z = 5$ ની છેદરેખામાંથી પસાર થતા અને $x + 3y + 6z = 1$ ને સમાંતર સમતલનું સમીકરણ

(A) $2x + 6y + 12z = 13$ (B) $x + 3y + 6z = -7$ (C) $x + 3y + 6z = 7$ (D) $2x + 6y + 12z = -13$

ઉકેલ : સમતલો $2x - 5y + z = 3$ અને $x + y + 4z = 5$ ના એક છેદબિંદુ માટે $z = 0$ લેતાં, $2x - 5y = 3$ અને $x + y = 5$.

બંને સમીકરણો ઉકેલતાં $x = 4, y = 1$

$\therefore (4, 1, 0)$ માંથી પસાર થતા અને $x + 3y + 6z = 1$ ને સમાંતર સમતલનું સમીકરણ

$$1(x - 4) + 3(y - 1) + 6(z - 0) = 0$$

$$\therefore x + 3y + 6z = 7$$

જવાબ : (C)

બીજી રીત :

માંગેલ સમતલનું સમીકરણ $2x - 5y + z - 3 + \lambda(x + y + 4z - 5) = 0$

$$\therefore (2 + \lambda)x + (-5 + \lambda)y + (4\lambda + 1)z - 5\lambda - 3 = 0$$

તે $x + 3y + 6z = 1$ ને સમાંતર છે.

$$\therefore \frac{2 + \lambda}{1} = \frac{-5 + \lambda}{3} = \frac{4\lambda + 1}{6}$$

$$\therefore 6 + 3\lambda = -5 + \lambda$$

$$\therefore \lambda = -\frac{11}{2}$$

$$\therefore \left(2 - \frac{11}{2}\right)x + \left(-5 - \frac{11}{2}\right)y + (-22 + 1)z + \frac{55}{2} - 3 = 0$$

$$\therefore 7x + 21y + 42z - 49 = 0$$

$$\therefore x + 3y + 6z - 7 = 0$$

જવાબ : (C)

(124) રેખા $\frac{x-1}{\alpha} = \frac{y+1}{-1} = \frac{z}{1}$ ($\alpha \neq 0$) અને $x + y + z + 1 = 0$ તથા $2x - y + z + 3 = 0$ ની છેદરેખા વચ્ચેનું

લઘુત્તમ અંતર $\frac{1}{\sqrt{3}}$ હોય, તો $\alpha = \dots\dots$

[JEE : 2015]

(A) $-\frac{16}{19}$

(B) $-\frac{19}{16}$

(C) $\frac{32}{19}$

(D) $\frac{19}{32}$

ઉકેલ : સમતલો $x + y + z + 1 = 0$ અને $2x - y + z + 3 = 0$ ના અભિલંબ સદિશ અનુક્રમે

$$\vec{n}_1 = (1, 1, 1) \text{ અને } \vec{n}_2 = (2, -1, 1)$$

$$\therefore \text{છેદરેખાની દિશાનો સદિશ } \vec{l} = \vec{n}_1 \times \vec{n}_2 = (1, 1, 1) \times (2, -1, 1) = (2, 1, -3)$$

સમતલોનાં સમીકરણોમાં $z = 0$ લેતાં, $x + y = -1$ અને $2x - y = -3$

$$\therefore x = \frac{-4}{3}, y = \frac{1}{3}$$

$$\therefore \text{છેદરેખા પરનું એક બિંદુ } B(\vec{b}) = \left(\frac{-4}{3}, \frac{1}{3}, 0\right) \text{ છે.}$$

$$\text{રેખા } \frac{x-1}{\alpha} = \frac{y+1}{-1} = \frac{z}{1} \text{ માટે } A(\vec{a}) = (1, -1, 0) \text{ અને } \vec{m} = (\alpha - 1, 1)$$

$$\vec{l} \times \vec{m} = (2, 1, -3) \times (\alpha, -1, 1) = (-2, -2 - 3\alpha, -2 - \alpha)$$

$$\text{અથવા } \vec{l} \times \vec{m} = (2, 2 + 3\alpha, 2 + \alpha)$$

$$\text{લઘુત્તમ અંતર} = \frac{|(\vec{b} - \vec{a}) \cdot (\vec{l} \times \vec{m})|}{|\vec{l} \times \vec{m}|}$$

$$\therefore \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\left| \left(\frac{-7}{3}, \frac{4}{3}, 0 \right) \cdot (2, 2 + 3\alpha, 2 + \alpha) \right|}{\sqrt{4 + (2 + 3\alpha)^2 + (2 + \alpha)^2}}$$

$$\therefore 10\alpha^2 + 16\alpha + 12 = 3 \left(\frac{-14}{3} + \frac{8}{3} + 4\alpha \right)^2$$

$$\therefore 10\alpha^2 + 16\alpha + 12 = 12(4\alpha^2 - 4\alpha + 1)$$

$$\therefore 10\alpha^2 + 16\alpha + 12 = 48\alpha^2 - 48\alpha + 12$$

$$\therefore 38\alpha^2 - 64\alpha = 0$$

$$\therefore 2\alpha(19\alpha - 32) = 0$$

$$\therefore \alpha = 0 \text{ અથવા } \alpha = \frac{32}{19}. \text{ પરંતુ } \alpha \neq 0$$

$$\therefore \alpha = \frac{32}{19}$$

જવાબ : (C)

(125) (3, 2, 0)માંથી પસાર થતા સમતલમાં રેખા $\frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{5} = \frac{z-3}{4}$ આવેલી છે. આ સમતલમાં બિંદુ પણ આવેલું છે. [JEE : 2015]

(A) (0, 7, -10)

(B) (0, 7, 10)

(C) (0, 3, 1)

(D) (0, -3, 1)

ઉકેલ : રેખા $\frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{5} = \frac{z-3}{4}$ માટે $A(\vec{a}) = (1, 2, 3)$ અને $A(\vec{l}) = (1, 5, 4)$

સમતલનું બિંદુ B (3, 2, 0) છે. $\vec{AB} = (2, 0, -3)$

$$\therefore \text{સમતલનો અભિલંબ } \vec{n} = \vec{AB} \times \vec{l} = (2, 0, -3) \times (1, 5, 4) = (15, -11, 10)$$

$$\therefore \text{સમતલનું સમીકરણ } 15(x-3) - 11(y-2) + 10(z-0) = 0$$

$$\therefore 15x - 11y + 10z - 23 = 0$$

આપેલ બિંદુઓ પૈકી માત્ર (0, 7, 10) સમતલ પર છે.

જવાબ : (B)

(126) Z-અક્ષ અને $x + y + 2z - 3 = 0 = 2x + 3y + 4z - 4$ ની છેદરેખા વચ્ચેનું લઘુત્તમ અંતર

[JEE : 2015]

(A) 1

(B) 2

(C) 3

(D) 4

ઉકેલ : સમતલો $x + y + 2z - 3 = 0$ અને $2x + 3y + 4z - 4 = 0$ ના અભિલંબ અનુક્રમે $\vec{n}_1 = (1, 1, 2)$ અને

$$\vec{n}_2 = (2, 3, 4)$$

છેદરેખાની દિશાનું સદિશ $\vec{l} = \vec{n}_1 \times \vec{n}_2$

$$= (1, 1, 2) \times (2, 3, 4) = (-2, 0, 1)$$

$z = 0$ લેતાં $x + y = 3$ અને $2x + 3y = 4$ નું સમાધાન કરતું છેદરેખા પરનું એક બિંદુ $(5, -2, 0)$ છે.

Z-અક્ષની દિશાનો સદિશ $\vec{m} = (0, 0, 1)$

$$\therefore \vec{l} \times \vec{m} = (0, 2, 0) \text{ એટલે કે } \vec{l} \times \vec{m} = (0, 1, 0) \text{ લઈ શકાય.}$$

Z-અક્ષ પરનું બિંદુ $(0, 0, 1)$ લઈ શકાય.

$$\therefore \text{લઘુત્તમ અંતર} = \frac{|\vec{b} - \vec{a} \cdot \vec{l} \times \vec{m}|}{|\vec{l} \times \vec{m}|} = \frac{|(5, -2, -1) \cdot (0, 1, 0)|}{1} = 2$$

જવાબ : (B)

એક કરતાં વધુ સાચા વિકલ્પવાળા પ્રશ્નો હોય તેવા દાખલા :

(127) રેખા $\frac{x-1}{1} = \frac{y}{2} = \frac{z+1}{3}$ એ

(A) ઊગમબિંદુમાંથી પસાર થાય છે.

(B) $(1, 0, -1)$ માંથી પસાર થાય છે.

(C) $x + 2y + 3z - 7 = 0$ સાથે કાટખૂણો બનાવે છે. (D) રેખા $\frac{x-1}{1} = \frac{y}{2} = \frac{z-1}{3}$ ને સમાંતર છે.

ઉકેલ : રેખા પરનું બિંદુ $(1, 0, -1)$ છે.

$\therefore$ વિકલ્પ (B) સત્ય છે.

રેખાની દિશાનો સદિશ અને સમતલ $x + 2y + 3z - 7 = 0$ નો અભિલંબ સદિશ સમાન હોવાથી રેખા, સમતલને લંબ છે.

$\therefore$ વિકલ્પ (C) સત્ય છે.

આપેલ રેખાનો સદિશ $\vec{l} = (1, 2, 3)$ અને રેખા $\frac{x-1}{1} = \frac{y}{2} = \frac{z-1}{-3}$ દિશાનો સદિશ $\vec{m} = (1, 2, -3)$ હોવાથી,

$$\vec{l} \times \vec{m} \neq \vec{0}$$

$\therefore$ રેખાઓ એકબીજાને સમાંતર નથી

$\therefore$ વિકલ્પ (D) અસત્ય છે.

$$\frac{0-1}{1} = \frac{0}{2} = \frac{0+1}{3} \text{ સત્ય નથી. આથી વિકલ્પ (A) સત્ય નથી.}$$

જવાબ : (B), (C)

(128) રેખા $\frac{x-3}{3} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-2}{2}$ એ

(A) $3x + y - 2z = 6$ સમતલમાં આવેલી છે.

(B) રેખા $\frac{x}{3} = \frac{y}{1} = \frac{z}{2}$ ને સંપાતી છે.

(C) સમતલ $x + y - 2z = 0$ માં આવેલી છે.

(D) રેખા $(6, 2, 4)$ માંથી પસાર થાય છે.

ઉકેલ : રેખા માટે $\vec{a} = (3, 1, 2)$ અને $\vec{l} = (3, 1, 2)$

$$3(3k + 3) + k + 1 - 2(2k + 2) = 6 \Rightarrow k = 0$$

રેખા પરનું $k = 0$ સિવાયનું બિંદુ $(3k + 3, k + 1, 2k + 2)$ સમતલ $3x + y - 2z = 6$ માં આવેલું નથી.

∴ રેખા સમતલમાં આવેલી નથી.

∴ વિકલ્પ (A) અસત્ય છે.

આપેલ રેખા પરનું પ્રત્યેક બિંદુ $(3k + 3, k + 1, 2k + 2)$ એ રેખા $\frac{x}{3} = \frac{y}{1} = \frac{z}{2}$ નું સમાધાન કરે છે.

∴ બંને રેખા સંપાતી છે. (આમ, જો $\frac{x-3}{3} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-2}{2} \Leftrightarrow \frac{x}{3} = \frac{y}{1} = \frac{z}{2}$)

∴ વિકલ્પ (B) સત્ય છે.

બિંદુ $(3k + 3, k + 1, 2k + 2)$ પ્રત્યેક $k \in \mathbb{R}$ માટે સમતલ $x + y - 2z = 0$ માં આવેલું છે.

∴ વિકલ્પ (C) સત્ય છે.

બિંદુ $(6, 2, 4)$ રેખાના સમીકરણનું સમાધાન કરે છે. ($k = 1$ માટે)

∴ વિકલ્પ (D) સત્ય છે. ($\frac{x}{3} = \frac{y}{1} = \frac{z}{2}$ પ્રમાણે બધાં લો)

જવાબ : (B), (C), (D)

(129) રેખા $\frac{x-3}{3} = \frac{y-3}{-4} = \frac{z-5}{2}$ એ

(A) $\frac{x}{6} = \frac{y-5}{-8} = \frac{z-2}{4}$ ને સમાંતર છે.

(B) સમતલ $8x + 3y - 6z = 3$ માં આવેલી છે.

(C) $(3, -3, 5)$ માંથી પસાર થાય છે.

(D) $3x - 4y + 2z = 7$ ને લંબ છે.

ઉકેલ : રેખા L : $\frac{x-3}{3} = \frac{y-3}{-4} = \frac{z-5}{2}$ માટે $\vec{l} = (3, -4, 2)$ તથા $P(3k + 3, -4k + 3, 2k + 5)$ એ રેખા પરનું કોઈ પણ બિંદુ છે.

રેખા M : $\frac{x}{6} = \frac{y-5}{-8} = \frac{z-2}{4}$ માટે $\vec{m} = (6, -8, 4)$.

$\vec{l} \times \vec{m} = \vec{0}$ તથા બિંદુ $(3, 3, 5) \notin M$ કારણ કે $\frac{3}{6} \neq \frac{3-5}{-8} \neq \frac{5-2}{4}$

∴ બે રેખાઓ એકબીજીને સમાંતર છે.

∴ વિકલ્પ (A) સત્ય છે.

બિંદુ P એ સમતલ $8x + 3y - 6z = 3$ માં આવેલું છે.

કારણ કે $8(3k + 3) + 3(-4k + 3) - 6(2k + 5) = 3, \forall k \in \mathbb{R}$

∴ વિકલ્પ (B) સત્ય છે.

બિંદુ $(3, -3, 5)$ એ રેખા L ના સમીકરણનું સમાધાન કરતું નથી, કારણ કે $\frac{3-3}{3} \neq \frac{-3-3}{-4}$

∴ વિકલ્પ (C) અસત્ય છે.

સમતલ $3x - 4y + 2z = 7$ નો અભિલંબ $\vec{n} = (3, -4, 2) = \vec{l}$

∴ રેખા સમતલને લંબ છે.

∴ વિકલ્પ (D) સત્ય છે.

જવાબ : (A), (B), (D)

(130) રેખાઓ L : $\frac{x-1}{3} = \frac{y+1}{2} = \frac{z-1}{5}$ અને M : $\frac{x+2}{4} = \frac{y-1}{3} = \frac{z+1}{-2}$ માટે

(A) $L \parallel M$

(B) L અને M વિષમતલીય રેખાઓ છે.

(C) રેખા બિંદુ M $(2, 4, 1)$ માંથી પસાર થાય છે. (D) L અને M વચ્ચેનું લઘુત્તમ અંતર $\frac{107}{\sqrt{1038}}$ છે.

