30T MATH

2020

MATHEMATICS

Full Marks : 100

Pass Marks : 30

Time : Three hours

The figures in the margin indicate full marks for the questions.

Q. No. 1 (a–j) carries 1 mark each	1×10 = 10
Q. Nos. 2–13 carry 4 marks each	4×12 = 48
Q. Nos. 14–20 carry 6 marks each	6×7 = 42
	Total = 100

1. Answer the following questions : $1 \times 10 = 10$

তলৰ প্ৰশ্নবোৰৰ উত্তৰ লিখা ঃ

(a) Determine the relation R on the set of whole numbers ≤ 10 defined by 1

$$R = \{ (x, y) \mid 2x + 3y = 12 \}.$$

10 তকৈ সৰু বা সমান পূৰ্ণসংখ্যাৰ সংহতিত R সম্বন্ধটো এনেধৰণে সংজ্ঞাবদ্ধ $R = \{ (x, y) \mid 2x + 3y = 12 \}$ । সম্বন্ধটো নিৰ্ণয় কৰা।

(b) Write the principal value of

$$\cos^{-1}\left[\cos\left(\frac{-16\pi}{15}\right)\right].$$ 1

$\cos^{-1}\left[\cos\left(\frac{-16\pi}{15}\right)\right]$ ৰ মুখ্য মান লিখা।

(c) Let $A = [a_{ij}]$ is a square matrix of order 2 where $a_{ij} = i^2 - j^2$. Then A is

(i) Skew-symmetric matrix

(ii) Symmetric matrix

(iii) Diagonal matrix

(iv) None of these. 1

ধৰা হ'ল $A = [a_{ij}]$ এটা 2 ক্ৰমৰ বৰ্গ মৌলকক্ষ য'ত $a_{ij} = i^2 - j^2$ । তেন্তে A এটা

(i) বিষম-সমমিত মৌলকক্ষ

(ii) সমমিত মৌলকক্ষ

(iii) বিকৰ্ণ মৌলকক্ষ

(iv) এটাও নহয়।

$\sqrt{x^2+a^2}\,.dx$
$= \frac{x}{2}\sqrt{x^2+a^2} + \sin^{-1}\frac{x}{a}$

(d) Find the derivative of x^3 with respect to x^2. 1

x^2 সাপেক্ষে x^3 ৰ অৱকলজ উলিওৱা।

(e) Find the equation of the tangent to the curve $y = f(x)$ at (x_0, y_0), if $\frac{dy}{dx}$ does not exist at this point. 1

যদি $y = f(x)$ বক্ৰৰ (x_0, y_0) বিন্দুত $\frac{dy}{dx}$ স্থিত নহয়, তেন্তে বক্ৰডালৰ এই বিন্দুত টনা স্পৰ্শকৰ সমীকৰণ লিখা।

(f) If $sec^{-1} x = cosec^{-1} y$ $(|x| \geq 1, |y| \geq 1)$, then find the value of

$$cos^{-1}\left(\frac{1}{x}\right) + cos^{-1}\left(\frac{1}{y}\right).$$ 1

যদি $sec^{-1} x = cosec^{-1} y$ $(|x| \geq 1, |y| \geq 1)$,

তেন্তে $cos^{-1}\left(\frac{1}{x}\right) + cos^{-1}\left(\frac{1}{y}\right)$ ৰ মান উলিওৱা।

(g) Write the direction cosines of the vector $\hat{j}$. 1

$\hat{j}$ ভেক্টৰৰ দিশাংকবোৰ লিখা।

(h) Write the order of the differential equation representing the family of curves given by
$y = a\,sin(x+b)$, where a and b are arbitrary constants. 1

$y = a\,sin(x+b)$ য'ত a আৰু b যাদৃচ্ছিক ধ্ৰুৱক, সমীকৰণটোৱে বুজোৱা অৱকল সমীকৰণটোৰ ক্ৰম লিখা।

(i) The projections of a line on the axes are 3, 4 and $2\sqrt{6}$. Find the length of the line. 1

