4 ગણિતીય અનુમાનનો સિદ્ધાંત

ગણિતીય અનુમાનનો સિદ્ધાંત

જો પ્રાકૃતિક ચલ n નું કોઈ વિધાન $p(n)$ એ

(1) $n = 1$ માટે સત્ય હોય એટલે કે $p(1)$ સત્ય હોય.

(2) $k \in N$ માટે $p(k)$ સત્ય છે. $\Rightarrow$ $p(k+1)$ સત્ય છે.

તો વિધાન $p(n)$ પ્રત્યેક $n \in N$ માટે સત્ય છે.

વિશિષ્ટ ચલ પ્રકારોમાં ગણિતીય અનુમાનના સિદ્ધાંતો

ચલ પ્રકાર 1 :

જો $p(n)$ પ્રાકૃતિક ચલ n નું કોઈ વિધાન હોય અને જો કોઈક ધન પૂર્ણાંક k_0 માટે $p(k_0)$ સત્ય હોય તથા $k \geq k_0$, $k \in N$ માટે $p(k)$ સત્ય છે. $\Rightarrow$ $p(k+1)$ સત્ય છે, તો વિધાન $p(n)$ દરેક $n \geq k_0$, $n \in N$ માટે સત્ય છે.

ચલ પ્રકાર 2 :

પ્રાકૃતિક ચલ n ના વિધાન $p(n)$ માટે જો $p(1)$ અને $p(2)$ સત્ય હોય તથા ધન પૂર્ણાંક k માટે $p(k)$ અને $p(k+1)$ સત્ય છે. $\Rightarrow$ $p(k+2)$ સત્ય છે તો વિધાન $p(n)$ દરેક $n \in N$ માટે સત્ય છે.

ગણિતીય અનુમાનના સિદ્ધાંતની મર્યાદાઓ :

(1) આ સિદ્ધાંતની મદદથી પરિણામની ચકાસણી કરી શકાય, પરિણામ મેળવી શકાય નહિ.

(2) અપૂર્ણાંક અને અસંમેય ચલવાળા પરિણામની ચકાસણી આ સિદ્ધાંતની મદદથી કરી શકાય નહિ.

બહુ વિકલ્પી પ્રશ્નો

(1) વિધાન $p(n)$: $3^{2n+1} + 2^{n-1}$ એ $\forall\ n \in N$ ...... ના ગુણકમાં છે.

(A) 2 (B) 5 (C) 7 (D) 4

ઉકેલ : $n = 1$ લેતાં, $3^3 + 2^0 = 28$ જે 7 અને 2 ના ગુણકમાં છે.

$n = 2$ લેતાં, $3^5 + 2^1 = 245 = 7 \times 35$ જે 7 ના ગુણકમાં છે. પણ 2 ના ગુણકમાં નથી.

$\therefore$ $p(n)$: $3^{2n+1} + 2^{n-1}$ એ $\forall\ n \in N$, 7 ના ગુણકમાં છે તેવું અનુમાન કરી શકાય.

ધારો કે $p(k)$: $3^{2n+1} + 2^{k-1}$ એ 7ના ગુણકમાં છે. ($k \in N$) સત્ય છે.

$\therefore$ $3^{2k+1} + 2^{k-1} = 7m \quad m \in N$ (1)

$n = k + 1$ માટે $3^{2k+3} + 2^k = 9 \cdot 3^{2k+1} + 2^k$

$= 9(7m - 2^{k-1}) + 2^k$ ($\because$ 1)

$= 63m - 9 \cdot 2^{k-1} + 2^k$

$= 63m - 2^{k-1}(9 - 2)$

$= 7(9m - 2^{k-1})$ એ 7 ના ગુણકમાં છે.

$\therefore$ $p(k)$ સત્ય છે. $\Rightarrow$ $p(k+1)$ સત્ય છે.

$p(2)$ પરથી (A), (D) સત્ય નથી. $p(1)$ પરથી (B) સત્ય નથી.

$\therefore$ વિકલ્પ (C) સત્ય છે.

$\therefore$ ગણિતીય અનુમાનના સિદ્ધાંત પરથી $p(n)$ $\forall\ n \in N$ સત્ય છે. **જવાબ :** (C)

(2) વિધાન $p(n) : n^2 \geq 3n$ .... સત્ય છે.

(A) $\forall\ n \in N$ (B) $\forall\ n \in N,\ n > 1$

(C) $\forall\ n \in N,\ n \geq 3$ (D) દરેક અયુગ્મ પ્રાકૃતિક સંખ્યા n

ઉકેલ : $p(1) : 1 \geq 3$ સત્ય નથી.

$p(2) : 4 \geq 6$ સત્ય નથી.

$p(3) : 9 \geq 9$ સત્ય છે.

$p(4) : 16 \geq 12$ સત્ય છે.

$p(5) : 25 \geq 15$ સત્ય છે.

$\therefore$ ગણિતીય અનુમાનના સિદ્ધાંત પરથી નીચે પ્રમાણે સાબિત કરી શકાય કે $p(n)$, $\forall\ n \geq 3$ સત્ય છે :

ધારો કે $p(k) : k^2 \geq 3k \quad k \geq 3$ માટે સત્ય છે. (1)

$p(k+1) : (k+1)^2 \geq 3(k+1)$ સાબિત કરવું છે.

અહીં $(k+1)^2 = k^2 + 2k + 1$

$\geq 3k + 2k + 1$ (1 પરથી)

$\geq 3k + 3 = 3(k + 1)$ $(k \geq 3 \Rightarrow 2k + 1 \geq 3)$

$\therefore (k+1)^2 \geq 3(k + 1)$

$\therefore p(k+1)$ સત્ય છે.

$\therefore$ ગણિતીય અનુમાનના સિદ્ધાંત પરથી $p(n) : n^2 \geq 3n;\ \forall\ n \in N\ n \geq 3$ માટે સત્ય છે.

જવાબ : (C)

(3) $p(n) : 2^{2^n}$ નો એકમનો અંક ...... છે. $n > 1$

(A) 2 (B) 6 (C) 0 (D) 4

ઉકેલ : $n = 2$ લેતાં $2^{2^2} = 16$ નો એકમનો અંક 6 છે.

$n = 3$ લેતાં $2^{2^3} = 2^8 = 256$ નો એકમનો અંક 6 છે.