ઉકેલ : રેખા L માટે $\vec{a} = (1, -1, 1)$, $\vec{l} = (3, 2, 5)$

રેખા M માટે $\vec{b} = (-2, 1, -1)$, $\vec{m} = (4, 3, -2)$

હવે, $\vec{l} \times \vec{m} = (3, 2, 5) \times (4, 3, -2) = (-19, 26, 1) \neq \vec{0}$

$\therefore$ L અને M સમાંતર રેખાઓ પણ નથી અને સંપાતી પણ નથી. આથી વિકલ્પ (A) અસત્ય છે.

બિંદુ $(2, 4, 1) \notin M$ કારણ કે $\frac{2+2}{4} = \frac{4-1}{3} = \frac{1+1}{-2}$ સત્ય નથી.

$\therefore$ વિકલ્પ (C) અસત્ય છે.

વળી $(\vec{b} - \vec{a}) \cdot (\vec{l} \times \vec{m}) = (-3, 2, -2) \cdot (-19, 26, 1) = 57 + 52 - 2 = 107 \neq 0$

$\therefore$ L અને M વિષમતલીય છે. આમ, વિકલ્પ (B) સત્ય છે.

$$\begin{aligned} \therefore \text{L અને M વચ્ચેનું લઘુત્તમ અંતર} &= \frac{|(\vec{b} - \vec{a}) \cdot (\vec{l} \times \vec{m})|}{|\vec{l} \times \vec{m}|} \\ &= \frac{107}{\sqrt{(-19)^2 + (26)^2 + (1)^2}} = \frac{107}{\sqrt{1038}} \end{aligned}$$

$\therefore$ વિકલ્પ (D) સત્ય છે.

જવાબ : (B), (D)

(131) રેખા L : $\frac{x-1}{2} = \frac{2-y}{3} = \frac{z+3}{4}$ અને સમતલ $\pi : 2x + 4y - z = 1$

(A) રેખા L અને સમતલ π એકબીજાને સમાંતર છે. (B) $L \perp \pi$

(C) L અને π નું છેદબિંદુ $(3, -1, 1)$ છે.

(D) L અને π વચ્ચેના ખૂણાનું માપ $\sin^{-1} \frac{12}{\sqrt{609}}$ છે.

ઉકેલ : રેખા L માટે $\vec{a} = (1, 2, -3)$, $\vec{l} = (2, -3, 4)$

રેખા પરનું કોઈ પણ બિંદુ $P(2k+1, -3k+2, 4k-3)$ છે. સમતલ π નો અભિલંબ સદિશ $\vec{n} = (2, 4, -1)$

$\vec{l} \cdot \vec{n} = 4 - 12 - 4 \neq 0$. આથી L અને π એકબીજાને સમાંતર નથી. L એ π માં આવેલ પણ નથી.

$\therefore$ વિકલ્પ (A) અસત્ય છે.

વળી $\vec{l} \neq k\vec{n}$, $k \in \mathbb{R}$

$\therefore$ L અને π એકબીજાને લંબ નથી.

$\therefore$ વિકલ્પ (B) અસત્ય છે.

જો $P \in L$ એ સમતલ π સાથેનું છેદબિંદુ હોય, તો $P \in \pi$

$$\therefore 2(2k+1) + 4(-3k+2) - (4k-3) = 1$$

$$\therefore 12k = 12. \text{ આથી, } k = 1$$

$\therefore$ સમતલ તથા રેખાનું છેદબિંદુ $P(3, -1, 1)$ છે.

$\therefore$ વિકલ્પ (C) સત્ય છે.

∴ L અને π વચ્ચેના ખૂણાનું માપ θ લેતાં,

$$\begin{aligned}\therefore \sin\theta &= \frac{|\vec{l} \cdot \vec{n}|}{|\vec{l}| |\vec{n}|} \\ &= \frac{|4 - 12 - 4|}{\sqrt{4 + 9 + 16} \sqrt{4 + 16 + 1}} = \frac{12}{\sqrt{609}}\end{aligned}$$

$$\therefore \theta = \sin^{-1} \frac{12}{\sqrt{609}}$$

∴ વિકલ્પ (D) સત્ય છે.

જવાબ : (C), (D)

(132) સમતલ $3x + 4y - 6z = 12$ માટે

(A) અક્ષો પરના અંતઃખંડો અનુક્રમે 4, 3 અને -2 છે. (B) રેખા $\frac{x-4}{2} = \frac{y-3}{-3} = \frac{z+1}{-1}$ ને સમાંતર છે.

(C) (1, 5, 3) સમતલનું એક બિંદુ છે.

(D) રેખા $\frac{x-0}{3} = \frac{y+1}{4} = \frac{3-z}{6}$ સમતલને લંબ છે.

ઉકેલ : સમતલ $3x + 4y - 6z = 12$

$$\therefore \frac{x}{4} + \frac{y}{3} + \frac{z}{-2} = 1$$

∴ અક્ષો પરના અંતઃખંડ અનુક્રમે 4, 3, -2 છે.

∴ વિકલ્પ (A) સત્ય છે.

∴ સમતલનો અભિલંબ $\vec{n} = (3, 4, -6)$

રેખા $\frac{x-4}{2} = \frac{y-3}{-3} = \frac{z+1}{-1}$ ની દિશાનો સદિશ $\vec{l} = (2, -3, -1)$

$$\vec{n} \cdot \vec{l} = 6 - 12 + 6 = 0$$

∴ $\vec{n} \perp \vec{l}$ તથા રેખા પરના બિંદુ (4, 3, -1) માટે $3x + 4y - 6z \neq 12$

∴ રેખાનું બિંદુ (4, 3, -1) એ $3x + 4y - 6z = 12$ પર નથી.

∴ રેખા આપેલ સમતલને સમાંતર છે

∴ વિકલ્પ (B) સત્ય છે.

બિંદુ (1, 5, 3) માટે $3(1) + 4(5) - 6(3) = 3 + 20 - 18 = 5 \neq 12$

∴ બિંદુ (1, 5, 3) સમતલ પર નથી

∴ વિકલ્પ (C) અસત્ય છે.

રેખા $\frac{x-0}{3} = \frac{y+1}{4} = \frac{3-z}{6}$ ની દિશાનો સદિશ $\vec{m} = (3, 4, -6) = \vec{n}$

∴ રેખા સમતલને લંબ છે.

∴ વિકલ્પ (D) સત્ય છે.

જવાબ : (A), (B), (D)

(133) અવકાશમાં આવેલી રેખાના અક્ષો સાથેના પ્રક્ષેપનાં માપ અનુક્રમે 3, 4, 12 હોય, તો તેની દિક્કોસાઈન

- (A) $\frac{-3}{13}, \frac{-4}{13}, \frac{-12}{13}$ (B) $\frac{3}{13}, \frac{-4}{13}, \frac{12}{13}$ (C) $\frac{3}{13}, \frac{4}{13}, \frac{12}{13}$ (D) $\frac{3}{13}, \frac{-4}{13}, \frac{-12}{13}$

ઉકેલ : પ્રક્ષેપનાં માપ અનુક્રમે 3, 4, 12 છે.

અક્ષો પરના પ્રક્ષેપનાં માપ $|\vec{l} \cdot \hat{i}|, |\vec{l} \cdot \hat{j}|, |\vec{l} \cdot \hat{k}| = (|l_1|, |l_2|, |l_3|)$ થાય.

$\therefore \vec{l} = (l_1, l_2, l_3)$ તો $(|l_1|, |l_2|, |l_3|) = (3, 4, 12)$

$\therefore l_1 = \pm 3, l_2 = \pm 4, l_3 = \pm 12$. આથી, $|\vec{l}| = 13$

$\therefore$ દિક્કોસાઈન $\frac{-3}{13}, \frac{-4}{13}, \frac{-12}{13}$ અથવા $\frac{3}{13}, \frac{4}{13}, \frac{12}{13}$ અથવા $\frac{3}{13}, \frac{-4}{13}, \frac{12}{13}, \frac{3}{13}, \frac{-4}{13}, \frac{-12}{13}$

જવાબ : (A), (B), (C), (D)

(134) સમતલ $2x + y - 3z + 4 = 0$ ના અભિલંબની દિક્કોસાઈન અનુક્રમે

- (A) $\frac{-1}{\sqrt{14}}, \frac{3}{\sqrt{14}}, \frac{-2}{\sqrt{14}}$ (B) $\frac{2}{\sqrt{14}}, \frac{1}{\sqrt{14}}, \frac{-3}{\sqrt{14}}$ (C) $\frac{-2}{\sqrt{14}}, \frac{-1}{\sqrt{14}}, \frac{3}{\sqrt{14}}$ (D) $\frac{2}{\sqrt{14}}, \frac{1}{\sqrt{14}}, \frac{3}{\sqrt{14}}$

ઉકેલ : સમતલનો અભિલંબ સદિશ $\vec{n} = (2, 1, -3)$

$\therefore |\vec{n}| = \sqrt{4+1+9} = \sqrt{14}$

$\therefore \vec{n}$ ની દિક્કોસાઈન $\frac{2}{\sqrt{14}}, \frac{1}{\sqrt{14}}, \frac{-3}{\sqrt{14}}$ અથવા $\frac{-2}{\sqrt{14}}, \frac{-1}{\sqrt{14}}, \frac{3}{\sqrt{14}}$

(સમતલનું સમીકરણ $-2x - y + 3z = 4$ પણ લઈ શકાય.)

જવાબ : (B), (C)

(135) રેખાઓ $\frac{x+1}{0} = \frac{y-1}{3} = \frac{z-1}{-1}$ અને $\frac{x+1}{3} = \frac{y-4}{2} = \frac{z}{0}$

- (A) એકબીજાને છેદશે નહિ. (B) એકબીજાને છેદશે.
(C) $(-1, 4, 0)$ બિંદુએ છેદશે. (D) $(-1, 1, 1)$ બિંદુએ છેદશે.

ઉકેલ : રેખાઓ માટે $\vec{a} = (-1, 1, 1), \vec{l} = (0, 3, -1)$

અને $\vec{b} = (-1, 4, 0), \vec{m} = (3, 2, 0)$

$$\text{હવે, } [\vec{b} - \vec{a} \vec{l} \vec{m}] = \begin{vmatrix} 0 & 3 & -1 \\ 0 & 3 & -1 \\ 3 & 2 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

વળી, $\vec{l} \times \vec{m} \neq 0$

$\therefore$ રેખાઓ એકબીજાને છેદે છે.

વિકલ્પ (A) અસત્ય છે અને વિકલ્પ (B) સત્ય છે.

પ્રથમ રેખા પરનું કોઈ પણ બિંદુ $(-1, 3k_1 + 1, -k_1 + 1)$

અને બીજી રેખા પરનું કોઈ પણ બિંદુ $(3k_2 - 1, 2k_2 + 4, 0)$

રેખાઓ એકબીજાને છેદે છે.

$$\text{કોઈક } k_2 \text{ તથા } k_1 \text{ માટે, } -1 = 3k_2 - 1, 3k_1 + 1 = 2k_2 + 4, -k_1 + 1 = 0$$

$$\therefore k_2 = 0 \text{ અને } k_1 = 1$$

આ કિંમતો સમીકરણ $3k_1 + 1 = 2k_2 + 4$ નું સમાધાન પણ કરે છે તથા છેદબિંદુ $(-1, 4, 0)$ છે.

વિકલ્પ (C) સત્ય છે અને (D) અસત્ય છે.

જવાબ : (B), (C)

(136) જો રેખા અક્ષો સાથે અનુક્રમે α, β, γ માપના ખૂણા બનાવે તો

$$(A) \cos^2\alpha = \cos^2\beta + \cos^2\gamma$$

$$(B) \sin^2\alpha + \sin^2\beta + \sin^2\gamma = 2$$

$$(C) \sin^2\beta + \sin^2\gamma = 1 + \cos^2\alpha$$

$$(D) \cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 2$$

ઉકેલ : રેખાની દિક્કોસાઈન $\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma$ થશે.

$$\therefore \cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$$

વિકલ્પ (A) અસત્ય છે તથા વિકલ્પ (D) અસત્ય છે.

$$\text{હવે, } \cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$$

$$\therefore 1 - \sin^2\alpha + 1 - \sin^2\beta + 1 - \sin^2\gamma = 1$$

$$\therefore \sin^2\alpha + \sin^2\beta + \sin^2\gamma = 2$$

વિકલ્પ (B) સત્ય છે.

$$\text{તથા } \sin^2\beta + \sin^2\gamma = 1 + 1 - \sin^2\alpha$$

$$\therefore \sin^2\beta + \sin^2\gamma = 1 + \cos^2\alpha$$

વિકલ્પ (C) સત્ય છે.

જવાબ : (B), (C)

(137) રેખા $\frac{x}{1} = \frac{y-3}{1} = \frac{z-3}{2}$ સાથે $\frac{\pi}{3}$ માપનો ખૂણો બનાવતી તથા તેને છેદતી અને ઊગમબિંદુમાંથી પસાર થતી રેખાનું સમીકરણ

$$(A) \frac{x}{-1} = \frac{y}{2} = \frac{z}{1}$$

$$(B) \frac{x}{1} = \frac{y}{-2} = \frac{z}{1}$$

$$(C) \frac{x}{-2} = \frac{y}{1} = \frac{z}{-1}$$

$$(D) \frac{x}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z}{1}$$

ઉકેલ : રેખા $\frac{x}{1} = \frac{y-3}{1} = \frac{z-3}{2}$ માટે $\vec{a} = (0, 3, 3), \vec{l} = (1, 1, 2)$ અને રેખા પરનું કોઈ પણ બિંદુ

$P(k, k+3, 2k+3)$ છે.