এডাল ৰেখাৰ অক্ষকেইডালত প্ৰক্ষেপ হ'ল 3, 4 আৰু $2\sqrt{6}$ । ৰেখাডালৰ দৈৰ্ঘ্য নিৰ্ণয় কৰা।

(j) If $x=\phi(t)$, then find $\int f(x)\,dx$. 1

$x=\phi(t)$ হ'লে $\int f(x)\,dx$ নিৰ্ণয় কৰা।

2. A relation R in the set $A=\{x \in \mathbb{Z} : 0 \le x \le 12\}$ is given by $R=\{(a, b): |a-b| \text{ is a multiple of } 4\}$. Prove that R is an equivalence relation. Find the set of all elements related to 1. 4

দেখুওৱা যে $A=\{x \in \mathbb{Z} : 0 \le x \le 12\}$ সংহতিত সংজ্ঞাবদ্ধ সম্বন্ধ $R=\{(a, b): |a-b|$ 4 অৰ এটা গুণিতক $\}$ সমতুল্য সম্বন্ধ। 1ৰ লগত যুক্ত মৌলবোৰৰ সংহতি উলিওৱা।

OR / অথবা

Let $f:\mathbb{R}-\{3\} \to \mathbb{R}-\{1\}$ is defined by $f(x)=\dfrac{x-2}{x-3}$. Show that f is a bijective function. 2+2=4

ধৰা হ'ল $f:\mathbb{R}-\{3\} \to \mathbb{R}-\{1\}$, য'ত $f(x)=\dfrac{x-2}{x-3}$ ৰে সংজ্ঞাবদ্ধ। দেখুওৱা যে f এটা এৰৈকী আচ্ছাদক ফলন।

3. Solve : 4

সমাধান কৰা :

$$sin^{-1}(1-x)-2\,sin^{-1}x=\frac{\pi}{2}.$$

OR / অথবা

If $\alpha = sin^{-1}\left(\frac{2}{3}\right)$ and $\beta = tan^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)$, where $0<\alpha, \beta<\frac{\pi}{2}$; then find the value of $\alpha-\beta$. 4

যদি $\alpha = sin^{-1}\left(\frac{2}{3}\right)$ আৰু $\beta = tan^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)$, য'ত $0<\alpha, \beta<\frac{\pi}{2}$; তেন্তে $\alpha-\beta$ ৰ মান নিৰ্ণয় কৰা।

4. Show that

দেখুওৱা যে

$$\begin{vmatrix} a^2+1 & ab & ac \\ ab & b^2+1 & bc \\ ca & cb & c^2+1 \end{vmatrix} = 1+a^2+b^2+c^2.$$

OR / অথবা

If (যদি) $A=\begin{bmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 4 \\ 2 & 1 & -2 \end{bmatrix}$ and (আৰু) $B=\begin{bmatrix} 2 & -3 & -4 \\ -1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$, then examine whether the matrix A^2-2B is singular. 4

তেন্তে A^2-2B মৌলকক্ষটো অপ্ৰতিম হয়নে পৰীক্ষা কৰা।

5. Find all points of discontinuity of f, where

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin\frac{1}{x}, & \text{if } x \neq 0 \\ 0, & \text{if } x = 0 \end{cases}$$ 4

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin\frac{1}{x}, & \text{যদি } x \neq 0 \\ 0, & \text{যদি } x = 0 \end{cases}$$

অৰ দ্বাৰা সংজ্ঞাবদ্ধ ফলনটোৰ বিচ্ছিন্নতাৰ বিন্দুসমূহ উলিওৱা।

6. Find $\frac{dy}{dx}$, if 2+2=4

$\frac{dy}{dx}$ উলিওৱা, যদি

(a) $y^x = x^y$

(b) $\cos y = x \cos(a + y)$.