$\therefore$ અનુમાન કરી શકાય કે દરેક $n > 1$ માટે 2^{2^n} નો એકમનો અંક 6 છે.

ધારો કે $p(k) : 2^{2^k}$ નો એકમનો અંક 6 છે. $k > 1$

$n = k+1$ લેતાં, $2^{2^{k+1}} = 2^{2^k} \quad 2^2$

$= \left(2^{2^k}\right)^2$

$= (10\,m + 6)^2 \qquad \left(2^{2^k} = 10m + 6,\ m \in N\right)$

$= 100\,m^2 + 120m + 36$

$= 100\,m^2 + 120m + 30 + 6$

$= 10\ (10\ m^2 + 12m + 3) + 6$ જેનો એકમનો અંક 6 છે.

$\therefore\ p(k + 1)$ સત્ય છે.

આમ $p(k)$ સત્ય છે. $\Rightarrow p(k + 1)$ સત્ય છે. $\forall\ k > 1$

$\therefore\ p(n)$ દરેક $n > 1$ માટે સત્ય છે. **જવાબ :** (B)

(4) જો $1^3 + 2^3 + 3^3 + ... + 50^3 = m^2$, તો $m = ...$

(A) 1275 (B) 1225 (C) 2450 (D) 1375

ઉકેલ : $m^2 = 1^3 + 2^3 + 3^3 + ... + 50^3$

$$= \left[\sum n^3\right]_{n=50} \qquad (n = 50)$$

$$= \left[\frac{n^2\,(n+1)^2}{4}\right]_{n=50} \qquad \text{(ગણિતીય અનુમાનના સિદ્ધાંત પરથી)}$$

$$= \frac{50^2 \times 51^2}{4}$$

$m = 25 \times 51 = 1275$ **જવાબ :** (A)

(5) $n! < \left[\frac{n+1}{2}\right]^n$ નું પાલન થાય તેવો નાનામાં નાનો ધનપૂર્ણાંક ...... છે. જ્યાં [ ] મહત્તમ પૂર્ણાંક વિધેય છે.

(A) 2 (B) 4 (C) 3 (D) 6

ઉકેલ : $n = 1$ લેતાં $1! < \left[\frac{1+1}{2}\right]^1$

$\therefore\ 1! < 1$ સત્ય નથી.

$n = 2$ લેતાં $2! < \left[\frac{2+1}{2}\right]^2$

$\therefore\ 2 < 2$ સત્ય નથી.

$n = 3$ લેતાં $3! < \left[\frac{3+1}{2}\right]^3$

$\therefore\ 6 < 8$ સત્ય છે. **જવાબ :** (C)

(6) જો $\sum_{r=1}^{k} r = \frac{1}{2}\ (n^2 + 11n + 30)$ તો $k = ...$

(A) $n + 4$ (B) $n + 7$ (C) $n + 6$ (D) $n + 5$

ઉકેલ : $n^2 + 11n + 30 = (n + 5)(n + 6)$,

અહીં $1 + 2 + 3 + ... + n = \frac{n(n+1)}{2}$ છે જ.

આમ n ના સ્થાને $(n + 5)$ લેવાનો વિચાર કરી શકાય.

$\therefore 1 + 2 + 3 + ...+ (n + 4) + (n + 5) = \frac{(n+5)(n+6)}{2}$

$\therefore k = (n + 5)$ **જવાબ :** (D)

(7) જો $\sum_{r=6}^{n+5} (r-5)^3 = \left\{\sum_{r=2}^{p} (r-1)\right\}^2$ તો $p = ...$

(A) $n + 2$ (B) $n - 1$ (C) $n + 1$ (D) $n + 3$

ઉકેલ : ગણિતીય અનુમાનના સિદ્ધાંત પરથી સાબિત કરી શકાય કે.

અહીં $1^3 + 2^3 + 3^3 + ... + n^3 = (1 + 2 + 3 + ... + n)^2$

$\therefore \sum_{r=6}^{n+5} (r-5)^3 = 1^3 + 2^3 + 3^3 + ... + n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4} = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2 = \left\{\sum_{r=2}^{n+1} (r-1)\right\}^2$

$\therefore p = n + 1$ **જવાબ :** (C)

(8) વિધાન $p(n) : 8n \le 2^n - 16$ દરેક $n >$ ...., $n \in N$ માટે સત્ય છે.

(A) 1 (B) 2 (C) 5 (D) 4

ઉકેલ : $p(1) : 8 \le 2^1 - 16$ સત્ય નથી.

$p(2) : 16 \le 2^2 - 16$ સત્ય નથી.

$p(3) : 24 \le 2^3 - 16$ સત્ય નથી.

$p(4) : 32 \le 2^4 - 16$ સત્ય નથી.

$p(5) : 40 \le 2^5 - 16$ સત્ય નથી.

$p(6) : 48 \le 2^6 - 16$ સત્ય છે. આથી $p(6)$ સત્ય છે.

$p(7) : 56 \le 2^7 - 16$ સત્ય છે.

$\therefore$ ધારો કે $p(k)$ સત્ય છે. $k \ge 6$

$\therefore 8k \le 2^k - 16$ સત્ય છે.

$\therefore 8k + 8 \le 2^k - 16 + 8$ $(k \ge 6 \Rightarrow 8 \le 2^k)$

$\therefore 8(k + 1) \le 2^k + 2^k - 16$

$\therefore 8(k + 1) \le 2 \cdot 2^k - 16$

$\therefore 8(k + 1) \le 2^{k+1} - 16$

$\therefore p(k+1)$ સત્ય છે.

આમ, $p(k)$ સત્ય છે. $\Rightarrow p(k + 1)$ સત્ય છે. $k > 5$

$\therefore p(n), \forall n > 5$ સત્ય છે. **જવાબ :** (C)

(9) મહત્તમ ધન પૂર્ણાંક ...... વડે $(n+1)(n+2)(n+3)\dots(n+r)$ ને નિઃશેષ ભાગી શકાય. $\forall\ n \in N$

(A) $(n+r)!$ (B) $n+r+1$ (C) $n!$ (D) $r!$

ઉકેલ : અહીં $\forall\ n \in N$, $(n+1)(n+2)(n+3)\dots(n+r) = {}_{(n+r)}P_r$

$= \frac{(n+r)!}{n!} = \frac{(n+r)!}{n!\,r!} \times r! = \binom{n+r}{n} r!$ એ $r!$ વડે વિભાજ્ય છે.