$\overleftrightarrow{OP}$ ની દિશાનો સદિશ $\vec{OP} = (k, k+3, 2k+3)$

$\overleftrightarrow{OP}$ એ આપેલ રેખા સાથે $\frac{\pi}{3}$ માપનો ખૂણો બનાવે છે.

$$\therefore \cos \frac{\pi}{3} = \frac{|1(k) + 1(k+3) + 2(2k+3)|}{\sqrt{1+1+4} \cdot \sqrt{k^2 + (k+3)^2 + (2k+3)^2}}$$

$$\therefore \frac{1}{2} = \frac{|6k+9|}{\sqrt{6} \cdot \sqrt{6k^2 + 18k + 18}} = \frac{3|2k+3|}{6\sqrt{k^2 + 3k + 3}}$$

$$\therefore k^2 + 3k + 3 = 4k^2 + 12k + 9$$

$$\therefore 3k^2 + 9k + 6 = 0$$

$$\therefore k^2 + 3k + 2 = 0$$

$$\therefore (k+2)(k+1) = 0$$

$$\therefore k = -2 \text{ અથવા } k = -1$$

$\overleftrightarrow{OP}$ ની દિશાનો સદિશ $\overrightarrow{OP} = (-2, 1, -1)$ અથવા $\overrightarrow{OP} = (-1, 2, 1)$ અને $\overleftrightarrow{OP}$ બિંદુ $O(0, 0, 0)$ માંથી પસાર થાય છે.

$$\overleftrightarrow{OP} \text{ નાં સમીકરણ } \frac{x}{-2} = \frac{y}{1} = \frac{z}{-1} \text{ તથા } \frac{x}{-1} = \frac{y}{2} = \frac{z}{1}$$

જવાબ : (A), (C)

(138) બે સમતલો $x + y + z - 1 = 0$ અને $x - 2y + 4z + 2 = 0$ ની છેદરેખાના સમીકરણનું સંમિત સ્વરૂપ

$$(A) \frac{x-2}{-2} = \frac{y-1}{1} = \frac{z+1}{1}$$

$$(B) \frac{x}{-2} = \frac{y-1}{1} = \frac{z}{1}$$

$$(C) \frac{1-x}{2} = \frac{2y-1}{2} = \frac{2z+1}{2}$$

$$(D) \frac{x+2}{-1} = \frac{y-2}{2} = \frac{z-1}{2}$$

ઉકેલ : સમતલોના અભિલંબ સદિશ $\vec{n}_1 = (1, 1, 1)$, $\vec{n}_2 = (1, -2, 4)$ છે.

છેદરેખાની દિશાનું સદિશ $\vec{l} = \vec{n}_1 \times \vec{n}_2 = (6, -3, -3)$ એટલે કે $\vec{l} = (-2, 1, 1)$

સમતલોનાં સમીકરણોમાં $z = 0$ લેતાં છેદરેખા પરનું એક બિંદુ $(0, 1, 0)$ થશે. કારણ કે સમીકરણો $x + y = 1$, $x - 2y = -2$ બને.

$$\text{તેથી રેખાનું સમીકરણ } \frac{x}{-2} = \frac{y-1}{1} = \frac{z}{1}$$

$\therefore$ વિકલ્પ (B) સત્ય છે.

$z = -1$ લેતાં, બિંદુ $(2, 0, -1)$ મળશે.

કારણ કે સમીકરણો $x + y = 2$, $x - 2y = 2$ બને.

$$\therefore \text{રેખાનું સમીકરણ } \frac{x-2}{-2} = \frac{y}{1} = \frac{z+1}{1} \text{ થશે.}$$

$\therefore$ વિકલ્પ (A) અસત્ય છે.

અથવા $(2, 1, -1)$ સમતલ $x + y + z = 1$ પર નથી.

$\therefore$ વિકલ્પ (A) અસત્ય છે.

$$\text{વિકલ્પ (C) માં રેખાનું સમીકરણ } \frac{x-1}{-2} = \frac{y-\frac{1}{2}}{1} = \frac{z+\frac{1}{2}}{1} \text{ છે.}$$

$(1, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$ બંને સમતલો $x + y + z - 1 = 0$ તથા $x - 2y + 4z + 2 = 0$ પર છે.

દિશા તો $(-2, 1, 1)$ છે જ.

$\therefore$ વિકલ્પ (C) સત્ય છે.

વિકલ્પ (D) પરથી રેખાની દિશા $(-1, 2, 2)$ છે પરંતુ $(-2, 1, 1)$ હોવી જોઈએ.

$\therefore$ વિકલ્પ (D) અસત્ય છે.

જવાબ : (B), (C)

(139) સમતલ $2x + 3y + 5z = 0$ માટે

(A) $2x - 3y + z - 7 = 0$ એ લંબ સમતલ છે.

(B) $(2, 2, -2)$ માંથી પસાર થતું નથી.

(C) $(-2, -2, 2)$ માંથી પસાર થાય છે.

(D) $\frac{x-3}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z+7}{5}$ સમતલને લંબ રેખા છે.

ઉકેલ : સમતલ $2x + 3y + 5z = 0$ નો અભિલંબ સદિશ $\vec{n}_1 = (2, 3, 5)$

સમતલ $2x - 3y + z - 7 = 0$ નો અભિલંબ સદિશ $\vec{n}_2 = (2, -3, 1)$

હવે, $\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2 = 4 - 9 + 5 = 0$. આથી, $\vec{n}_1 \perp \vec{n}_2$

$\therefore$ સમતલ $2x - 3y + z - 7 = 0$ આપેલ સમતલને લંબ સમતલ છે.

$\therefore$ વિકલ્પ (A) સત્ય છે.

$2x + 3y + 5z = 0$ માં બિંદુના યામ $(2, 2, -2)$ મૂકતાં, $2(2) + 3(2) + 5(-2) = 4 + 6 - 10 = 0$.

$\therefore$ બિંદુ $(2, 2, -2)$ સમતલનો સભ્ય છે.

$\therefore$ વિકલ્પ (B) અસત્ય છે.

બિંદુ $(-2, -2, 2)$ માટે $2(-2) + 3(-2) + 5(2) = -4 - 6 + 10 = 0$

$\therefore$ સમતલ બિંદુ $(-2, -2, 2)$ માંથી પસાર થાય છે.

$\therefore$ વિકલ્પ (C) સત્ય છે.

રેખા $\frac{x-3}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z+7}{5}$ ની દિશાનો સદિશ $\vec{l} = (2, 3, 5) = \vec{n}_1$

$\therefore$ રેખા સમતલને લંબ છે.

$\therefore$ વિકલ્પ (D) સત્ય છે.

જવાબ : (A), (C), (D)

(140) બિંદુ $(0, 1, -1)$ થી $2\sqrt{14}$ અંતરે આવેલું રેખા $x = \frac{y-1}{2} = \frac{z+1}{-3}$ પરનું બિંદુ છે.

(A) $(4, 9, -13)$ (B) $(-4, -7, 13)$ (C) $(-2, -3, 5)$ (D) $(2, 5, -7)$

ઉકેલ : આપેલ રેખા પરનું કોઈ પણ બિંદુ $P(k, 2k+1, -3k-1)$ છે.

ધારો કે બિંદુ P નું $(0, 1, -1)$ થી અંતર $2\sqrt{14}$ છે.

$\therefore k^2 + (2k+1-1)^2 + (-3k-1+1)^2 = 4(14)$

$\therefore 14k^2 = 4(14)$. આથી, $k^2 = 4$

$\therefore k = 2$ અથવા $k = -2$

$\therefore$ રેખા પર $(0, 1, -1)$ થી $2\sqrt{14}$ અંતરે આવેલાં બિંદુઓ $(2, 5, -7)$ તથા $(-2, -3, 5)$

જવાબ : (C), (D)

(141) સમતલ $6x - 2y + 3z + 18 = 0$ અને $2x - y + 2z + 13 = 0$ વચ્ચેના ખૂણાના દુભાજક સમતલનું સમીકરણ

(A) $4x + y - 5z - 37 = 0$

(B) $4x + y - 5z + 37 = 0$

(C) $32x - 13y + 23z - 145 = 0$

(D) $32x - 13y + 23z + 145 = 0$

ઉકેલ : આપેલાં સમતલોની વચ્ચેના ખૂણાના દુભાજકનાં સમીકરણ

$$\frac{6x - 2y + 3z + 18}{\sqrt{36 + 4 + 9}} = \pm \frac{2x - y + 2z + 13}{\sqrt{4 + 1 + 4}}$$

$\therefore 3(6x - 2y + 3z + 18) = \pm 7(2x - y + 2z + 13)$

$\therefore 18x - 6y + 9z + 54 = \pm (14x - 7y + 14z + 91)$

$\therefore 4x + y - 5z - 37 = 0$ તથા $32x - 13y + 23z + 145 = 0$

જવાબ : (A), (D)

નિષ્કર્ષ અને કારક પ્રકારના પ્રશ્નો

આ પ્રકારના પ્રશ્નોમાં બે વિધાન હોય છે :

વિધાન 1 : નિષ્કર્ષ

વિધાન 2 : કારક

આ પ્રકારના પ્રશ્નોમાં ચાર વિકલ્પો હોય છે. તે નીચે પ્રમાણે :

- (A) વિધાન 1 અને વિધાન 2 બંને સત્ય છે અને વિધાન 2 એ વિધાન 1 ની યોગ્ય સમજૂતી માટે પર્યાપ્ત છે.
 (B) વિધાન 1 અને વિધાન 2 બંને સત્ય છે અને વિધાન 2 એ વિધાન 1 ની યોગ્ય સમજૂતી માટે પર્યાપ્ત નથી.
 (C) વિધાન 1 સત્ય છે અને વિધાન 2 અસત્ય છે.
 (D) વિધાન 1 અસત્ય છે અને વિધાન 2 સત્ય છે.

(142) વિધાન 1 : રેખા L : $\frac{x}{4} = \frac{y}{-5} = \frac{z}{3}$ એ સમતલ $4x - 5y + 3z = 20$ ને લંબ છે.

વિધાન 2 : રેખા L ની દિક્કોસાઈન $\frac{4}{5\sqrt{2}}, \frac{-5}{5\sqrt{2}}, \frac{3}{5\sqrt{2}}$ છે.

ઉકેલ : સમતલ $4x - 5y + 3z = 20$ નો અભિલંબ સદિશ $\vec{n} = (4, -5, 3)$. રેખા L સમતલને લંબ હોય, તો રેખા L ની દિશાનો સદિશ $\vec{l} = k\vec{n}$, $k \in \mathbb{R}$ થશે.

હવે $\vec{l} = \vec{n}$ લેતાં રેખા L ની દિક્કોસાઈન $\frac{4}{|\vec{l}|}, \frac{-5}{|\vec{l}|}, \frac{3}{|\vec{l}|}$

$$\text{જ્યાં } |\vec{l}| = \sqrt{16 + 25 + 9} = 5\sqrt{2}$$

$\therefore$ રેખા L ની દિક્કોસાઈન $\frac{4}{5\sqrt{2}}, \frac{-1}{\sqrt{2}}, \frac{3}{5\sqrt{2}}$ થશે.

$\therefore$ વિધાન 1 અને વિધાન 2 બંને સત્ય છે તથા વિધાન 2 એ વિધાન 1 ની યોગ્ય સમજૂતી માટે પર્યાપ્ત છે.

જવાબ : (A)

(143) વિધાન 1 : બે સમતલો $5x - 12y + 13z = 40$ અને $5x - 12y + 13z = 20$ વચ્ચેનું અંતર $\frac{10\sqrt{2}}{13}$

વિધાન 2 : બે સમાંતર સમતલો $ax + by + cz + d_1 = 0$ અને $ax + by + cz = d_2$ વચ્ચેનું લંબઅંતર

$$\frac{|d_1 - d_2|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} \text{ થાય.}$$

ઉકેલ : સમતલો $5x - 12y + 13z - 40 = 0$ અને $5x - 12y + 13z - 20 = 0$ માટે $\vec{n}_1 = \vec{n}_2$ હોવાથી તે સમાંતર સમતલો છે.

$$\text{બે સમતલો વચ્ચેનું લંબઅંતર} = \frac{|d_1 - d_2|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} = \frac{|-40 - (-20)|}{\sqrt{25 + 144 + 169}} = \frac{20}{13\sqrt{2}} = \frac{10\sqrt{2}}{13}$$

$\therefore$ વિધાન 1 સત્ય છે.

હવે સમાંતર સમતલો $ax + by + cz + d_1 = 0$ અને $ax + by + cz - d_2 = 0$ વચ્ચેનું લંબઅંતર

$$\frac{|d_1 - (-d_2)|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} = \frac{|d_1 + d_2|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} \text{ થશે.}$$

$\therefore$ વિધાન 2 અસત્ય છે.

જવાબ : (C)

(144) રેખા : $\frac{x-3}{-1} = \frac{y+1}{3} = \frac{z+1}{2}$ અને સમતલ $\pi : x - y + 2z = 0$ છે.

વિધાન 1 : L એ π માં આવેલી છે.

વિધાન 2 : L એ π ને સમાંતર છે.

ઉકેલ : રેખા L માટે $\vec{a} = (3, -1, -1)$, $\vec{l} = (-1, 3, 2)$ અને $(-k+3, 3k-1, 2k-1)$ એ રેખા L નું કોઈ પણ બિંદુ છે.

સમતલ π માટે $\vec{n} = (1, -1, 2)$

હવે, $\vec{l} \cdot \vec{n} = (-1, 3, 2) \cdot (1, -1, 2) = -1 - 3 + 4 = 0$

$\therefore \vec{l} \perp \vec{n}$

$\therefore$ L એ π માં આવેલી છે અથવા L એ π ને સમાંતર છે.

હવે રેખા પરના કોઈ પણ બિંદુના યામ $(-k+3, 3k-1, 2k-1)$ સમતલના સમીકરણમાં મૂકતાં,

$$(-k+3) - (3k-1) + 2(2k-1) = 2 \neq 0$$

$\therefore$ L એ π માં આવેલી નથી.

$\therefore$ વિધાન 1 અસત્ય છે અને વિધાન 2 સત્ય છે.

જવાબ : (D)

(145) બે રેખાઓનાં સમીકરણ L : $\frac{x+3}{1} = \frac{y-2}{-3} = \frac{z-1}{2}$ અને M : $\frac{x-1}{-3} = \frac{y+3}{2} = \frac{z-2}{1}$ છે.

વિધાન 1 : L અને M સમતલીય છે.

વિધાન 2 : સમીકરણો $x_1 + 3y_1 = 4$, $3x_1 + 2y_1 = 5$ અને $2x_1 - y_1 = 1$ સુસંગત છે.

ઉકેલ : રેખા L માટે $\vec{a} = (-3, 2, 1)$, $\vec{l} = (1, -3, 2)$ અને રેખા M માટે $\vec{b} = (1, -3, 2)$, $\vec{m} = (-3, 2, 1)$

$$(\vec{b} - \vec{a}) \cdot (\vec{l} \times \vec{m}) = \begin{vmatrix} 4 & -5 & 1 \\ 1 & -3 & 2 \\ -3 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 4(-7) + 5(7) + 1(-7) = 0$$

$\therefore$ L અને M સમતલીય છે.

$\therefore$ વિધાન 1 સત્ય છે. વળી $\vec{l} \times \vec{m} \neq \vec{0}$

આથી રેખાઓ સમાંતર ન હોવાથી પરસ્પર છેદે છે.

L પરનું કોઈ પણ બિંદુ $(x_1 - 3, -3x_1 + 2, 2x_1 + 1)$

અને M પરનું કોઈ પણ બિંદુ $(-3y_1 + 1, 2y_1 - 3, y_1 + 2)$

હવે છેદબિંદુ માટે $x_1 - 3 = -3y_1 + 1$, $-3x_1 + 2 = 2y_1 - 3$, $2x_1 + 1 = y_1 + 2$

$$\therefore x_1 + 3y_1 = 4$$

$$3x_1 + 2y_1 = 5$$

$$2x_1 - y_1 = 1$$

આપેલ સમીકરણો સુસંગત છે. $x_1 = 1$, $y_1 = 1$ તેમનો ઉકેલ છે.