7. Evaluate :

মান নিৰ্ণয় কৰা ঃ

(a) $\int \sqrt{x^2 + 2x + 5}\, dx$ 4

OR / অথবা

(b) $\int \frac{6x+7}{\sqrt{(x-5)(x-4)}}\,dx$ 4

8. Evaluate :

মান নিৰ্ণয় কৰা ঃ

(a) $\int_0^{\pi/2} \frac{\sin x-\cos x}{1+\sin x\cos x}\,dx$ 4

OR / অথবা

(b) $\int_0^{\pi} \log\,(1+\cos x)\,dx$ 4

9. If $x=a\,(\theta+\sin\theta)$ and $y=a\,(1-\cos\theta)$, find $\frac{d^2y}{dx^2}$ at $\theta=0$. 4

যদি $x=a\,(\theta+\sin\theta)$ আৰু $y=a\,(1-\cos\theta)$,

তেন্তে $\theta=0$ ত $\frac{d^2y}{dx^2}$ ৰ মান নিৰ্ণয় কৰা।

OR / অথবা

State Rolle's theorem and give geometrical interpretation of the theorem. 2+2=4

ৰ'লৰ উপপাদ্যৰ সংজ্ঞা লিখা আৰু ইয়াৰ জ্যামিতিক ব্যাখ্যা দৰ্শোৱা।

10. Solve the differential equation :

অৱকল সমীকৰণটোৰ সমাধান উলিওৱা ঃ

$$\frac{dy}{dx}-\frac{y}{x}+cosec\left(\frac{y}{x}\right)=0\,;$$ 4

$y=0$ when (যেতিয়া) $x=1$.

OR / অথবা

$$\left(1-x^2\right)\frac{dy}{dx}+2xy=x\sqrt{1-x^2}\,.$$ 4

11. If $f(x)=x^3-6x^2-36x+7$, find the interval for which $f(x)$ is

(i) strictly increasing

(ii) strictly decreasing. 2+2=4

$f(x) = x^3 - 6x^2 - 36x + 7$ ৰ দ্বাৰা নিৰ্দিষ্ট ফলনটো কোন অন্তৰালত

(i) সতত বৰ্দ্ধমান

(ii) সতত হ্ৰাসমান

উলিওৱা।

OR / অথবা

Find the area of the largest rectangle that can be formed having a perimeter of 40 meters. 4

এটা আয়তক্ষেত্ৰৰ পৰিসীমা 40 মিটাৰ। আয়তক্ষেত্ৰটোৰ কালি উলিওৱা যেতিয়া ই গৰিষ্ঠ।

12. Find a unit vector perpendicular to each of the vectors $\vec{a}+\vec{b}$ and $\vec{a}-\vec{b}$, where $\vec{a} = 3\hat{i}+2\hat{j}+2\hat{k}$ and $\vec{b} = \hat{i}+2\hat{j}-2\hat{k}$. 4

$\vec{a}+\vec{b}$ আৰু $\vec{a}-\vec{b}$ ভেক্টৰৰ লম্ব হোৱাকৈ এটা একক ভেক্টৰ নিৰ্ণয় কৰা য'ত $\vec{a} = 3\hat{i}+2\hat{j}+2\hat{k}$ আৰু $\vec{b} = \hat{i}+2\hat{j}-2\hat{k}$.

OR / অথবা

Let $\vec{a} = \hat{i}+4\hat{j}+2\hat{k}$, $\vec{b} = 3\hat{i}-2\hat{j}+7\hat{k}$ and $\vec{c} = 2\hat{i}-\hat{j}+4\hat{k}$. Find a vector $\vec{d}$ which is perpendicular to both $\vec{a}$ and $\vec{b}$ and $\vec{c}.\vec{d} = 15$. 4

ধৰা হ'ল $\vec{a} = \hat{i}+4\hat{j}+2\hat{k}$, $\vec{b} = 3\hat{i}-2\hat{j}+7\hat{k}$ আৰু $\vec{c} = 2\hat{i}-\hat{j}+4\hat{k}$. এটা ভেক্টৰ $\vec{d}$ নিৰ্ণয় কৰা য'ত $\vec{d}$, $\vec{a}$ আৰু $\vec{b}$ৰ ওপৰত লম্ব আৰু $\vec{c}.\vec{d} = 15$.

Contd.