નોંધ : આમ, n ક્રમિક પૂર્ણાંકોનો ગુણાકાર $n!$ વડે વિભાજ્ય છે, $\forall\ n \in N$ તેવું પરિણામ મળે. **જવાબ :** (D)

(10) અસમતા $3^n < (n+1)!$, $n \in N$ એ ....

(A) $n = 4$ માટે સત્ય નથી. (B) $n = 13$ માટે સત્ય નથી.

(C) દરેક $n \geq 4$ માટે સત્ય છે. (D) દરેક $n > 2$ માટે સત્ય છે.

ઉકેલ : $n = 1$ લેતાં, $3 < 2$ સત્ય નથી.

$n = 2$ લેતાં, $9 < 6$ સત્ય નથી.

$n = 3$ લેતાં, $27 < 24$ સત્ય નથી.

$n = 4$ લેતાં, $81 < 120$ સત્ય છે.

$p(n) : 3^n < (n+1)!$ એ $\forall\ n \geq 4$ સત્ય છે.

ધારો કે $n = k$ માટે $3^n < (n+1)!$ સત્ય છે. $k \geq 4$

$\therefore\ 3^k \leq (k+1)!$

$\therefore\ 3^k \cdot 3 < (k+1)!\ 3$

$\therefore\ 3^{k+1} < 3(k+1)! < (k+2)(k+1)!$ $(k \geq 4 \Rightarrow k+2 > 3)$

$\therefore\ 3^{k+1} < (k+2)!$

$\therefore$ વિધાન $n = k+1$ માટે સત્ય છે.

$\therefore\ p(k)$ સત્ય છે. $\Rightarrow p(k+1)$ સત્ય છે. $\forall\ k \geq 4$

$\therefore\ p(n) : 3^n < (n+1)!$ $\forall\ n \geq 4$ સત્ય છે. **જવાબ :** (C)

(11) વિધાન $p(n) : \frac{n^n}{3^n} < n! < \frac{n^n}{2^n}$ દરેક $n \geq k$, $n \in N$ માટે સત્ય છે, તો $k =$ _____

(A) 3 (B) 4 (C) 5 (D) 6

ઉકેલ : $p(1) : \frac{1}{3} < 1 < \frac{1}{2}$ સત્ય નથી.

$p(2) : \frac{4}{9} < 2 < 1$ સત્ય નથી.

$p(3) : 1 < 6 < \frac{27}{8}$ સત્ય નથી.

$p(4)$: $\frac{256}{81} < 24 < \frac{256}{16}$ સત્ય નથી.

$p(5)$: $\frac{5^5}{3^5} < 120 < \frac{5^5}{2^5}$ એટલે કે $\frac{3125}{243} < 120 < \frac{3125}{32}$ સત્ય નથી.

$p(6)$: $\frac{6^6}{3^6} < 6! < \frac{6^6}{2^6}$ એટલે કે $\frac{6^5}{3^6} < 5! < \frac{6^5}{2^6}$ એટલે કે $\frac{2^5}{3} < 120 < \frac{3^5}{2}$

એટલે કે $\frac{32}{3} < 120 < \frac{243}{2}$ સત્ય છે.

આ જ રીતે, સાબિત કરી શકાય કે $p\ (n)$ દરેક $n > 6$ માટે સત્ય છે. **જવાબ :** (D)

અહીં ગણિતીય અનુમાનના સિદ્ધાંત પરથી $n\,! < \frac{n^n}{2^n}$ અને $\frac{n^n}{3^n} < n\,!$, $n \geq 6$ સાબિત કરી શકાય.

(12) જો $S\ (k) = 1 + 3 + 5 + ... + (2k - 1) = 3 + k^2$, તો નીચેના પૈકી કયું સત્ય છે ? (AIEEE : 2004)

(A) S (1) સત્ય છે.

(B) $S\ (k) \Rightarrow S\ (k + 1)$ સત્ય છે.

(C) $S\ (k) \Rightarrow S\ (k + 1)$ સત્ય નથી.

(D) આ પરિણામ સાબિત કરવા માટે ગણિતીય અનુમાનના સિદ્ધાંતનો ઉપયોગ થઈ શકે.

ઉકેલ : $S\ (1) = 1 = 3 + (1)^2$ સત્ય નથી.

ધારો કે $S\ (k) = 1 + 3 + 5 + ... + (2k - 1) = 3 + k^2$ સત્ય છે.

$$1 + 3 + 5 + ... + (2k - 1) + (2k + 1) = 3 + k^2 + (2k + 1)$$

$$= 3 + (k+1)^2$$

આમ, $S\ (k + 1)$ સત્ય છે.

$\therefore$ $S\ (k)$ સત્ય છે. $\Rightarrow S\ (k + 1)$ સત્ય છે. આથી (B) સત્ય છે.

$\therefore$ $S\ (k) \Rightarrow S\ (k + 1)$ સત્ય છે.

$\therefore$ (C) સત્ય નથી. $p(1)$ સત્ય નથી. આથી (D) સત્ય નથી. **જવાબ :** (B)

(13) $p(n) : 49^n + 24^{n-1}$ એ $n \in \mathrm{N}$ માટે .... વડે વિભાજ્ય છે.

(A) 4 (B) 49 (C) 7 (D) 25

ઉકેલ : $p(1) : 49^1 + 24^0 = 50$ એ 25 વડે વિભાજ્ય છે.

ધારો કે, $p(n) : 49^n + 24^{n-1}$ એ દરેક $n \in \mathrm{N}$ માટે 25 વડે વિભાજ્ય છે.

ધારો કે $m \in \mathrm{N}$

એટલે કે $49^k + 24^{k-1} = 25m.$

હવે $p(k + 1) : 49^{k+1} + 24^k$ એ 25 વડે વિભાજ્ય છે તેમ સાબિત કરવું છે.

હવે $49^{k+1} + 24^k = 49\ (25m - 24^{k-1}) + 24^k$

$= 49 \cdot 25m - 49 \cdot 24^{k-1} + 24^k$

$= 49 \cdot 25m - 24^{k-1}(49 - 24)$

$= 25(49m - 24^{k-1})$ એ 25 વડે વિભાજ્ય છે.