$\therefore$ વિધાન 2 સત્ય છે.

વિધાન 2 એ વિધાન 1 ની યોગ્ય સમજૂતી માટે પર્યાપ્ત છે.

જવાબ : (A)

(146) વિધાન 1 : રેખા $L : \frac{x-2}{3} = \frac{y}{1} = \frac{z-1}{2}$ માં બિંદુ $P(7, 1, 0)$ નું પ્રતિબિંબ $Q(3, 1, 6)$ છે.

વિધાન 2 : રેખા $\frac{x-2}{3} = \frac{y}{1} = \frac{z-1}{2}$ બિંદુઓ $(7, 1, 0)$ અને $(3, 1, 6)$ ને જોડતા રેખાખંડને દુભાગે છે.

ઉકેલ : $\overline{PQ}$ નું મધ્યબિંદુ $M(5, 1, 3)$ છે.

રેખા L પરનું કોઈ પણ બિંદુ $(3k+2, k, 2k+1)$ છે,

હવે $3k+2=5, k=1, 2k+1=3$ લેતાં,

$k=1$ બધાં જ સમીકરણનું સમાધાન કરે છે.

$\therefore M \in L$ તથા $\overleftrightarrow{PQ}$ ની દિશાનો સદિશ $\vec{m} = (-4, 0, 6)$

અને રેખા L નો સદિશ $\vec{l} = (3, 1, 2)$

$$\vec{l} \cdot \vec{m} = 0$$

$$\therefore \overleftrightarrow{PQ} \perp L$$

$\therefore P$ નું રેખા L માં પ્રતિબિંબ Q છે.

$\therefore$ વિધાન 1 સત્ય છે.

તથા $(7, 1, 0)$ અને $(3, 1, 6)$ ને જોડતાં રેખાખંડને આપેલ રેખા દુભાગે છે.

$\therefore$ વિધાન 2 સત્ય છે.

પરંતુ જો રેખા કોઈ પણ રેખાખંડને કાટખૂણે દુભાગે, તો જ રેખાખંડનાં અંત્યબિંદુઓ એકબીજાનાં પ્રતિબિંબ થાય.

$\therefore$ વિધાન 2 એ વિધાન 1 ની યોગ્ય સમજૂતી માટે પર્યાપ્ત નથી.

જવાબ : (B)

(147) વિધાન 1 : બિંદુ $(4, 3, 1)$ નું સમતલ $x - y + z = 5$ માં પ્રતિબિંબ $(6, 1, 3)$ છે.

વિધાન 2 : $(4, 3, 1)$ અને $(6, 1, 3)$ ને જોડતા રેખાખંડને સમતલ $x - y + z = 5$ દુભાગે છે.

ઉકેલ : $(4, 3, 1)$ નું સમતલ $x - y + z - 5 = 0$ માં પ્રતિબિંબ મેળવવા,

$$\begin{aligned} \frac{x-4}{1} = \frac{y-3}{-1} = \frac{z-1}{1} &= -2 \frac{1(4) - 1(3) + 1(1) - 5}{(1)(1) + (-1)(-1) + (1)(1)} \\ &= -2 \frac{(4 - 3 + 1 - 5)}{3} = 2 \end{aligned}$$

$$\therefore x = 2 + 4 = 6, y = -2 + 3 = 1, z = 2 + 1 = 3$$

$\therefore (4, 3, 1)$ નું પ્રતિબિંબ $(6, 1, 3)$ છે.

$\therefore$ વિધાન 1 સત્ય છે.

વિધાન 1 પરથી પ્રશ્ન જોતાં વિધાન 2 સત્ય છે એમ લાગે. મધ્યબિંદુ $(5, 2, 2)$ એ સમતલ $x - y + z = 5$ પર છે તે વિધાન 2 સત્ય છે. પરંતુ રેખાખંડને સમતલ દુભાગે છે. આ સમતલ લંબદ્વિભાજક સમતલ આપ્યું નથી. તેથી વિધાન 2 એ વિધાન 1 ની યોગ્ય સમજૂતી માટે પર્યાપ્ત નથી.

જવાબ : (B)

(148) ધારો કે $\pi_1 : x - y + z = 1, \pi_2 : x + y - z = -1$ અને $\pi_3 : x - 3y + 3z = 2$ ત્રણ સમતલો છે. L_1 એ π_2 અને π_3, L_2 એ π_3 તથા π_1 ની અને L_3 એ π_1 અને π_2 ની છેદરેખાઓ છે. [IIT : 2008]

વિધાન 1 : L_1, L_2 અને L_3 પૈકી ઓછામાં ઓછી બે રેખાઓ સમાંતર નથી.

વિધાન 2 : ત્રણેય સમતલોને સામાન્ય છેદબિંદુ નથી.

ઉકેલ : $\pi_1 : x - y + z = 1$ નો અભિલંબ $\vec{n}_1 = (1, -1, 1)$

$\pi_2 : x + y - z = -1$ નો અભિલંબ $\vec{n}_2 = (1, 1, -1)$

$\pi_3 : x - 3y + 3z = 2$ નો અભિલંબ $\vec{n}_3 = (1, -3, 3)$

હવે, L_1 ની દિશાનો સદિશ $\vec{l} = \vec{n}_2 \times \vec{n}_3 = (1, 1, -1) \times (1, -3, 3) = (0, -4, -4)$

એટલે કે $\vec{l} = (0, 1, 1)$

L_2 ની દિશાનો સદિશ $\vec{m} = \vec{n}_3 \times \vec{n}_1 = (1, -3, 3) \times (1, -1, 1) = (0, 2, 2)$ એટલે કે $\vec{m} = (0, 1, 1)$

L_3 ની દિશાનો સદિશ $\vec{n} = \vec{n}_1 \times \vec{n}_2 = (1, -1, 1) \times (1, 1, -1) = (0, 2, 2)$ એટલે કે $\vec{n} = (0, 1, 1)$

$\therefore \vec{l} = \vec{m} = \vec{n}$

ત્રણેય રેખાની દિશા સમાન છે.

$L_1 = \pi_2 \cap \pi_3$ માં $\left(-\frac{1}{4}, -\frac{3}{4}, 0\right)$ છે, તે π_1 માં નથી.

$L_2 = \pi_1 \cap \pi_3$ માં $\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 0\right)$ છે, તે π_2 માં નથી.

$L_3 = \pi_1 \cap \pi_2$ માં $(0, -1, 0)$ છે, તે π_3 માં નથી.

$\therefore L_1, L_2, L_3$ ત્રણેય સમાંતર રેખાઓ છે.

$\therefore$ ત્રણેય સમતલોનું સામાન્ય છેદબિંદુ નથી.

$\therefore$ વિધાન 1 : અસત્ય છે અને વિધાન 2 સત્ય છે.

જવાબ : (D)

(149) ધારો કે $3x - 6y - 2z = 15$ અને $2x + y - 2z = 5$ બે સમતલોનાં સમીકરણ છે.

વિધાન 1 : આપેલાં સમતલોની છેદરેખાનાં પ્રચલ સમીકરણ, $x = 3 + 14t, y = 1 + 2t, z = 15t$ છે.

વિધાન 2 : સદિશ $14\hat{i} + 2\hat{j} + 15\hat{k}$ એ આપેલાં સમતલોની છેદરેખાને સમાંતર છે. [IIT : 2007]

ઉકેલ : સમતલો $3x - 6y - 2z = 15$ અને $2x + y - 2z = 5$ ના અભિલંબ અનુક્રમે

$\vec{n}_1 = (3, -6, -2)$ અને $\vec{n}_2 = (2, 1, -2)$ છે

$\therefore$ સમતલોની છેદરેખાની દિશાનો સદિશ $\vec{n} = \vec{n}_1 \times \vec{n}_2 = (3, -6, -2) \times (2, 1, -2) = (14, 2, 15)$

સમતલોના સમીકરણમાં $z = 0$ લેતાં, $3x - 6y = 15, 2x + y = 5$

આથી, $x = 3, y = -1$. સમતલોનું એક છેદબિંદુ $(3, -1, 0)$ છે.

$\therefore$ સમતલોની છેદરેખાનું સમીકરણ $\vec{r} = \vec{a} + t\vec{n}, t \in \mathbb{R}$

$\therefore$ તેનાં પ્રચલ સમીકરણો $x = 3 + 14t, y = -1 + 2t, z = 15t$

$\therefore$ વિધાન 1 : અસત્ય છે.

સદિશ $14\hat{i} + 2\hat{j} + 15\hat{k} = \vec{n}$ એ સમતલોની છેદરેખાને સમાંતર દિશામાં છે.

∴ વિધાન 2 : સત્ય છે.

ટૂંકી રીત : $t = 0$ લેતાં $(3, 1, 0)$ મળે.

તે એક પણ સમતલ પર નથી. આથી, વિધાન 1 અસત્ય છે.

વિકલ્પ (D) જ બાકી રહે છે.

જવાબ : (D)

(150) વિધાન 1 : $(1, 2, 3)$ અને $(2, 3, 5)$ ને જોડતી રેખા એ બિંદુઓ $(-2, 1, -1)$ અને $(1, 4, 5)$ ને જોડતી રેખાને સમાંતર છે.

વિધાન 2 : બે રેખાઓના દિક્ગુણોત્તર a_1, b_1, c_1 અને a_2, b_2, c_2 માટે જો $\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \frac{a_3}{c_3}$, તો તેઓ એકબીજાને સમાંતર અથવા સંપાતી છે.

ઉકેલ : $(1, 2, 3)$ અને $(2, 3, 5)$ માંથી પસાર થતી રેખાના દિક્ગુણોત્તર $1, 1, 2$ છે તથા $(-2, 1, -1)$ અને $(1, 4, 5)$ માંથી

પસાર થતી રેખાના દિક્ગુણોત્તર $3, 3, 6$ છે. અહીં $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2} \Rightarrow \frac{1}{3} = \frac{1}{3} = \frac{2}{6}$ એટલે કે $\frac{1}{3} = \frac{1}{3} = \frac{1}{3}$

તથા બિંદુ $(1, 2, 3)$ એ બીજી રેખા $\frac{x+2}{1} = \frac{y-1}{1} = \frac{z+1}{2}$ પર નથી.

∴ આપેલ રેખાઓ સમાંતર રેખાઓ છે.

∴ વિધાન 1 સત્ય છે.

વિધાન 2 પણ સત્ય છે પરંતુ વિધાન 2 એ વિધાન 1 ની યોગ્ય સમજૂતી માટે પર્યાપ્ત નથી.

રેખાઓ સંપાતી પણ હોઈ શકે.

જવાબ : (B)

(151) વિધાન 1 : બિંદુઓ $(4, 0, 4)$, $(3, 2, 1)$ અને $(2, 4, -2)$ સમરેખ છે.

વિધાન 2 : ભિન્ન બિંદુઓ A, B અને C માટે જો $AB + BC = AC$ તો A, B, C સમરેખ છે.

ઉકેલ : ધારો કે $P(4, 0, 4)$, $Q(3, 2, 1)$, $R(2, 4, -2)$

$$PQ = \sqrt{(3-4)^2 + (2-0)^2 + (1-4)^2} = \sqrt{1+4+9} = \sqrt{14}$$

$$QR = \sqrt{1+4+9} = \sqrt{14}$$

$$PR = \sqrt{4+16+36} = \sqrt{56} = 2\sqrt{14}$$

$$\therefore PQ + QR = PR$$

$$\therefore P - Q - R$$

∴ P, Q, R સમરેખ છે.

∴ વિધાન 1 સત્ય છે.

વિધાન 2 પણ સત્ય છે તથા વિધાન 2 એ વિધાન 1 ની યોગ્ય સમજૂતી માટે પર્યાપ્ત છે. જવાબ : (A)

(152) વિધાન 1 : સમતલો $3x + 2y - z - 4 = 0$ અને $x + y + z - 2 = 0$ ની છેદરેખામાંથી તથા $(2, 1, 2)$ માંથી પસાર થતા સમતલનું સમીકરણ $7x + 4y - 5z - 8 = 0$ છે.

વિધાન 2 : બે સમતલો $\pi_1 = 0$ અને $\pi_2 = 0$ ની છેદરેખાને સમાવતું સમતલ જો $\pi_2 = 0$ ન હોય, તો તેનું સમીકરણ $\pi_1 + \lambda \pi_2 = 0$ થાય, $\lambda \in \mathbb{R}$.

ઉકેલ : $(2, 1, 2)$ એ $x + y + z - 2 = 0$ પર નથી.

સમતલો $3x + 2y - z - 4 = 0$ અને $x + y + z - 2 = 0$ ની છેદરેખામાંથી પસાર થતા સમતલનું સમીકરણ

$$3x + 2y - z - 4 + \lambda (x + y + z - 2) = 0 \text{ છે. } \lambda \in \mathbb{R}.$$

સમતલ (2, 1, 2)માંથી પસાર થાય છે.

$$\therefore 6 + 2 - 2 - 4 + \lambda (2 + 1 + 2 - 2) = 0$$

$$\therefore 2 + 3\lambda = 0. \text{ આથી, } \lambda = \frac{-2}{3}$$

$$\therefore \text{સમતલનું સમીકરણ } 3x + 2y - z - 4 - \frac{2}{3} (x + y + z - 2) = 0$$

$$\therefore 7x + 4y - 5z - 8 = 0$$

$\therefore$ વિધાન 1 સત્ય છે.

વિધાન 2 પણ સત્ય છે તથા વિધાન 2 એ વિધાન 1 ની યોગ્ય સમજૂતી માટે પર્યાપ્ત છે.

જવાબ : (A)

$$(153) \text{ વિધાન 1 : વિષમતલીય રેખાઓ } \vec{n} = (1, 1, 0) + k(2, -1, 1), k \in \mathbb{R} \text{ અને } \frac{x-2}{3} = \frac{y-1}{-5} = \frac{z+1}{2}$$

$$\text{વચ્ચેનું લઘુત્તમ અંતર } \frac{10}{\sqrt{59}} \text{ છે.}$$

વિધાન 2 : જો બે રેખાઓમાંથી એક પણ સમતલ પસાર ન થાય, તો તે બે રેખાઓ વિષમતલીય છે.

$$\text{ઉકેલ : રેખાઓ માટે } \vec{a} = (1, 1, 0), \vec{l} = (2, -1, 1) \text{ અને } \vec{b} = (2, 1, -1), \vec{m} = (3, -5, 2),$$

$$\vec{l} \times \vec{m} = (3, -1, -7). (\vec{b} - \vec{a}) \cdot (\vec{l} \times \vec{m}) \neq 0. \text{ આથી, રેખાઓ વિષમતલીય છે.}$$

$$\begin{aligned} \text{વિષમતલીય રેખાઓ વચ્ચેનું લઘુત્તમ અંતર} &= \frac{|(\vec{b} - \vec{a}) \cdot (\vec{l} \times \vec{m})|}{|\vec{l} \times \vec{m}|} \\ &= \frac{|(1, 0, -1) \cdot (3, -1, -7)|}{\sqrt{9+1+49}} = \frac{10}{\sqrt{59}} \end{aligned}$$

$\therefore$ વિધાન 1 સત્ય છે.