13. Bag A contains 6 red and 4 white balls; bag B contains 4 red and 6 white balls and bag C contains 5 red and 5 white balls respectively. A bag is selected at random and a ball is drawn from the selected bag. If the ball is found to be red, find the probability that the ball is drawn from bag A. 4

যথাক্ৰমে মোনা Aত 6টা ৰঙা আৰু 4টা বগা বল, মোনা Bত 4টা ৰঙা আৰু 6টা বগা আৰু মোনা Cত 5টা ৰঙা আৰু 5টা বগা বল আছে। যাদৃচ্ছিকভাৱে এখন মোনাৰ পৰা এটা বল লোৱা হ'ল। যদি বলটো ৰঙা হয়, বলটো মোনা Aৰ পৰা লোৱাৰ সম্ভাৱিতা নিৰ্ণয় কৰা।

OR / অথবা

A fair coin is tossed 10 times. Find the probability of getting exactly five heads. 4

এটা নিখুঁত মুদ্ৰা 10বাৰ টছ কৰা হ'ল। ঠিক পাঁচটা মুণ্ডপ্ৰাপ্ত হোৱাৰ সম্ভাৱিতা নিৰ্ণয় কৰা।

14. Using matrix method solve the following system of linear equations : 6

মৌলকক্ষীয় পদ্ধতিৰে তলৰ বৈখিক সমীকৰণ প্ৰণালীটোৰ সমাধান উলিওৱা :

$$x - y + z = 4$$
$$2x + y - 3z = 0$$
$$x + y + z = 2$$

OR / অথবা

Using elementary transformation find the inverse of the following matrix : 6

মৌলিক প্ৰক্ৰিয়া প্ৰয়োগ কৰি তলৰ মৌলকক্ষটোৰ প্ৰতিলোম মৌলকক্ষ উলিওৱা ঃ

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 \\ -3 & 0 & -5 \\ 2 & 5 & 0 \end{bmatrix}$$

15. Prove that the curves $x = y^2$ and $xy = k$ cut at right angles if $8k^2 = 1$. 6

প্ৰমাণ কৰা যে $x = y^2$ আৰু $xy = k$ বক্ৰই লম্বভাৱে কটাকটি কৰে যদি $8k^2 = 1$.

OR / অথবা

Find the absolute maximum and absolute minimum values of the function f given by $f(x) = cos^2 x + sin x$, $x \in [0, \pi]$. 6

$f(x) = cos^2 x + sin x$, $x \in [0, \pi]$ ৰ দ্বাৰা নিৰ্দিষ্ট f ফলনটোৰ পৰম গৰিষ্ঠ আৰু পৰম লঘিষ্ঠ মান উলিওৱা।

16. Find the area of the region enclosed by the parabola $x^2 = y$, the line $y = x + 2$ and the x-axis . 6

$x^2 = y$ অধিবৃত্ত, $y = x + 2$ ৰেখা আৰু x-অক্ষই আগুৰা ক্ষেত্ৰৰ কালি নিৰ্ণয় কৰা।

Contd.

OR / অথবা

Using integration find the area of the region bounded by the triangle whose vertices are $(1,0)$, $(2,2)$ and $(3,1)$. 6

অনুকলন ব্যৱহাৰ কৰি $(1,0)$, $(2,2)$ আৰু $(3,1)$ শীৰ্ষবিন্দু বিশিষ্ট ত্ৰিভুজটোৰ কালি নিৰ্ণয় কৰা।

17. Find the vector equation of the line passing through the point $(1,2,1)$ and perpendicular to the plane $\vec{r}.\left(2\hat{i}-\hat{j}+\hat{k}\right)=10$. 6

$(1,2,1)$ বিন্দুৰ মাজেৰে যোৱা আৰু $\vec{r}.\left(2\hat{i}-\hat{j}+\hat{k}\right)=10$ সমতলখনৰ লম্ব হোৱা ৰেখাডালৰ ভেক্টৰ সমীকৰণ নিৰ্ণয় কৰা।