$\therefore p(k+1)$ સત્ય છે.

આમ, $p(k)$ સત્ય છે. $\Rightarrow p(k+1)$ સત્ય છે. $k \in N$

$\therefore$ વિધાન $p(n)$, $\forall n \in N$ સત્ય છે. **જવાબ :** (D)

(14) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{sin^2 nx}{sinx} dx = ...\ \forall\ n \in N$

(A) $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + ... + \frac{1}{n}$ (B) $1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + ... + \frac{1}{2n-1}$ (C) 1 (D) 0

ઉકેલ : $n = 1$ લેતાં, $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{sin^2 nx}{sinx} dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} sinx\, dx = [-cosx]_0^{\frac{\pi}{2}} = 1$

$n = 2$ લેતાં, $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{sin^2 2x}{sinx} dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{4sin^2 x\, cos^2 x}{sinx} dx$

$= -4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} cos^2 x(-sinx)\ dx = -4\left[\frac{cos^3 x}{3}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = -4\left[0 - \frac{1}{3}\right] = \frac{4}{3} = 1 + \frac{1}{3}$

$n = 1$ અને 2 માટે (B) સત્ય છે.

$\therefore\ \forall\ n \in N$ ધારો કે $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{sin^2 nx}{sinx} dx = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + ... + \frac{1}{2n-1}$.

ધારો કે $p(k)$ સત્ય છે. $k \in N$

$\therefore p(k) : \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{sin^2 kx}{sinx} dx = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + ... + \frac{1}{2k-1}$

અહીં $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{sin^2 (k+1)x}{sinx} dx - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{sin^2 k\,x}{sinx} dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{sin^2 (k+1)x - sin^2 kx}{sinx} dx$

$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{sin(2k+1)x\ sinx}{sinx} dx$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} sin(2k+1)x\,dx = \left[\frac{-cos(2k+1)x}{(2k+1)}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{-1}{2k+1}\left[cos(2k+1)\frac{\pi}{2} - cos 0\right] = \frac{1}{2k+1}$$

$$\therefore \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{sin^2(k+1)x}{sinx}\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{sin^2 kx}{sinx}\,dx + \frac{1}{2k+1}$$

$$= 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + ... + \frac{1}{2k-1} + \frac{1}{2k+1}$$

$\therefore p(k + 1)$ સત્ય છે.

$\therefore p(n)$ દરેક $n \in N$ માટે સત્ય છે. **જવાબ :** (B)

(15) ગણિતીય અનુમાનના સિદ્ધાંત પરથી સાબિત કરો $p(n) : cos\,(x - \pi\, n) = (-1)^n\, cos\, x,\ \forall\ n \in N$

ઉકેલ : $n = 1$ લેતાં, $cos\,(x - \pi) = cos\,(\pi - x) = -\, cos\, x = (-1)^1\, cos\, x$

$\therefore p(1)$ સત્ય છે.

ધારો કે, $p(k)$ સત્ય છે. $k \in N$

$p(k) : cos\,(x - k\pi) = (-1)^k\, cos\, x,\ \ k \in N$

અહીં $cos\,(x - \pi\,(k + 1)) = cos\,(x - k\pi - \pi)$

$= -\, cos\,(x - k\pi)$ $\qquad cos\,(\pi - \theta) = -\, cos\theta$

$= -\,(-1)^k\, cos\, x$

$= (-1)^{k+1}\, cos\, x$

$\therefore p(k+1)$ સત્ય છે.

આમ, $p(k)$ સત્ય છે. $\Rightarrow p(k + 1)$ સત્ય છે. $\forall\ k \in N$

વિધાન $p(n)\ \forall\ n \in N$ સત્ય છે.

(16) ગણિતીય અનુમાનના સિદ્ધાંત પરથી સાબિત કરો : $p(n) : |z^n| = |z|^n,\ \ \forall\ n \in N$ તથા $z \in C$

ઉકેલ : $n = 1$ લેતાં, $p(1) = |z^1| = |z|^1$ સત્ય છે જ.

ધારો કે, $p(k)$ સત્ય છે. $k \in N$

$\therefore p(k) : |z^k| = |z|^k$

હવે $p(k + 1) : |z^{k+1}| = |z|^{k+1}$ સાબિત કરવું છે.

અહીં $|z^{k+1}| = |z^k \cdot z|$

$= |z^k|\,|z|$ $\qquad |z_1 z_2| = |z_1|\,|z_2|$

$= |z|^k\,|z|$

$= |z|^{k+1}$

$\therefore p(k+1)$ સત્ય છે.

આમ, $p(k)$ સત્ય છે. $\Rightarrow p(k + 1)$ સત્ય છે. $\forall\ k \in N$

$\therefore$ વિધાન $p(n),\ \forall\ n \in N$ સત્ય છે.

JEE - ADVANCED માટે ઉપયોગી દાખલા

(17) $n > 1$ માટે સાબિત કરો : $n! < \left(\frac{n+1}{2}\right)^n$

ઉકેલ : $p(n) : n! < \left(\frac{n+1}{2}\right)^n, \ n > 1$

$n = 2$ માટે $2! < \left(\frac{3}{2}\right)^2$ એટલે કે $2 < \frac{9}{4}$ સત્ય છે.

ધારો કે $p(k)$ સત્ય છે. $(k \geq 2)$ આથી $p(k) : k! < \left(\frac{k+1}{2}\right)^k$ સત્ય છે. (1)

પરિણામ (1) ની બંને બાજુએ $(k + 1)$ વડે ગુણતાં,

$\therefore \ k! \ (k + 1) < \frac{(k+1)^k}{2^k} \ (k + 1)$

$\therefore (k + 1)! < \frac{(k+1)^{k+1}}{2^k \times 2} \times 2$

$\therefore (k + 1)! < \frac{(k+1)^{k+1}}{2^{k+1}} \times \left(1 + \frac{1}{k+1}\right)^{k+1}, \ \left[\left(1 + \frac{1}{k+1}\right)^{k+1} = 1 + (k+1)\frac{1}{k+1} + \text{ધન સંખ્યા} > 2\right]$

$\therefore (k + 1)! < \frac{(k+1)^{k+1}}{2^{k+1}} \times \frac{(k+2)^{k+1}}{(k+1)^{k+1}}$

$\therefore (k + 1)! < \left(\frac{k+2}{2}\right)^{k+1}$

$\therefore p(k+1)$ સત્ય છે.