વિધાન 2 પણ સત્ય છે, પરંતુ વિધાન 2 એ વિધાન 1 ની યોગ્ય સમજૂતી માટે પર્યાપ્ત નથી.

જવાબ : (B)

$$(154) \text{ વિધાન 1 : રેખા } \frac{x+3}{13} = \frac{y-3}{-4} = \frac{z-4}{-7} \text{ એ સમતલ } x + 5y - z - 8 = 0 \text{ માં આવેલી છે.}$$

$$\text{વિધાન 2 : જો રેખા } \frac{x-x_1}{l} = \frac{y-y_1}{m} = \frac{z-z_1}{n} \text{ પરનું બિંદુ } (x_1, y_1, z_1) \text{ સમતલ } ax + by + cz + d = 0 \text{ નું}$$

સમાધાન કરે, તો રેખા સમતલમાં આવેલી છે.

$$\text{ઉકેલ : રેખા માટે } \vec{a} = (-3, 3, 4), \vec{l} = (13, -4, -7) \text{ તથા } (-3 + 13k, 3 - 4k, 4 - 7k) \text{ રેખા પરનું કોઈ પણ બિંદુ છે.}$$

$$\text{સમતલનો અભિલંબ } \vec{n} = (1, 5, -1). \text{ વળી } \vec{l} \cdot \vec{n} = 13 - 20 + 7 = 0$$

$$\therefore \vec{l} \perp \vec{n} \text{ તથા રેખા પરના કોઈ પણ બિંદુ માટે } -3 + 13k + 5(3 - 4k) - (4 - 7k) - 8 = 0$$

$\therefore$ રેખા પરના બધા જ બિંદુઓ સમતલમાં આવેલાં છે, તેથી રેખા સમતલમાં આવેલી છે.

$\therefore$ વિધાન 1 સત્ય છે.

વિધાન 2 અસત્ય છે, કારણ કે (x_1, y_1, z_1) એ રેખા અને સમતલનું છેદબિંદુ પણ હોઈ શકે.

જવાબ : (C)

(155) **વિધાન 1 :** રેખાઓ $\frac{x+1}{1} = \frac{y}{-1} = \frac{z-1}{1}$ અને $\frac{x}{3} = \frac{y+1}{2} = \frac{z-2}{1}$ સમતલીય છે અને બંને રેખાઓને સમાવતા સમતલનું સમીકરણ $3x - 2y - 5z + 8 = 0$ છે.

વિધાન 2 : રેખા $\frac{x}{3} = \frac{y+1}{2} = \frac{z-2}{1}$ એ સમતલ $9x + 6y + 3z - 8 = 0$ ને લંબ અને $x - y - z = 0$ ને સમાંતર છે.

ઉકેલ : રેખા $\frac{x+1}{1} = \frac{y}{-1} = \frac{z-1}{1}$ માટે $\vec{a} = (-1, 0, 1)$ અને $\vec{l} = (1, -1, 1)$ તથા રેખા $\frac{x}{3} = \frac{y+1}{2} = \frac{z-2}{1}$

માટે $\vec{b} = (0, -1, 2)$ અને $\vec{m} = (3, 2, 1)$.

$$(\vec{b} - \vec{a}) \cdot (\vec{l} \times \vec{m}) = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$\therefore$ રેખાઓ સમતલીય છે.

તેમને સમાવતા સમતલનું સમીકરણ,

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ l_1 & l_2 & l_3 \\ m_1 & m_2 & m_3 \end{vmatrix} = 0 \text{ છે.}$$

$$\begin{vmatrix} x+1 & y & z-1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$$\therefore -3(x+1) - y(-2) + (z-1)(5) = 0$$

$$\therefore -3x + 2y + 5z - 8 = 0$$

$$\therefore 3x - 2y - 5z + 8 = 0 \text{ તેમને સમાવતા સમતલનું સમીકરણ છે.}$$

$$\therefore \text{વિધાન 1 સત્ય છે.}$$

રેખા $\frac{x}{3} = \frac{y+1}{2} = \frac{z-2}{1}$ માટે $\vec{l} = (3, 2, 1)$ અને સમતલ $9x + 6y + 3z - 8 = 0$ માટે

$$\vec{n} = (9, 6, 3)$$

હવે, $\vec{l} \times \vec{n} = \vec{0}$. આથી, રેખા સમતલ $9x + 6y + 3z - 8 = 0$ ને લંબ છે.

સમતલ $x - y - z = 0$ માટે $\vec{n}_1 = (1, -1, -1)$

$$\vec{l} \cdot \vec{n}_1 = 3(1) + 2(-1) + 1(-1) = 0$$

$$\vec{l} \perp \vec{n}_1$$

વળી, રેખા પરનું બિંદુ $(0, -1, 2)$ એ સમતલ $x - y - z = 0$ પર નથી.

$$\therefore \text{રેખા સમતલ } x - y - z = 0 \text{ ને સમાંતર છે.}$$

વિધાન 2 સત્ય છે પરંતુ વિધાન 2 એ વિધાન 1 ની યોગ્ય સમજૂતી માટે પર્યાપ્ત નથી. **જવાબ : (B)**

(156) **વિધાન 1 :** સમતલો $2x - y + z - 3 = 0$ અને $3x + y + z = 5$ ની છેદરેખામાંથી સમતલ $5x + 2z - 8 = 0$ પસાર થાય છે અને સમતલ $2x - 2y - 5z - 9 = 0$ ને લંબ છે.

વિધાન 2 : સમતલ $x + y + 3z = 5$ એ રેખા $x - 1 = y + 1 = z - 1$ ને $(1, 1, 1)$ માં છેદે છે.

ઉકેલ : સમતલો $2x - y + z - 3 = 0$ અને $3x + y + z = 5$ ની છેદરેખામાંથી પસાર થતા સમતલનું સમીકરણ $2x - y + z - 3 + \lambda (3x + y + z - 5) = 0, \lambda \in \mathbb{R}$.

$\lambda = 1$ લેતાં, સમતલનું સમીકરણ $5x + 2z - 8 = 0$ થશે.

સમતલ $5x + 2z - 8 = 0$ નો અભિલંબ $\vec{n}_1 = (5, 0, 2)$ અને સમતલ $2x - 2y - 5z - 9 = 0$ નો અભિલંબ $\vec{n}_2 = (2, -2, -5)$

હવે, $\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2 = 5(2) + 0(-2) + 2(-5) = 0$

$\therefore$ સમતલ $5x + 2z - 8 = 0$ એ સમતલ $2x - 2y - 5z - 9 = 0$ ને લંબ છે.

$\therefore$ વિધાન 1 સત્ય છે.

રેખા $x - 1 = y + 1 = z - 1$ પર બિંદુ $(1, 1, 1)$ આવેલું નથી. તેથી સમતલ રેખાને $(1, 1, 1)$ માં છેદશે નહિ.

$\therefore$ વિધાન 2 અસત્ય છે.

જવાબ : (C)

(157) ધારો કે $L_1 : \frac{x+2}{1} = \frac{y+1}{2} = \frac{z+1}{3}$ અને $L_2 : \frac{x+2}{2} = \frac{y-3}{3} = \frac{z-2}{1}$ બે રેખાઓનાં સમીકરણ છે.

વિધાન 1 : $(-2, -1, -1)$ માંથી પસાર થતા અને જેનો અભિલંબ રેખાઓ L_1 અને L_2 બંનેને લંબ હોય તેવા

સમતલનું $(1, 1, 1)$ થી લંબઅંતર $\frac{13}{5\sqrt{3}}$ છે.

વિધાન 2 : રેખાઓ L_1 અને L_2 બંનેને લંબ હોય તેવો એકમ સદિશ $\frac{7\hat{i} - 5\hat{j} - \hat{k}}{5\sqrt{3}}$ છે.

ઉકેલ : રેખાઓની દિશાના સદિશ $\vec{l} = (1, 2, 3)$ અને $\vec{m} = (2, 3, 1)$,

$\vec{l}$ અને $\vec{m}$ બંનેને લંબ સદિશ $= \pm(\vec{l} \times \vec{m}) = \pm [(1, 2, 3) \times (2, 3, 1)] = \pm (-7, 5, -1)$

સમતલનો અભિલંબ $= -7\hat{i} + 5\hat{j} - \hat{k}$

$\therefore (-2, -1, -1)$ માંથી પસાર થતા આ અભિલંબવાળા સમતલનું સમીકરણ

$$-7(x + 2) + 5(y + 1) - 1(z + 1) = 0$$

$\therefore -7x + 5y - z - 10 = 0$ અથવા $7x - 5y + z + 10 = 0$

આ સમતલનું $(1, 1, 1)$ થી અંતર $= \frac{|7(1) - 5(1) + 1(1) + 10|}{\sqrt{49 + 25 + 1}} = \frac{13}{5\sqrt{3}}$

$\therefore$ વિધાન 1 સત્ય છે.

$$\text{રેખાઓ } L_1 \text{ અને } L_2 \text{ ને લંબ એકમ સદિશ} = \pm \frac{\vec{l} \times \vec{m}}{|\vec{l} \times \vec{m}|}$$

$$= \pm \frac{(-7\hat{i} + 5\hat{j} - \hat{k})}{5\sqrt{3}}$$

$$= \frac{-7\hat{i} + 5\hat{j} - \hat{k}}{5\sqrt{3}} \text{ અથવા } \frac{7\hat{i} - 5\hat{j} + \hat{k}}{5\sqrt{3}}$$

∴ વિધાન 2 અસત્ય છે.

જવાબ : (C)

જોડકાં જોડવાના પ્રશ્નો

(158) વિભાગ I નાં વિધાનોને વિભાગ II ની યોગ્ય વિગત સાથે જોડો :

વિભાગ I	વિભાગ II
(P) રેખાઓ $x = 1 + k, y = 1 + \lambda k, z = -3 - \lambda k, k \in \mathbb{R}$ અને $\{(t/2, 2 - t, 1 + t) / t \in \mathbb{R}\}$ સમતલીય હોય, તો λ નું મૂલ્ય,	(1) 1
(Q) (3, 3, 2), (0, 4, 3), (6, 4, 1), (6, 2, 3) શિરોબિંદુવાળા ચતુષ્કલકનું ધનફળ	(2) 2
(R) બિંદુ $(-5, -3, -4)$ નું સમતલ $x + y + z = -3$ માં પ્રતિબિંબ (x_1, y_1, z_1) હોય, તો y_1 નું મૂલ્ય	(3) -2
(S) બિંદુ (5, 8, 15)નું રેખા $x = 6 + 3k, y = 7 + 2k, z = 7 - 2k, k \in \mathbb{R}$ ને સાપેક્ષ પ્રતિબિંબ (x_1, y_1, z_1) હોય, તો x_1 નું મૂલ્ય	(4) 3

- (A) (P) → (3) (Q) → (2) (R) → (1) (S) → (4)
 (B) (P) → (3) (Q) → (1) (R) → (4) (S) → (2)
 (C) (P) → (3) (Q) → (2) (R) → (4) (S) → (1)
 (D) (P) → (1) (Q) → (2) (R) → (4) (S) → (3)

ઉકેલ : (P) રેખાઓ માટે $\vec{a} = (1, 1, -3), \vec{l} = (1, \lambda, -\lambda)$

$$\text{અને } \vec{b} = (0, 2, 1), \vec{m} = \left(\frac{1}{2}, -1, 1\right).$$

રેખાઓ સમતલીય છે.

$$\therefore \begin{vmatrix} -1 & 1 & 4 \\ 1 & \lambda & -\lambda \\ \frac{1}{2} & -1 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$$\therefore -1(\lambda - \lambda) - 1 \left(1 + \frac{\lambda}{2}\right) + 4 \left(-1 - \frac{\lambda}{2}\right) = 0$$

$$\therefore -1 - \frac{\lambda}{2} - 4 - \frac{4\lambda}{2} = 0$$

$$\therefore -5 = \frac{5\lambda}{2}$$

$$\therefore \lambda = -2$$

$$(P) \rightarrow (3)$$

(Q) ચતુષ્લક V - ABC ની શિરોબિંદુઓ V(3, 3, 2), A(0, 4, 3), B(6, 4, 1) C(6, 2, 3) લેતાં, તેની ધારો

$$\overrightarrow{\mathbf{VA}} = (-3, 1, 1), \overrightarrow{\mathbf{VB}} = (3, 1, -1), \overrightarrow{\mathbf{VC}} = (3, -1, 1)$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} -3 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & -1 \\ 3 & -1 & 1 \end{vmatrix} = -3(1 - 1) - 1(3 + 3) + 1(-3 - 3) = -12$$

$$\text{ચતુષ્લકનું ઘનફળ} = \frac{1}{6} |\Delta| = 2$$

$$(Q) \rightarrow (2)$$

(R) $(-5, -3, -4)$ માંથી સમતલ $x + y + z = -3$ ને લંબરેખાનું સમીકરણ $\frac{x+5}{1} = \frac{y+3}{1} = \frac{z+4}{1}$

$(-5, -3, -4)$ નું સમતલમાં પ્રતિબિંબ (x_1, y_1, z_1) લેતાં,

$$\frac{x_1+5}{1} = \frac{y_1+3}{1} = \frac{z_1+4}{1} = \frac{-2(1(-5)+1(-3)+1(-4)+3)}{1(1)+1(1)+1(1)} = 6$$

$$\therefore x_1 = 1, y_1 = 3, z_1 = 2$$

$$\therefore y_1 = 3$$

$$(R) \rightarrow (4)$$

(S) ધારો કે બિંદુ P(5, 8, 15)થી રેખા પરનો લંબપાદ M(6 + 3k, 7 + 2k, 7 - 2k) છે.

$$\therefore \overrightarrow{\mathbf{PM}} \perp \vec{l} \text{ જ્યાં } \vec{l} = (3, 2, -2)$$

$$\therefore (3k + 1, 2k - 1, -2k - 8) \cdot (3, 2, -2) = 0$$

$$\therefore 9k + 3 + 4k - 2 + 4k + 16 = 0$$

$$\therefore k = -1$$

$$\therefore \text{લંબપાદ M (3, 5, 9)}$$

ધારો કે P નું પ્રતિબિંબ Q(x_1, y_1, z_1) છે. આથી, M એ $\overline{PQ}$ નું મધ્યબિંદુ થશે.

$$\therefore 3 = \frac{x_1+5}{2}, 5 = \frac{y_1+8}{2}, 9 = \frac{z_1+15}{2}$$

$$\therefore x_1 = 1, y_1 = 2, z_1 = 3. \text{ આથી, } x_1 = 1$$

$$\therefore (S) \rightarrow (1)$$

ટૂંકી રીત : S માં તમામ વિકલ્પો ભિન્ન છે. માટે માત્ર S ગણતા (S) $\rightarrow$ (1), જે વિકલ્પ (C) છે.