OR / অথবা

Find the vector equation of the plane passing through the intersection of the planes $\vec{r}.\left(\hat{i}+\hat{j}+\hat{k}\right)=6$ and $\vec{r}.\left(2\hat{i}+3\hat{j}+4\hat{k}\right)=-5$ and the point $(1,1,1)$. 6

$\vec{r}.\left(\hat{i}+\hat{j}+\hat{k}\right)=6$ আৰু $\vec{r}.\left(2\hat{i}+3\hat{j}+4\hat{k}\right)=-5$ সমতলদুখনে কটাকটি কৰা ৰেখাৰ আৰু $(1,1,1)$ বিন্দুৰ মাজেৰে যোৱা সমতলখনৰ ভেক্টৰ সমীকৰণ উলিওৱা।

18. The two adjacent sides of a parallelogram are $\left(2\hat{i}-4\hat{j}+5\hat{k}\right)$ and $\left(\hat{i}-2\hat{j}-3\hat{k}\right)$. Find the unit vector parallel to its diagonal. Also find the area of the parallelogram. 6

এটা সামান্তৰিকৰ দুটা সন্নিহিত বাহু হ'ল $(2\hat{i}-4\hat{j}+5\hat{k})$ আৰু $(\hat{i}-2\hat{j}-3\hat{k})$। ইয়াৰ কৰ্ণৰ সমান্তৰাল একক ভেক্টৰ উলিওৱা। সামান্তৰিকটোৰ কালি নিৰ্ণয় কৰা।

OR / অথবা

For any two vectors $\vec{a}$ and $\vec{b}$, prove that 6

$$\left|\vec{a}+\vec{b}\right| \le |\vec{a}| + \left|\vec{b}\right|.$$

যিকোনো দুটা ভেক্টৰ $\vec{a}$ আৰু $\vec{b}$ ৰ বাবে প্ৰমাণ কৰা যে

$$\left|\vec{a}+\vec{b}\right| \le |\vec{a}| + \left|\vec{b}\right|.$$

19. Solve graphically the following linear programming problem :

লৈখিক নিয়মেৰে তলৰ ৰৈখিক প্ৰগ্ৰেমিং সমস্যাটোৰ সমাধান উলিওৱা ঃ

Maximize or Minimize

$Z = x + 2y$

subject to constraints

$x + 2y \ge 100$

$2x - y \le 0$

$2x + y \le 200$ 6

$x \ge 0, \; y \ge 0$

$Z = x + 2y$ ৰ সৰ্বোচ্চ আৰু সৰ্বনিম্ন মান উলিওৱা য'ত

$x + 2y \ge 100$

$2x - y \le 0$

$2x + y \le 200$

$x \ge 0, \; y \ge 0$

Contd.

OR / অথবা

Maximize

$$Z = 1000x + 600y$$

subject to constraints

$$x + y \leq 200$$
$$x \geq 20$$
$$y \geq 4x$$
$$x \geq 0, \; y \geq 0$$

6

$Z = 1000x + 600y$ ৰ সৰ্বোচ্চ মান উলিওৱা য'ত

$$x + y \leq 200$$
$$x \geq 20$$
$$y \geq 4x$$
$$x \geq 0, \; y \geq 0$$

20. Two numbers are selected at random (without replacement) from the first six positive integers. Let X denotes the larger of the two numbers. Find mean of X. 6

প্ৰথম ছয়টা ধনাত্মক অখণ্ড সংখ্যাৰ পৰা পুনৰস্থাপন নকৰাকৈ যাদৃচ্ছিকভাৱে দুটা সংখ্যা বাছনি কৰা হ'ল। X য়ে প্ৰাপ্ত সংখ্যা দুটাৰ ভিতৰত ডাঙৰটোক সূচালে X ৰ মাধ্য নিৰ্ণয় কৰা।

OR / অথবা

How many times a fair coin must be tossed so that the probability of having at least one head is more than 90% ? 6

এটা নিখুঁত মুদ্ৰা কিমান বাৰ টছ্ কৰিব লাগিব যাতে কমেও এবাৰ মুণ্ড পোৱাৰ সম্ভাৱিতা 90% তকৈ বেছি হয়?

———×———