આમ, $p(k)$ સત્ય છે. $\Rightarrow p(k + 1)$ સત્ય છે, $k \geq 2$

$\therefore$ ગણિતીય અનુમાનના સિદ્ધાંત પરથી $p(n)$ દરેક $n > 1, n \in N$ માટે સત્ય છે.

(18) ગણિતીય અનુમાનના સિદ્ધાંત પરથી સાબિત કરો : $n! < \left(\frac{n}{2}\right)^n, \forall \ n > 5, n \in N$

ઉકેલ : $p(n) : n! < \left(\frac{n}{2}\right)^n, n > 5 \qquad n \in N$

$n = 6$ માટે, $\quad 6! < \left(\frac{6}{2}\right)^6 \Leftrightarrow 6! < (3)^6 \Leftrightarrow 720 < 729$ સત્ય છે.

$\therefore p(6)$ સત્ય છે.

ધારો કે, $p(k)$ સત્ય છે. $\quad k > 5$

$\therefore k\,! < \left(\frac{k}{2}\right)^k, \ k > 5$ (1)

(1) ની બંને બાજુ $(k + 1)$ વડે ગુણતાં,

$$k\,!\,(k+1) < \frac{k^k}{2^k}\,(k+1)$$

$$\therefore\ (k+1)! < \frac{k^k\,(k+1)}{2^k \cdot 2} \times 2$$

$$\therefore\ (k+1)! < \frac{k^k\,(k+1)}{2^{k+1}} \times \left(1+\frac{1}{k}\right)^k$$

$$\left[\ \left(1+\frac{1}{k}\right)^k = 1 + k\,\frac{1}{k} + \text{ધન સંખ્યા} \Rightarrow \left(1+\frac{1}{k}\right)^k > 2\right]$$

$$\therefore\ (k+1)! < \frac{k^k\,(k+1)}{2^{k+1}} \times \frac{(k+1)^k}{k^k}$$

$$\therefore\ (k+1)! < \frac{(k+1)^{k+1}}{2^{k+1}}$$

$$\therefore\ (k+1)! < \left(\frac{k+1}{2}\right)^{k+1}$$

$\therefore\ p(k+1)$ સત્ય છે.

આમ, $p(k)$ સત્ય છે. $\Rightarrow p(k + 1)$ સત્ય છે. $k > 5$

$\therefore\ p(n)$ દરેક $n > 5$, $n \in \mathrm{N}$ માટે સત્ય છે.

(19) વિધાન $n^n < 3^n \cdot n!$, $n \geq 6$ માટે સત્ય છે તેમ સાબિત કરો.

ઉકેલ : $p(n) : n^n < 3^n \cdot n!$ $\qquad n \geq 6$

$n = 6$ લેતાં, $6^6 < 3^6 \cdot 6! \iff \frac{6^6}{3^6} < 720 \iff 2^6 < 720$

$64 < 720$ સત્ય છે જ. આથી $p(6)$ સત્ય છે.

ધારો કે $p(k)$ સત્ય છે. $k \geq 6$

$$\therefore\ k\,! > \frac{k^k}{3^k}$$

$$\therefore\ (k+1)\,k\,! > \frac{k^k}{3^k}\,\frac{(k+1)}{3}\,3$$

$$\therefore\ (k+1)\,! > \frac{k^k}{3^{k+1}}\,(k+1)\,3 > \frac{k^k}{3^{k+1}}(k+1)\left(1+\frac{1}{k}\right)^k \qquad \left[\left(1+\frac{1}{k}\right)^k < 3\right]$$

$$\therefore\ (k+1)\,! > \frac{k^k}{3^{k+1}}\,(k+1)\,\frac{(k+1)^k}{k^k}$$

$$\therefore\ (k+1)! > \frac{(k+1)^{k+1}}{3^{k+1}}$$

$\therefore (k + 1)^{k+1} < 3^{k+1} (k + 1)!$

$\therefore p(k+1)$ સત્ય છે.

$\therefore p(k)$ સત્ય છે. $\Rightarrow p(k + 1)$ સત્ય છે. $k \geq 6$

$\therefore p(n)$, દરેક $n \geq 6$ માટે સત્ય છે.

નોંધ : અહીં $\left(1+\frac{1}{k}\right)^k = 1 + \binom{k}{1}\frac{1}{k} + \binom{k}{2}\left(\frac{1}{k}\right)^2 + \binom{k}{3}\left(\frac{1}{k}\right)^3 + \ldots$ $(k + 1)$ પદ

$$= 1 + 1 + \frac{k(k-1)}{2k^2} + \frac{k(k-1)(k-2)}{3!k^3} + \ldots \ (k + 1) \text{ પદ}$$

$$= 1 + 1 + \frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{k}\right) + \frac{\left(1-\frac{1}{k}\right)\left(1-\frac{2}{k}\right)}{3!} + \ldots \ (k + 1) \text{ પદ}$$

$$< 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \ldots \text{ અનંત પદ}$$

$$< 1 + \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \ldots \text{ અનંત પદ}\right) = 1 + \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 3$$

$$\therefore \left(1+\frac{1}{k}\right)^k < 3$$

(20) ગણિતીય અનુમાનના સિદ્ધાંત પરથી સાબિત કરો.

$p(n) : 1^2 - 2^2 + 3^2 - 4^2 + \ldots + (2n - 1)^2 - (2n)^2 = - n (2n + 1), n \in N$

ઉકેલ : $n = 1$ માટે ડા.બા. $= 1^2 - 2^2 = -3$. જ.બા. $= -1 (2 +1) = -3$

$\therefore p(1)$ સત્ય છે. ધારો કે, $p(k)$ સત્ય છે. $k \in N$

$\therefore p(k) : 1^2 - 2^2 + 3^2 - 4^2 + \ldots - (2k)^2 = -k (2k + 1)$ સત્ય છે. (1)

પરિણામ (1) ની બંને બાજુ $(2k +1)^2 - (2k +2)^2$ ઉમેરતાં,

$1^2 - 2^2 + 3^2 - 4^2 + \ldots - (2k)^2 + (2k + 1)^2 - (2k + 2)^2$

$= - k (2k + 1) + (2k + 1)^2 - (2k + 2)^2$

$= - 2k^2 - k + (4k + 3) (-1)$

$= - (2k^2 + k + 4k + 3) \quad = - (2k^2 + 5k + 3) \quad = - (k +1) (2k + 3)$

$\therefore p(k+1)$ સત્ય છે.