જવાબ : (C)

વિભાગ I	વિભાગ II
(1) રેખાઓ $2x = 3y = -z$ અને $6x = -y = -4z$ વચ્ચેના ખૂણાનું માપ	(P) 0
(2) સમતલો $x - y + 2z + 8 = 0$ અને $2x + y + z - 5 = 0$ વચ્ચેના ખૂણાનું માપ	(Q) $\frac{\pi}{6}$
(3) રેખા $\frac{x}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z}{4}$ અને સમતલ $3x + 2y - 3z = 4$ વચ્ચેના ખૂણાનું માપ	(R) $\frac{\pi}{2}$
(4) સમતલો $2x + 3y + z - 11 = 0$ અને $x + y - z - 8 = 0$ ની છેદરેખા અને સમતલ $x - 4y - 3z + 9 = 0$ વચ્ચેના ખૂણાનું માપ	(S) $\frac{\pi}{3}$

- (A) (1) $\rightarrow$ (R) (2) $\rightarrow$ (Q) (3) $\rightarrow$ (P) (4) $\rightarrow$ (S)
 (B) (1) $\rightarrow$ (R) (2) $\rightarrow$ (S) (3) $\rightarrow$ (P) (4) $\rightarrow$ (Q)
 (C) (1) $\rightarrow$ (R) (2) $\rightarrow$ (P) (3) $\rightarrow$ (Q) (4) $\rightarrow$ (S)
 (D) (1) $\rightarrow$ (R) (2) $\rightarrow$ (S) (3) $\rightarrow$ (Q) (4) $\rightarrow$ (P)

ઉકેલ : (1) રેખા $2x = 3y = -z$ અને $6x = -y = -4z$ માટે $\frac{x}{3} = \frac{y}{2} = \frac{z}{-6}$ અને $\frac{x}{2} = \frac{y}{-12} = \frac{z}{-3}$

$$\therefore \vec{l} = (3, 2, -6) \text{ અને } \vec{m} = (2, -12, -3)$$

$$\text{રેખાઓ વચ્ચેના ખૂણાનું માપ } \theta \text{ હોય, તો } \cos\theta = \frac{|(3, 2, -6) \cdot (2, -12, -3)|}{\sqrt{9+4+36} \sqrt{4+144+9}} = 0$$

$$\therefore \theta = \frac{\pi}{2}$$

$$\therefore (1) \rightarrow (R)$$

$$(2) \text{ અભિલંબ } \vec{n}_1 = (1, -1, 2), \vec{n}_2 = (2, 1, 1)$$

$$\text{સમતલો વચ્ચેના ખૂણાનું માપ } \theta \text{ હોય, તો } \cos\theta = \frac{|(1, -1, 2) \cdot (2, 1, 1)|}{\sqrt{1+1+4} \sqrt{4+1+1}} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

$$\therefore \theta = \frac{\pi}{3}$$

$$\therefore (2) \rightarrow (S)$$

$$(3) \vec{l} = (2, 3, 4) \quad \vec{n} = (3, 2, -3)$$

$$\text{રેખા અને સમતલ વચ્ચેના ખૂણાનું માપ } \theta \text{ હોય, તો } \sin\theta = \frac{|(2, 3, 4) \cdot (3, 2, -3)|}{\sqrt{4+9+16} \sqrt{9+4+9}} = 0$$

$$\therefore \theta = 0$$

$$\therefore (3) \rightarrow (P)$$

(4) આપેલા સમતલોની છેદરેખાની દિશાનો સદિશ, $\vec{l} = \vec{n}_1 \times \vec{n}_2 = (2, 3, 1) \times (1, 1, -1) = (-4, 3, -1)$

સમતલ $x - 4y - 3z + 9 = 0$ નો અભિલંબ, $\vec{n} = (1, -4, -3)$

રેખા અને સમતલ વચ્ચેના ખૂણાનું માપ θ હોય, તો $\sin\theta = \frac{|(-4, 3, -1) \cdot (1, -4, -3)|}{\sqrt{16+9+1}\sqrt{1+16+9}} = \frac{13}{26} = \frac{1}{2}$

$$\therefore \theta = \frac{\pi}{6}$$

$\therefore (4) \rightarrow (Q)$

જવાબ : (B)

ટૂંકી રીત :

(1) ના બધા જ વિકલ્પ R છે. આથી (1) નહિ ગણીએ.

(2) વિકલ્પ S મળ્યો.

હવે (B) કે (D) જ જવાબ હોઈ શકે.

(3) $\rightarrow$ (P).

હવે માત્ર વિકલ્પ (B) જ શેષ છે.

(4) ગણવાની જરૂર નથી.

જવાબ : (B)

(160) ધારો કે $ax + by + cz = 0$, $bx + cy + az = 0$ અને $cx + ay + bz = 0$ ત્રણ સુરેખ સમીકરણો આપેલાં છે. સ્તંભ I ની અભિવ્યક્તિઓને સ્તંભ II નાં યોગ્ય વિધાનો સાથે જોડી, જોડકાં બનાવો. [IIT : 2007]

સ્તંભ I	સ્તંભ II
(A) $a + b + c \neq 0$ અને $a^2 + b^2 + c^2 = ab + bc + ca$	(P) સમીકરણો ફક્ત એક જ બિંદુએ છેદતાં સમતલો દર્શાવે છે.
(B) $a + b + c = 0$ અને $a^2 \neq bc, b^2 \neq ca, c^2 \neq ab$	(Q) સમીકરણો, રેખા $x = y = z$ દર્શાવે છે.
(C) $a + b + c \neq 0$ અને $a^2 \neq bc, b^2 \neq ca, c^2 \neq ab$	(R) સમીકરણો એકરૂપ સમતલો દર્શાવે છે.
(D) $a + b + c = 0$ અને $a^2 + b^2 + c^2 = ab + bc + ca$	(S) સમીકરણો ત્રિ-પરિમાણ અવકાશનું નિરૂપણ કરે છે.

યોગ્ય જોડકાં બનાવી નીચેના યોગ્ય ખાનાનાં વર્તુળ ઘટ્ટ કરો :

	P	Q	R	S
A	☐	☐	☐	☐
B	☐	☐	☐	☐
C	☐	☐	☐	☐
D	☐	☐	☐	☐

$$\text{ઉકેલ : } ax + by + cz = 0 \quad (1)$$

$$bx + cy + az = 0 \quad (2)$$

$$cx + ay + bz = 0 \quad (3)$$

$$\begin{aligned} \therefore \text{નિશ્ચાયક } D &= \begin{vmatrix} a & b & c \\ b & c & a \\ c & a & b \end{vmatrix} \\ &= a(bc - a^2) - b(b^2 - ac) + c(ab - c^2) \\ &= 3abc - a^3 - b^3 - c^3 \\ &= -(a + b + c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca) \\ &= -\frac{1}{2} (a + b + c) [(a - b)^2 + (b - c)^2 + (c - a)^2] \end{aligned}$$

$$(A) \quad a + b + c \neq 0 \text{ અને } a^2 + b^2 + c^2 = ab + bc + ca$$

$$\therefore (a - b)^2 + (b - c)^2 + (c - a)^2 = 0$$

$$\therefore a = b = c \text{ તથા } a + b + c \neq 0$$

$$\therefore a, b, c \text{ શૂન્યેતર સમાન છે.}$$

તેથી બધાં જ સમીકરણોનું સ્વરૂપ $x + y + z = 0$ થશે.

$$\therefore \text{સમીકરણો એકરૂપ સમતલો દર્શાવે છે.}$$

$$\therefore (A) \rightarrow (R)$$

$$(B) \quad a + b + c = 0 \text{ અને } a^2 \neq bc, b^2 \neq ca, c^2 \neq ab$$

$$\text{સમીકરણ (1)માં } a = -(b + c) \text{ લેતાં}$$

$$by + cz = (b + c)x \quad (4)$$

$$\text{અને સમીકરણ (2)માં } b = -(a + c) \text{ લેતાં}$$

$$cy + az = (c + a)x \quad (5)$$

$$\text{સમીકરણ (4) અને (5)માં } y \text{ નો લોપ કરતાં,}$$

$$(c^2 - ab)z = (c^2 - ab)x$$

$$\therefore z = x$$

$$\text{તે જ પ્રમાણે } x = y = z$$

$$\therefore \text{આપેલાં સમીકરણો રેખા } x = y = z \text{ દર્શાવે છે.}$$

$$\therefore (B) \rightarrow (Q)$$

$$(C) \quad a + b + c \neq 0 \text{ અને } a^2 + b^2 + c^2 \neq ab + bc + ca$$

$$\therefore D \neq 0$$

$$\therefore \text{સમીકરણોનો અનન્ય ઉકેલ } x = 0, y = 0, z = 0 \text{ છે.}$$

$$\therefore \text{ત્રણ સમીકરણો દ્વારા દર્શાવાતાં ત્રણ સમતલો એક જ બિંદુ ઊગમબિંદુમાં છેદે છે.}$$

$$\therefore (C) \rightarrow (P)$$

(D) $a + b + c = 0$ અને $a^2 + b^2 + c^2 = ab + bc + ca$

$\therefore a + b + c = 0$ અને $a = b = c$

...[(A) પરથી]

$\therefore a = b = c = 0$

$\therefore$ સમીકરણો ત્રિ-પરિમાણ અવકાશનું નિરૂપણ કરે છે.

$\therefore (D) \rightarrow (S)$

જવાબ :

	P	Q	R	S
A				
B				
C				
D				

(161) વિભાગ I માં રેખાઓનાં સમીકરણ આપ્યાં છે જ્યારે વિભાગ II માં રેખાઓના પ્રકાર આપ્યા છે. વિભાગ I ની રેખાઓને વિભાગ II ના તેમના યોગ્ય પ્રકાર સાથે જોડો.

વિભાગ I	વિભાગ II
(1) $\frac{x-3}{3} = \frac{y-8}{-1} = \frac{z-3}{1}$ અને $\frac{x+3}{-3} = \frac{y+7}{2} = \frac{z-6}{4}$	(p) સમાંતર
(2) $\frac{x-4}{5} = \frac{y-1}{2} = \frac{z}{1}$ અને $\frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{3} = \frac{z-3}{4}$	(q) વિષમતલીય
(3) $\frac{x}{1} = \frac{2y-4}{1} = \frac{3-z}{3}$ અને $\{2k-1, k+1, -6k+1 / k \in \mathbb{R}\}$	(r) સંપાતી
(4) $x = -k, y = -4 - 2k, z = 4 + k, k \in \mathbb{R}$ અને $\vec{r} = (1, -2, 3) + k(-1, -2, 1), k \in \mathbb{R}$	(s) છેદક

(A) (1) $\rightarrow$ (q) (2) $\rightarrow$ (s) (3) $\rightarrow$ (r) (4) $\rightarrow$ (p)

(B) (1) $\rightarrow$ (q) (2) $\rightarrow$ (r) (3) $\rightarrow$ (p) (4) $\rightarrow$ (s)

(C) (1) $\rightarrow$ (q) (2) $\rightarrow$ (p) (3) $\rightarrow$ (r) (4) $\rightarrow$ (s)

(D) (1) $\rightarrow$ (q) (2) $\rightarrow$ (s) (3) $\rightarrow$ (p) (4) $\rightarrow$ (r)

ઉકેલ : (1) $\vec{a} = (3, 8, 3), \vec{l} = (3, -1, 1)$

$\vec{b} = (-3, -7, 6), \vec{m} = (-3, 2, 4)$

હવે, $\vec{l} \times \vec{m} = (-6, -15, 3) \neq \vec{0}$

તથા $(\vec{b} - \vec{a}) \cdot (\vec{l} \times \vec{m}) = (-6, -15, 3) \cdot (-6, -15, 3) = 36 + 225 + 9 = 270 \neq 0$

$\therefore$ આપેલ રેખાઓ વિષમતલીય છે.

∴ (1) → (q)

$$(2) \vec{a} = (4, 1, 0), \vec{l} = (5, 2, 1)$$

$$\vec{b} = (1, 2, 3), \vec{m} = (2, 3, 4)$$

$$\text{હવે, } \vec{l} \times \vec{m} = (5, -18, 11) \neq \vec{0}$$

$$\text{તથા } (\vec{b} - \vec{a}) \cdot (\vec{l} \times \vec{m}) = (-3, 1, 3) \cdot (5, -18, 11) = -15 - 18 + 33 = 0$$

∴ આપેલ રેખાઓ છેદક રેખાઓ છે.

$$(\vec{l} \times \vec{m} \neq \vec{0})$$

∴ (2) → (s)

$$(3) \vec{a} = (0, 2, 3), \vec{l} = \left(1, \frac{1}{2}, -3\right)$$

$$\vec{b} = (-1, 1, 1), \vec{m} = (2, 1, -6)$$

$$\text{હવે, } \vec{l} \times \vec{m} = (0, 0, 0) = \vec{0}$$

$$\text{તથા } (\vec{b} - \vec{a}) \times \vec{m} = (-1, -1, -2) \times (2, 1, -6) = (8, -10, 1) \neq \vec{0}$$

∴ આપેલ રેખાઓ સમાંતર છે.

∴ (3) → (p)

$$(4) \vec{a} = (0, -4, 4), \vec{l} = (-1, -2, 1)$$

$$\vec{b} = (1, -2, 3), \vec{m} = (-1, -2, 1)$$

$$\text{હવે, } \vec{l} \times \vec{m} = \vec{0}$$

$$(\vec{l} = \vec{m})$$

$$\text{તથા } (\vec{b} - \vec{a}) \times \vec{l} = (1, 2, -1) \times (-1, -2, 1) = -(1, 2, -1) \times (1, 2, -1) = \vec{0}$$

∴ આપેલ રેખાઓ સંપાતી રેખાઓ છે.

∴ (4) → (r)

જવાબ : (D)

ટૂંકી રીત :

(1) ના તમામ વિકલ્પ સમાન હોવાથી આપણે (1) નહિ ગણીએ.

(2) → (s)

(3) → (p)

હવે માત્ર વિકલ્પ (D) જ શેષ રહે છે.

(4) ગણવાની જરૂર નથી.