$\therefore p(k)$ સત્ય છે. $\Rightarrow p(k + 1)$ સત્ય છે. $k \in N$

$\therefore p(n)$ દરેક $n \in N$ માટે સત્ય છે.

(21) ગણિતીય અનુમાનના સિદ્ધાંત પરથી સાબિત કરો : $1^2 - 2^2 + 3^2 - 4^2 + \ldots - n^2 = -\frac{n(n+1)}{2}$, n યુગ્મ, $n \in N$

ઉકેલ : n યુગ્મ છે. $\therefore n = 2m$ ધારીને ઉપર મુજબ સાબિત કરી શકાય.

(22) ગણિતીય અનુમાનના સિદ્ધાંત પરથી સાબિત કરો કે, જો $(x + 3)\ y = 1$, તો $\frac{d^n y}{dx^n} = \frac{(-1)^n \cdot n!}{(x+3)^{n+1}}$, $\forall\ n \in N$

ઉકેલ : $p(n) : \frac{d^n y}{dx^n} = \frac{(-1)^n \cdot n!}{(x+3)^{n+1}}$, જ્યાં $y = \frac{1}{x+3}$

$n = 1$ માટે, $\frac{dy}{dx} = \frac{(-1)^1 \cdot 1!}{(x+3)^{1+1}} = \frac{-1}{(x+3)^2}$ સત્ય છે કારણ કે $y = \frac{1}{3x+1}$

ધારો કે, $p(k)$ સત્ય છે. $k \in N$ $p(k) : \frac{d^k y}{dx^k} = \frac{(-1)^k \cdot k!}{(x+3)^{k+1}}$ સત્ય છે. $k \in N$ (1)

અહીં $\frac{d^{k+1} y}{dx^{k+1}} = \frac{d}{dx}\left(\frac{d^k y}{dx^k}\right)$

$= \frac{d}{dx}\frac{(-1)^k \cdot k!}{(x+3)^{k+1}}$ ((1) પરથી)

$= (-1)^k\ k!\ \frac{d}{dx}(x + 3)^{-(k+1)}$

$= (-1)^k\ k!\ (-1)\ (k + 1)\ (x + 3)^{-(k+1)-1} = (-1)^{k+1}\ (k + 1)!\ (x + 3)^{-(k+2)} = \frac{(-1)^{k+1}\ (k+1)!}{(x+3)^{k+2}}$

$\therefore$ $p(k+1)$ સત્ય છે.

આમ, $p(k)$ સત્ય છે. $\Rightarrow p(k + 1)$ સત્ય છે. $\forall\ k \in N$

$\therefore$ વિધાન $p(n)$ દરેક $n \in N$ માટે સત્ય છે.

(23) જો $a_n = \sqrt{7+\sqrt{7+\sqrt{7+\dots}}}$ n વખત તો ગણિતીય અનુમાનના સિદ્ધાંત પરથી કયું સત્ય છે. (AIEEE : 2002)

(A) $a_n > 7, \forall\ n \geq 1$ (B) $a_n > 3, \forall\ n \geq 1$ (C) $a_n < 4, \forall\ n \geq 1$ (D) $a_n < 3, \forall\ n \geq 1$

ઉકેલ : $p(n) : a_n = \sqrt{7+\sqrt{7+\sqrt{7+\dots}}}$ n વખત

$n = 1$ લેતાં, $a_1 = \sqrt{7}$ આથી $a_1 < 7$ હોવાથી $a_n > 7$ સત્ય નથી.

$a_1 > 3$ સત્ય નથી. $a_1 = \sqrt{7} < 4$ અને $a_1 = \sqrt{7} < 3$ સત્ય છે.

$a_2 = \sqrt{7+\sqrt{7}}$

અહીં $2 < \sqrt{7} < 3 \Rightarrow 9 < 7 + \sqrt{7} < 10 < 16 \Rightarrow 3 < \sqrt{7+\sqrt{7}} < 4 \Rightarrow 3 < a_2 < 4$

$\therefore$ $a_2 < 3$ સત્ય નથી. પરંતુ $a_2 < 4$ સત્ય છે.

આમ, $a_1 < 4$, $a_2 < 4$ સત્ય છે.

ધારો કે $a_k < 4$

હવે $a_{k+1} = \sqrt{7+\sqrt{7+\sqrt{7+\ldots}}}$ $k+1$ વખત

$= \sqrt{7+a_k}$

$\therefore a^2_{k+1} = 7 + a_k < 7 + 4$. આથી $a_{k+1} < \sqrt{11} < 4$ આથી $a_{k+1} < 4$

આમ, $a_n < 4$, $n = k+1$ માટે સત્ય છે.

$\therefore a_n < 4, \quad \forall\ n \in N$ **જવાબ :** (C)

(24) જો $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ અને $I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ તો નીચેના પૈકી કયું દરેક $n \ge 1$, $n \in N$ માટે સત્ય છે ?

(AIEEE : 2005)

(A) $A^n = 2^{n-1} A + (n-1) I$ (B) $A^n = nA + (n-1) I$

(C) $A^n = 2^{n-1} A - (n-1) I$ (D) $A^n = nA - (n-1) I$

ઉકેલ : $A^1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = 2^{1-1} A + (1-1) I = A$ (A)

$= (1) A + (1-1) I = A$ (B)

$= 2^{1-1} A - (1-1) I = A$ (C)

$= (1) A - (1-1) I = A$ (D)

$n = 1$ માટે, (A), (B), (C), (D) ચારે સત્ય છે.

$n = 2$ માટે, $A^2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} = 2\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = 2A - (2-1) I$

$\therefore n = 2$ માટે (A) અસત્ય છે.

$\therefore n = 2$ માટે (B) અસત્ય છે. (C) અને (D) સત્ય છે.

$n = 3$ લેતાં $A^3 = A^2 \cdot A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \ne 4A + 2I$

(A) સત્ય નથી. (B) પણ સત્ય નથી.

(C) માં જ.બા.માં $n = 3$ લેતાં, $2^2A - 2I = 4\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$

$\therefore n = 3$ માટે (C) સત્ય નથી.

(D) માં જ.બા.માં $n = 3$ લેતાં $3A - (3-1)I = 3\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} = A^3$$

$\therefore$ $n = 3$ માટે (D) સત્ય છે.

(D) એ $n = 1, 2, 3$ માટે સત્ય છે.

$\therefore$ ધારો કે $p(n) : A^n = nA - (n-1)\,I$ એ $n = k$ માટે સત્ય છે.

અહીં $A^{k+1} = A^k \cdot A = (kA - (k-1)\,I)\,A$

$$= kA^2 - (k-1)\,A$$

$$= k\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} - (k-1)\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} k-(k-1) & 0 \\ 2k-(k-1) & k-(k-1) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ k+1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k+1 & 0 \\ k+1 & k+1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{bmatrix}$$

$$= (k+1)\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} - k\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= (k+1)\,A - kI$$

$\therefore$ $p(k+1)$ સત્ય છે.

$\therefore$ $p(k)$ સત્ય છે. $\Rightarrow p(k+1)$ સત્ય છે. $\forall\, k \in N$

$\therefore$ $p(n)$, $\forall\, n \in N$ માટે સત્ય છે. **જવાબ :** (D)

(25) $8^{2n} - 62^{2n+1}$ ને 9 વડે ભાગતાં શેષ ...... મળે. (AIEEE : 2009)

(A) 2 (B) 7 (C) 8 (D) 0

ઉકેલ : $8 \equiv -1 \pmod 9$ તથા $62 \equiv -1 \pmod 9$

$$\therefore\ 8^{2n} - (62)^{2n+1} \equiv [(-1)^{2n} - (-1)^{2n+1}] \pmod 9$$
$$\equiv (1+1) \pmod 9$$
$$\equiv 2 \pmod 9$$

$\therefore$ $8^{2n} - (62)^{2n+1}$ ને 9 વડે ભાગતાં શેષ 2 મળે. **જવાબ :** (A)

(26) $\frac{n^7}{7} + \frac{n^5}{5} + \frac{2n^3}{3} - \frac{n}{105}$ એ દરેક $n \in N$ માટે પૂર્ણાંક સંખ્યા છે તેમ સાબિત કરો. (IIT-1990)

ઉકેલ : $p(n) : \frac{1}{7}n^7 + \frac{1}{5}n^5 + \frac{2}{3}n^3 - \frac{1}{105}n$ એ પૂર્ણાંક છે. $n \in N$

$n = 1$ લેતાં, $\frac{1}{7} + \frac{1}{5} + \frac{2}{3} - \frac{1}{105} = \frac{1}{105}[15 + 21 + 70 - 1] = 1$ પૂર્ણાંક છે.

$\therefore$ $p(1)$ સત્ય છે.

ધારો કે $p(k)$ સત્ય છે, $k \in N$

$p(k) : \frac{1}{7}k^7 + \frac{1}{5}k^5 + \frac{2}{3}k^3 - \frac{1}{105}k$ એ પૂર્ણાંક છે. $k \in N$ (1)

$n = k + 1$ લેતાં,

$\frac{1}{7}\ (k+1)^7 + \frac{1}{5}\ (k+1)^5 + \frac{2}{3}\ (k+1)^3 - \frac{1}{105}(k+1)$

$= \quad \frac{1}{7}\left(k^7 + 7k^6 + 21\ k^5 + + 35\ k^4 + 35\ k^{3\,+} + 21\ k^2 + 7k + 1\right) + \frac{1}{5}\left(k^5 + 5k^4 + 10\ k^3 + 10\ k^2\right.$

$\left. + 5k + 1\right) + \frac{2}{3}\left(k^3 + 3k^2 + 3\ k + 1\right) - \frac{1}{105}(k+1)$

$= \quad \left(\frac{1}{7}\ k^7 + \frac{1}{5}\ k^5 + \frac{2}{3}\ k^3 - \frac{1}{105}k\right) + \left(k^6 + 3k^5 + + 6k^4 + 7k^{3\,+} + 7k^2 + 4k\right) + 1$

$=$ પૂર્ણાંક + પૂર્ણાંક + 1 = પૂર્ણાંક (1) પરથી

$\therefore\ p(k+1)$ સત્ય છે.

આમ, $p(k)$ સત્ય છે. $\Rightarrow p(k+1)$ સત્ય છે. $k \in \mathrm{N}$

$\therefore\ p(n), \forall\ n \in \mathrm{N}$ માટે સત્ય છે. (ગણિતીય અનુમાનના સિદ્ધાંત પરથી)

$\therefore\ \frac{n^7}{7} + \frac{n^5}{5} + \frac{2n^3}{3} - \frac{n}{105}$ પૂર્ણાંક છે. $\forall\ n \in \mathrm{N}$ **જવાબ :** (D)

(27) ગણિતીય અનુમાનના સિદ્ધાંત પરથી સાબિત કરો :

$$\sum_{m=0}^{k}(n-m)\frac{(r+m)!}{m!} = \frac{(r+k+1)!}{k!}\left[\frac{n}{r+1}-\frac{k}{r+2}\right]$$ જ્યાં m, n, r, k અનૃણ પૂર્ણાંકો છે. (IIT : 1991)

ઉકેલ : અહીં અનૃણ પૂર્ણાંક k માટે ગણિતીય અનુમાનનો સિદ્ધાંત વાપરવો પડશે.

$k = 0$ લેતાં, ડા.બા. $= \sum_{m=0}^{0}(n-m)\frac{(r+m)!}{m!} = \frac{(n-0)(r+0)!}{0!} = n(r!)$

જ.બા. $= \frac{(r+0+1)!}{0!}\left[\frac{n}{r+1}-\frac{0}{r+2}\right] = n \cdot r!$

$\therefore\ k = 0$ માટે વિધાન સત્ય છે.