જવાબ : (D)

હજી ટૂંકી રીત :

સૌપ્રથમ (4) ગણીએ તો (4) → (r)

એક જ વિકલ્પ (D) છે.

જવાબ : (D)

વિભાગ I	વિભાગ II
(P) સમતલ $x + 2y + 2z = 0$ ને લંબ અને $(0, 1, 0)$ માંથી પસાર થતી રેખાનું ઊગમબિંદુથી લંબઅંતર	(1) $2\sqrt{2}$
(Q) $(1, -2, 1)$ માંથી પસાર થતા અને $2x - 2y + z = 0$ તથા $x - y + 2z = 4$ બંનેને લંબ સમતલનું બિંદુ $(1, 2, 2)$ થી અંતર	(2) $\frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{26}}$
(R) સમતલો $2x + 3y - z - 4 = 0$ અને $x + y + z - 2 = 0$ ની છેદરેખાનું રેખા $\frac{x}{4} = \frac{y-1}{-3} = \frac{z-1}{-1}$ થી લંબઅંતર	(3) $\sqrt{29}$
(S) સમતલો $2x + 3y - 4z + 44 = 0$ અને $2x + 3y - 4z + 15 = 0$ વચ્ચેનું લંબ અંતર	(4) $\frac{\sqrt{5}}{3}$

- (A) (P) $\rightarrow$ (4) (Q) $\rightarrow$ (1) (R) $\rightarrow$ (2) (S) $\rightarrow$ (3)
 (B) (P) $\rightarrow$ (4) (Q) $\rightarrow$ (1) (R) $\rightarrow$ (3) (S) $\rightarrow$ (2)
 (C) (P) $\rightarrow$ (4) (Q) $\rightarrow$ (2) (R) $\rightarrow$ (3) (S) $\rightarrow$ (1)
 (D) (P) $\rightarrow$ (4) (Q) $\rightarrow$ (2) (R) $\rightarrow$ (1) (S) $\rightarrow$ (3)

ઉકેલ : (P) રેખા સમતલ $x + 2y + 2z = 0$ ને લંબ છે.

તેથી $\vec{l} = \vec{n} = (1, 2, 2)$ અને તે $\vec{a} = (0, 1, 0)$ માંથી પસાર થાય છે.

$\therefore$ રેખાનું સમીકરણ : $\frac{x}{1} = \frac{y-1}{2} = \frac{z}{2}$.

$$\text{બિંદુ } P(\vec{p}) = (0, 0, 0) \text{ થી રેખાનું લંબ અંતર} = \frac{|\vec{p} - \vec{a} \times \vec{l}|}{|\vec{l}|}$$

$$= \frac{|(0, -1, 0) \times (1, 2, 2)|}{\sqrt{1+4+4}} = \frac{|(-2, 0, 1)|}{3} = \frac{\sqrt{5}}{3}$$

$\therefore$ (P) $\rightarrow$ (4)

(Q) સમતલ $2x - 2y + z = 0$ નો અભિલંબ $\vec{n}_1 = (2, -2, 1)$ અને સમતલ $x - y + 2z = 4$ નો અભિલંબ $\vec{n}_2 = (1, -1, 2)$.

$$\text{બંને સમતલોને લંબ સમતલનો અભિલંબ } \vec{n} = \vec{n}_1 \times \vec{n}_2$$

$$= (-3, -3, 0)$$

સમતલનું સમીકરણ $-3(x-1) -3(y+2) = 0$ એટલે કે $x + y + 1 = 0$

∴ $x + y + 1 = 0$ નું બિંદુ $(1, 2, 2)$ થી લંબઅંતર

$$= \frac{|1(1) + 2(1) + 1|}{\sqrt{1+1}} = \frac{4}{\sqrt{2}} = 2\sqrt{2}$$

∴ (Q) $\rightarrow$ (1)

(R) સમતલો $2x + 3y - z - 4 = 0$ અને $x + y + z - 2 = 0$ ની છેદરેખાની દિશાનો સદિશ

$$\begin{aligned}\vec{l} &= \vec{n}_1 \times \vec{n}_2 \\ &= (2, 3, -1) \times (1, 1, 1) \\ &= (4, -3, -1)\end{aligned}$$

સમતલોના સમીકરણમાં $z = 0$ લેતાં,

$$2x + 3y = 4 \text{ અને } x + y = 2$$

$$\text{સમીકરણો ઉકેલતાં } x = 2, y = 0$$

∴ છેદરેખા $\vec{a} = (2, 0, 0)$ માંથી પસાર થાય છે.

∴ છેદરેખા $\frac{x-2}{4} = \frac{y}{-3} = \frac{z}{-1}$ એ આપેલ રેખાને સમાંતર છે. (શા માટે સંપાતી નથી ?)

$$\text{હવે રેખા } \frac{x}{4} = \frac{y-1}{-3} = \frac{z-1}{-1} \text{ માટે } \vec{b} = (0, 1, 1) \text{ અને } \vec{m} = (4, -3, -1)$$

$$\therefore \text{ આ રેખાઓ વચ્ચેનું લંબ અંતર } = \frac{|\vec{(b-a)} \times \vec{l}|}{|\vec{l}|}$$

$$= \frac{|(-2, 1, 1) \times (4, -3, -1)|}{\sqrt{16+9+1}} = \frac{|(2, 2, 2)|}{\sqrt{26}} = \frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{26}}$$

∴ (R) $\rightarrow$ (2)

$$(S) \text{ સમતલો } 2x + 3y - 4z + 44 = 0 \text{ અને } 2x + 3y - 4z + 15 = 0 \text{ વચ્ચેનું લંબઅંતર } = \frac{|d_1 - d_2|}{|\vec{n}|}$$

$$= \frac{|44 - 15|}{\sqrt{4+9+16}} = \frac{29}{\sqrt{29}} = \sqrt{29}$$

∴ (S) $\rightarrow$ (3)

જવાબ : (A)

ટૂંકી રીત :

(P) ના તમામ વિકલ્પ સમાન છે. આપણે તે નહીં ગણીએ.

(S) ની ગણતરી અતિ સરળ છે, તે ગણતાં

(S) $\rightarrow$ (3)

હવે બે જ પ્રશ્ન (Q) તથા (R) નિર્ણાયક છે, (Q) સરળ છે, તે ગણતાં,

આ માત્ર વિકલ્પ (A) માં જ શક્ય છે.

જવાબ : (A)

માહિતી આધારિત પ્રશ્નો

(163) ધારો કે સમતલનાં બે બિંદુઓ $A(2, 3, -2)$ અને $B(-3, 13, 13)$ છે અને રેખા L એ A માંથી પસાર થાય છે તથા સમતલ π બિંદુ B માંથી પસાર થાય છે. આ માહિતી પરથી નીચેના પ્રશ્નોના જવાબ આપો :

(1) $\overline{AB}$ ને લંબરેખા L નું સમીકરણ

(A) $\frac{x-2}{-5} = \frac{y-3}{10} = \frac{z+2}{15}$

(B) $\frac{x-2}{13} = \frac{y-3}{2} = \frac{z+2}{3}$

(C) $\frac{x+2}{13} = \frac{y+3}{2} = \frac{z-2}{3}$

(D) $\frac{x-2}{15} = \frac{y-3}{-5} = \frac{z+2}{10}$

(2) $\overline{AB}$ ને લંબસમતલ π નું સમીકરણ

(A) $-5x + 10y + 15z + 10 = 0$

(B) $x + 2y - 3z + 16 = 0$

(C) $x - 2y - 3z + 68 = 0$

(D) $x - 2y - 3z - 68 = 0$

ઉકેલ (1) $\overleftrightarrow{AB}$ ના દિક્ષુણોત્તર $-5, 10, 15$ એટલે કે $-1, 2, 3$ છે.

$\therefore \overleftrightarrow{AB}$ ને લંબરેખા L ની દિશાનો સદિશ $\vec{l} = l_1 \hat{i} + l_2 \hat{j} + l_3 \hat{k}$ હોય,

તો રેખા L નું સમીકરણ : $\frac{x-2}{l_1} = \frac{y-3}{l_2} = \frac{z+2}{l_3}$ થશે. $\overleftrightarrow{AB} \perp L$

$\therefore -l_1 + 2l_2 + 3l_3 = 0$

વિકલ્પ (B) આ સમીકરણનું સમાધાન કરે છે.

(વિકલ્પ (C) વાળી રેખા પણ આ સમીકરણનું સમાધાન કરે છે, પરંતુ તે A માંથી પસાર થતી નથી.)

જવાબ : (B)

(2) $\overleftrightarrow{AB}$ ના દિક્ષુણોત્તર $-1, 2, 3$ છે.

$\therefore \overleftrightarrow{AB}$ ને લંબસમતલ π નો અભિલંબ $\vec{n} = (-1, 2, 3)$

$\therefore$ સમતલ π નું સમીકરણ $-1(x + 3) + 2(y - 13) + 3(z - 13) = 0$

$\therefore -x + 2y + 3z - 68 = 0$

$\therefore x - 2y - 3z + 68 = 0$

(વિકલ્પ (A)ના સમતલનો અભિલંબ પણ $(-1, 2, 3)$ છે, પરંતુ તે (B)માંથી પસાર થતો નથી.)

જવાબ : (C)

(164) ધારો કે બે રેખાઓ $L : \frac{x-5}{2} = \frac{y-3}{-4} = \frac{z-3}{3}$ અને $M : \frac{x-2}{4} = \frac{y-5}{-8} = \frac{z}{6}$ છે. તે પરથી નીચેના પ્રશ્નોના જવાબ આપો :

(1) L અને M વચ્ચેનું લંબઅંતર

(A) $\frac{109}{29}$

(B) $\sqrt{\frac{109}{29}}$

(C) $\frac{\sqrt{109}}{29}$

(D) $\frac{109}{\sqrt{29}}$

(2) L અને M માંથી પસાર થતા સમતલનું સમીકરણ

(A) $6x - 3y - 8z + 3 = 0$

(B) $6x - 3y - 8z - 3 = 0$

(C) $8x + 3y - 6z - 31 = 0$

(D) $8x - 3y - 6z - 13 = 0$

(3) રેખા L અને રેખા M માંથી પસાર થતા સમતલનું બિંદુ $(1, -1, 1)$ થી અંતર

(A) $\frac{4}{109}$

(B) $\frac{2}{\sqrt{109}}$

(C) $\frac{4}{\sqrt{109}}$

(D) $\frac{2}{109}$

ઉકેલ (1) રેખા L માટે $\vec{a} = (5, 3, 3)$, $\vec{l} = (2, -4, 3)$

અને રેખા M માટે $\vec{b} = (2, 5, 0)$, $\vec{m} = (4, -8, 6)$ અથવા $(2, -4, 3)$

અહીં, $\vec{l} \times \vec{m} = \vec{0}$. વળી, $(5, 3, 3)$ માટે $\frac{5-2}{4} = \frac{3-5}{-8} = \frac{3}{6}$ સત્ય નથી.

$\therefore$ રેખા L નું બિંદુ $(5, 3, 3) \notin M$

$\therefore L \parallel M$

$$\begin{aligned} \text{બે સમાંતર રેખાઓ વચ્ચેનું લંબઅંતર} &= \frac{|\vec{(a-b)} \times \vec{l}|}{|\vec{l}|} \\ &= \frac{|(3, -2, 3) \times (2, -4, 3)|}{\sqrt{4+16+9}} = \frac{|(6, -3, -8)|}{\sqrt{29}} = \sqrt{\frac{109}{29}} \quad \text{જવાબ : (B)} \end{aligned}$$

(2) રેખા L અને રેખા M માંથી પસાર થતા સમતલનું સમીકરણ $(\vec{r} - \vec{a}) \cdot [(\vec{b} - \vec{a}) \times \vec{l}] = 0$

$$\begin{vmatrix} x-5 & y-3 & z-3 \\ 2-5 & 5-3 & 0-3 \\ 2 & -4 & 3 \end{vmatrix} = 0$$

$$\therefore \begin{vmatrix} x-5 & y-3 & z-3 \\ -3 & 2 & -3 \\ 2 & -4 & 3 \end{vmatrix} = 0$$

$$\therefore (x-5)(-6) - (y-3)(-3) + (z-3)(8) = 0$$

$$\therefore -6x + 30 + 3y - 9 + 8z - 24 = 0$$

$$6x - 3y - 8z + 3 = 0$$

જવાબ : (A)

(3) સમતલ $6x - 3y - 8z + 3 = 0$ નું $(1, -1, 1)$ થી અંતર

$$= \frac{|6(1) - 3(-1) - 8(1) + 3|}{\sqrt{36+9+64}} = \frac{4}{\sqrt{109}}$$

જવાબ : (C)

(165) ધારો કે બે રેખાઓની દિક્કોસાઈન l, m, n છે તથા a, b, c, p, q, r સ્વૈર અચળ છે. દિક્કોસાઈન માટે $pl + qm + rn = 0$ અને $al^2 + bm^2 + cn^2 = 0$ છે.

ઉપરની માહિતી પરથી નીચેના પ્રશ્નોના જવાબ આપો :

(1) $p = q = r = 1$ લેતાં બંને રેખાઓ નીચેનામાંથી કયા સંબંધોને સંતોષે છે.

$$(A) (a+b)\left(\frac{m}{n}\right)^2 + 2a\left(\frac{m}{n}\right) + (c+a) = 0 \quad (B) (b+c)\left(\frac{n}{l}\right)^2 + b\left(\frac{n}{l}\right) + (a+b) = 0$$

$$(C) (c+a)\left(\frac{l}{m}\right)^2 + 2c\left(\frac{l}{m}\right) + (b+c) = 0 \quad (D) (c+a)\left(\frac{l}{m}\right)^2 + c\left(\frac{l}{m}\right) + (b+c) = 0$$

(2) જો $p = q = r = 1$ તથા $\left(\frac{a+b}{b+c}\right) = \frac{n_1 n_2}{l_1 l_2}$, તો

$$(A) \frac{m_1 m_2}{l_1 l_2} = \frac{b+c}{c+a} \quad (B) \frac{m_1 m_2}{l_1 l_2} = \frac{c+a}{a+b} \quad (C) \frac{m_1 m_2}{l_1 l_2} = \frac{a+b}{c+a} \quad (D) \frac{c+a}{b+c} = \frac{m_1 m_2}{l_1 l_2}$$

(3) રેખાઓ એકબીજાને સમાંતર હોય, તો

$$(A) \sum \frac{p^2}{a} = 0 \quad (B) \sum \frac{(b+c)}{p^2} = 0 \quad (C) \sum p^2 (b+c) = 0 \quad (D) \sum \frac{a^2}{p} = 0$$

(4) રેખાઓ એકબીજાને લંબ હોય, તો

$$(A) \sum p^2(a+b) = 0 \quad (B) \sum p^2(a-b) = 0 \quad (C) \sum p^2(b+c) = 0 \quad (D) \sum p^2(b-c) = 0$$

(5) જો $p = q = r = 1$ અને રેખાઓ પરસ્પર લંબ હોય, તો

$$(A) a+b+c = 0 \quad (B) ab+bc+ca = 3abc \\ (C) ab+bc+ca = 0 \quad (D) ab+bc+ca = abc$$

(6) $p = q = r = 1$ અને રેખાઓ એકબીજાને સમાંતર હોય, તો

$$(A) \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} = 1 \quad (B) \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 1 \quad (C) \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} = 0 \quad (D) \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 0$$

ઉકેલ રેખાઓની દિક્કોસાઈન સમીકરણો $pl + qm + rn = 0$ અને $al^2 + bm^2 + cn^2 = 0$ નું સમાધાન કરે છે. હવે, $pl + qm + rn = 0$

$$\therefore l = -\frac{(qm+rn)}{p} \text{ નું મૂલ્ય } al^2 + bm^2 + cn^2 = 0 \text{ માં મૂકતાં,}$$

$$a \left\{ -\frac{qm+rn}{p} \right\}^2 + bm^2 + cn^2 = 0$$

$$\therefore (aq^2 + bp^2) m^2 + 2aqrmn + (ar^2 + cp^2) n^2 = 0$$

$$\therefore (aq^2 + bp^2) \left(\frac{m}{n} \right)^2 + 2aqr \left(\frac{m}{n} \right) + (ar^2 + cp^2) = 0$$

(1) $p = q = r = 1$ લેતાં,

$$(a+b) \left(\frac{m}{n} \right)^2 + 2a \left(\frac{m}{n} \right) + (a+c) = 0 \quad (i)$$

$$\text{તે જ પ્રમાણે, } (c+a) \left(\frac{l}{m} \right)^2 + 2c \left(\frac{l}{m} \right) + (b+c) = 0 \quad (ii)$$

$$\text{અને } (b+c) \left(\frac{n}{l} \right)^2 + 2b \left(\frac{n}{l} \right) + (a+b) = 0 \quad (iii)$$

જવાબ : (A), (C)

(2) જો સમીકરણ (ii) નાં બીજ $\frac{l_1}{m_1}$ અને $\frac{l_2}{m_2}$ હોય, તો $\frac{l_1 l_2}{m_1 m_2} = \frac{b+c}{c+a}$

$$\therefore \frac{m_1 m_2}{l_1 l_2} = \frac{c+a}{b+c} \quad \text{જવાબ : (D)}$$

(3) રેખાઓ એકબીજાને સમાંતર છે. તેથી બંનેના દિક્કોસાઈન સમાન થશે.

$$\therefore \text{સમીકરણ } (aq^2 + bp^2) \left(\frac{m}{n} \right)^2 + 2aqr \left(\frac{m}{n} \right) + (ar^2 + cp^2) = 0 \text{ નાં બીજ સમાન થશે.}$$

$$\therefore \text{વિવેચક } \Delta = B^2 - 4AC = 0 \text{ એટલે કે } B^2 = 4AC$$

$$\therefore (2aqr)^2 = 4(aq^2 + bp^2)(ar^2 + cp^2)$$

$$\therefore a^2 q^2 r^2 = a^2 q^2 r^2 + acp^2 q^2 + abp^2 r^2 + bcp^4$$

$$\therefore acq^2 + abr^2 + bcp^2 = 0$$

$$\therefore \frac{p^2}{a} + \frac{q^2}{b} + \frac{r^2}{c} = 0 \quad (\text{iv})$$

$$\therefore \sum \frac{p^2}{a} = 0 \quad \text{જવાબ : (A)}$$

(4) સમીકરણ $(aq^2 + bp^2) \left(\frac{m}{n}\right)^2 + 2aqr\left(\frac{m}{n}\right) + (ar^2 + cp^2) = 0$ નાં બે બીજ $\frac{m_1}{n_1}$ અને $\frac{m_2}{n_2}$ હોય, તો

$$\frac{m_1 m_2}{n_1 n_2} = \frac{ar^2 + cp^2}{aq^2 + bp^2}$$

$$\therefore \frac{l_1 l_2}{br^2 + cq^2} = \frac{m_1 m_2}{ar^2 + cp^2} = \frac{n_1 n_2}{aq^2 + bp^2} \quad (\text{સંમિતતાને આધારે})$$

રેખાઓ એકબીજાને લંબ છે.

$$\therefore l_1 l_2 + m_1 m_2 + n_1 n_2 = 0$$

$$\therefore (br^2 + cq^2) + (ar^2 + cp^2) + (aq^2 + bp^2) = 0$$

$$\therefore p^2(b + c) + q^2(c + a) + r^2(a + b) = 0 \quad (\text{v})$$

$$\therefore \sum p^2(b + c) = 0 \quad \text{જવાબ : (C)}$$

(5) રેખાઓ પરસ્પર લંબ છે તથા $p = q = r = 1$

$\therefore$ સમીકરણ (v)માં $p = q = r = 1$ લેતાં,

$$2a + 2b + 2c = 0$$

$$\therefore a + b + c = 0 \quad \text{જવાબ : (A)}$$

(6) રેખાઓ સમાંતર છે તથા $p = q = r = 1$

$\therefore$ સમીકરણ (iv)માં $p = q = r = 1$ લેતાં,

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 0 \quad \text{જવાબ : (D)}$$

(166) ધારો કે $A(3, 2, 1)$ એ R^3 નું બિંદુ છે. રેખા $L : \frac{x-7}{2} = \frac{y-12}{-2} = \frac{z+1}{1}$ અને સમતલ $\pi : x + y + z = 11$ છે.

ઉપરની માહિતી પરથી નીચેના પ્રશ્નોના જવાબ આપો :

(1) બિંદુ A માંથી પસાર થતી L ને સમાંતર રેખા સમતલ π ને બિંદુ B માં મળે છે. B ના યામ

(A) $(-13, 8, 6)$ (B) $(13, 8, -6)$ (C) $(13, 8, 6)$ (D) $(13, -8, 6)$

(2) સમતલ π થી બિંદુ A નું રેખા L ને સમાંતર અંતર

(A) $\sqrt{30}$ (B) 15 (C) 30 (D) $2\sqrt{30}$

(3) A માંથી સમતલ π પરના લંબપાદ M ના યામ

(A) $\left(\frac{8}{3}, \frac{11}{3}, \frac{14}{3}\right)$ (B) $\left(\frac{14}{3}, \frac{-11}{3}, \frac{8}{3}\right)$ (C) $\left(\frac{-14}{3}, \frac{-11}{3}, \frac{8}{3}\right)$ (D) $\left(\frac{14}{3}, \frac{11}{3}, \frac{8}{3}\right)$

(4) બિંદુ A માંથી L ને સમાંતર રેખા, સમતલ π ને B માં મળે છે અને સમતલ π પરના A માંથી દોરેલ લંબનો લંબપાદ M હોય તો $BM = \dots\dots$

(A) $\frac{5}{3}\sqrt{78}$ (B) $5\sqrt{78}$ (C) $\sqrt{78}$ (D) $3\sqrt{78}$

(5) રેખા L અને સમતલ π ના છેદબિંદુથી બિંદુ A નું અંતર

(A) $\sqrt{641}$ (B) $\sqrt{849}$ (C) $\sqrt{757}$ (D) $\sqrt{477}$

ઉકેલ (1) રેખા $L : \frac{x-7}{2} = \frac{y-12}{-2} = \frac{z-1}{1}$ ને સમાંતર અને $A(3, 2, 1)$ માંથી

પસાર થતી રેખાનું સમીકરણ $\frac{x-3}{2} = \frac{y-2}{-2} = \frac{z-1}{1}$. આ રેખા

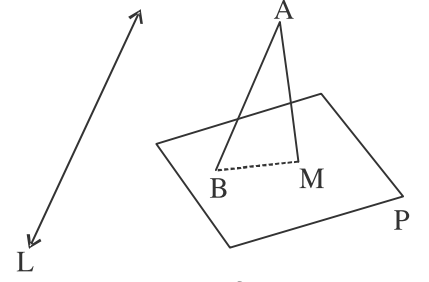
પરનું કોઈપણ બિંદુ $(2k+3, -2k+2, k+1)$ છે.

આ બિંદુ સમતલ $\pi : x + y + z = 11$ પર આવેલું છે.

$$\therefore 2k+3 - 2k+2 + k+1 = 11$$

$$\therefore k = 5$$

$\therefore$ બિંદુ B ના યામ $(13, -8, 6)$ છે.



આકૃતિ 21.11

જવાબ : (D)

(2) સમતલ π થી બિંદુ A નું રેખા L ને સમાંતર અંતર AB થશે.

$$\therefore AB = \sqrt{(13-3)^2 + (-8-2)^2 + (6-1)^2} = \sqrt{100 + 100 + 25} = 15$$

જવાબ : (B)

(3) $A(3, 2, 1)$ માંથી પસાર થતી અને સમતલ π ને લંબરેખાનું સમીકરણ $\frac{x-3}{1} = \frac{y-2}{1} = \frac{z-1}{1} = r$

$$\begin{aligned} \text{જ્યાં, } r &= -\frac{ax_1 + by_1 + cz_1 + d}{a + b + c} \\ &= -\frac{3+2+1-11}{1(1)+1(1)+1(1)} = \frac{5}{3} \end{aligned}$$

$$\therefore \text{લંબપાદ } M(x, y, z) = \left(\frac{14}{3}, \frac{11}{3}, \frac{8}{3}\right)$$

જવાબ : (D)

(4) બિંદુ $B(13, -8, 6)$ અને $M\left(\frac{14}{3}, \frac{11}{3}, \frac{8}{3}\right)$

$$\therefore \text{અંતર } BM = \sqrt{\left(13 - \frac{14}{3}\right)^2 + \left(-8 - \frac{11}{3}\right)^2 + \left(6 - \frac{8}{3}\right)^2}$$

$$= \sqrt{\left(\frac{25}{3}\right)^2 + \left(\frac{-35}{3}\right)^2 + \left(\frac{10}{3}\right)^2} = \frac{5}{3}\sqrt{25+49+4} = \frac{5}{3}\sqrt{78}$$

જવાબ : (A)

(5) કોઈક $k \in \mathbb{R}$ માટે રેખા L પરનું કોઈપણ બિંદુ $(2k+7, -2k+12, k-1)$

આ બિંદુ સમતલ $\pi : x + y + z = 11$ પર છે

$$\therefore 2k+7 - 2k+12 + k-1 = 11$$

$$\therefore k = -7$$

$\therefore$ રેખા L અને સમતલ π નું છેદબિંદુ $C(-7, 26, -8)$

$$\therefore \text{અંતર } AC = \sqrt{(-7-3)^2 + (26-2)^2 + (-8-1)^2} = \sqrt{100 + 576 + 81} = \sqrt{757}$$

જવાબ : (C)

(167) ધારો કે વાસ્તવિક સંખ્યાઓ a, b, c એ શ્રેણિક સમીકરણ $[a \ b \ c] \begin{bmatrix} 1 & 9 & 7 \\ 8 & 2 & 7 \\ 7 & 3 & 7 \end{bmatrix} = [0 \ 0 \ 0] \dots(i)$ નું સમાધાન કરે છે.

[IIT : 2011]

તે પરથી નીચેના પ્રશ્નોના જવાબ આપો :

(1) જો બિંદુ $P(a, b, c)$ એ સમતલ $2x + y + z = 1$ પર આવેલું હોય, તો $7a + b + c$ નું મૂલ્ય

(A) 0

(B) 12

(C) 7

(D) 6

- (2) $x^3 - 1 = 0$ નો ઉકેલ ω હોય અને $\text{Im}(\omega) > 0$ છે. જો $a = 2$ હોય અને b તથા c સમીકરણ (i)નું સમાધાન

$$\text{કરે તો } \frac{3}{\omega^a} + \frac{1}{\omega^b} + \frac{3}{\omega^c} = \dots$$

- (A) -2 (B) 2 (C) 3 (D) -3

- (3) $b = 6$ અને a અને c સમીકરણ (i)નું સમાધાન કરે છે. જો α, β એ સમીકરણ $ax^2 + bx + c = 0$ ના

$$\text{બીજા હોય, તો } \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} \right)^n = \dots$$

- (A) 6 (B) 7 (C) $\frac{6}{7}$ (D) ∞

ઉકેલ $[a \ b \ c] \begin{bmatrix} 1 & 9 & 7 \\ 8 & 2 & 7 \\ 7 & 3 & 7 \end{bmatrix} = [0 \ 0 \ 0]$

$$\therefore a + 8b + 7c = 0 \quad (1)$$

$$9a + 2b + 3c = 0 \quad (2)$$

$$7a + 7b + 7c = 0$$

$$\text{એટલે કે } a + b + c = 0 \quad (3)$$

$$\therefore \frac{a}{10} = \frac{b}{60} = \frac{c}{-70} = \frac{k}{10} \text{ જ્યાં } k \in \mathbb{R}$$

$$\therefore (a, b, c) = (k, 6k, -7k)$$

- (1) બિંદુ $P(a, b, c)$ એ સમતલ $2x + y + z = 1$ પર છે.

$$\therefore 2k + 6k - 7k = 1$$

$$\therefore k = 1$$

$$\therefore a = 1, \quad b = 6, \quad c = -7$$

$$\text{હવે, } 7a + b + c = 7 + 6 - 7 = 6$$

જવાબ : (D)

- (2) $a = 2$ લેતાં, $k = 2$. આથી, $b = 12, c = -14$

$$\text{હવે, } \frac{3}{\omega^a} + \frac{1}{\omega^b} + \frac{3}{\omega^c} = \frac{3}{\omega^2} + \frac{1}{\omega^{12}} + 3\omega^{14}$$

$$= \frac{3\omega}{\omega^3} + \frac{1}{(\omega^3)^4} + 3\omega^2 \cdot (\omega^3)^4$$

$$= 3\omega + 1 + 3\omega^2$$

$$(\omega^3 = 1)$$

$$= 3(\omega + \omega^2) + 1 = 3(-1) + 1 = -2$$

$$(1 + \omega + \omega^2 = 0)$$

જવાબ : (A)

- (3) $b = 6$ લેતાં, $k = 1$. તેથી $a = 1$ અને $c = -7$

$$\text{હવે, } ax^2 + bx + c = 0$$

$$\therefore x^2 + 6x - 7 = 0$$

$$\therefore x = -7 \text{ તથા } x = 1$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} \right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{-7} + 1 \right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{6}{7} \right)^n = 1 + \frac{6}{7} + \left(\frac{6}{7} \right)^2 + \dots = \frac{1}{1 - \frac{6}{7}} = 7$$

જવાબ : (B)