ધારો કે $k = p$ માટે વિધાન સત્ય છે. p અનૃણ પૂર્ણાંક છે.

$$\therefore\ \sum_{m=0}^{p}(n-m)\frac{(r+m)!}{m!} = \frac{(r+p+1)!}{p!}\left[\frac{n}{r+1}-\frac{p}{r+2}\right] \qquad (1)$$

$k = p + 1$ માટે ડા.બા. $= \sum_{m=0}^{p+1}(n-m)\frac{(r+m)!}{m!}$

$$= \sum_{m=0}^{p}(n-m)\frac{(r+m)!}{m!} + (n-p-1)\frac{(r+p+1)!}{(p+1)!}$$

$$= \frac{(r+p+1)!}{p!}\left(\frac{n}{r+1}-\frac{p}{r+2}\right) + (n-p-1)\frac{(r+p+1)!}{(p+1)!} \qquad \text{(1) પરથી}$$

$$= \frac{(r+p+1)!}{p!}\left(\frac{n}{r+1}-\frac{p}{r+2}+\frac{n}{p+1}-1\right)$$

$$= \frac{(r+p+1)!}{p!}\left[\frac{np+n+nr+n}{(r+1)(p+1)} - \frac{p+r+2}{r+2}\right]$$

$$= \frac{(r+p+1)!}{p!}\left[\frac{n(p+r+2)}{(r+1)(p+1)} - \frac{p+r+2}{r+2}\right]$$

$$= \frac{(r+p+2)!}{(p+1)!}\left[\frac{n}{r+1} - \frac{p+1}{r+2}\right] = \text{જ.બા.}$$

$\therefore$ વિધાન $k + 1$ માટે સત્ય છે.

$\therefore$ આપેલ વિધાન દરેક અનૃણ k માટે સત્ય છે.

$\therefore$ ગણિતીય અનુમાનના સિદ્ધાંત પરથી વિધાન દરેક અનૃણ k, n, r, m માટે સત્ય છે.

(28) ગણિતીય અનુમાનના સિદ્ધાંત પરથી સાબિત કરો કે, $3^{2^n} - 1$ એ 2^{n+2} વડે વિભાજ્ય છે પરંતુ 2^{n+3} વડે વિભાજ્ય નથી. $\forall\ n \in N$ (IIT : 1996)

ઉકેલ : $p(n)$: $3^{2^n} - 1$ એ 2^{n+2} વડે વિભાજ્ય છે પરંતુ 2^{n+3} વડે વિભાજ્ય નથી. $n \in N$

$\therefore p(1) : 3^{2^1} - 1 = 8$ એ 2^3 વડે વિભાજ્ય છે પરંતુ 2^4 વડે વિભાજ્ય નથી. આથી $P(1)$ સત્ય છે.

ધારો કે $p(k)$ સત્ય છે. $k \in N$

$\therefore$ $3^{2^k} - 1$ એ 2^{k+2} વડે વિભાજ્ય છે પણ 2^{k+3} વડે વિભાજ્ય નથી.

ધારો કે $3^{2^k} - 1 = m \cdot 2^{k+2}$ જ્યાં m અયુગ્મ પૂર્ણાંક છે, જેથી તે 2^{k+3} વડે વિભાજ્ય ન બને.

હવે $3^{2^{k+1}} = (3^{2^k})^2 = (1 + m \cdot 2^{k+2})^2$ $\quad \because$ (1) પરથી

$= 1 + 2m \cdot 2^{k+2} + m^2\ 2^{2k+4}$

$= m \cdot 2^{k+3} + m^2\, 2^{k+1}\, 2^{k+3} + 1$

$= m \cdot 2^{k+3}\,(1 + m\,2^{k+1}) + 1$

અહીં m તથા $1 + m\,2^{k+1}$ બંને અયુગ્મ પૂર્ણાંક છે માટે $3^{2^{k+1}} - 1$ એ 2^{k+3} વડે વિભાજ્ય છે પરંતુ 2^{k+4} વડે વિભાજ્ય નથી.

$\therefore p(k + 1)$ માટે સત્ય છે.

આમ, $p(k)$ સત્ય છે. $\Rightarrow p(k + 1)$ સત્ય છે.

$\therefore$ વિધાન $p(n)$, દરેક $n \in N$ માટે સત્ય છે.

નિષ્કર્ષ અને કારક પ્રકારના પ્રશ્નો

આ પ્રકારના પ્રશ્નોમાં બે વિધાન આપેલાં હોય છે. આ બંને વિધાનો પૈકી સ્વતંત્ર રીતે એક સત્ય અને બીજું અસત્ય હોઈ શકે અથવા બંને સત્ય હોય તો વિધાન 2 એ વિધાન 1ની સાચી સમજૂતી છે કે નહિ તે તપાસવાનું રહે છે.

વિધાન 1 : નિષ્કર્ષ

વિધાન 2 : કારક

આ પ્રકારના પ્રશ્નોમાં 4 વિકલ્પો (A), (B), (C) તથા (D) નીચે મુજબ હોય છે :

(A) વિધાન 1 તથા વિધાન 2 બંને સત્ય છે તથા વિધાન 2 એ વિધાન 1ની સમજૂતી માટે પર્યાપ્ત છે.

(B) વિધાન 1 તથા વિધાન 2 બંને સત્ય છે તથા વિધાન 2 એ વિધાન 1ની યોગ્ય સમજૂતી માટે પર્યાપ્ત નથી.

(C) વિધાન 1 સત્ય છે તથા વિધાન 2 અસત્ય છે.

(D) વિધાન 1 અસત્ય છે તથા વિધાન 2 સત્ય છે.

(29) **વિધાન 1 :** $n^2 + n + 41$ એ કોઈક $n \in N$ માટે અવિભાજ્ય સંખ્યા નથી.

વિધાન 2 : દરેક અયુગ્મ પ્રાકૃતિક સંખ્યા એ અવિભાજ્ય સંખ્યા છે.

ઉકેલ : $n = 41$ લેતાં $n^2 + n + 41 = 41^2 + 41 + 41 = 41 \times 43$ અવિભાજ્ય નથી.

$\therefore$ વિધાન 1 સત્ય છે.

1 એ અયુગ્મ પ્રાકૃતિક સંખ્યા છે. પરંતુ વિભાજ્ય કે અવિભાજ્ય નથી, એકમ પૂર્ણાંક છે.

$\therefore$ વિધાન 2 અસત્ય છે.

$\therefore$ વિધાન 1 સત્ય છે તથા વિધાન 2 અસત્ય છે. **જવાબ :** (C)

(30) **વિધાન 1 :** દરેક $n \in N$ માટે $(n + 1)^7 - n^7 - 1$ એ 7 વડે વિભાજ્ય છે.

વિધાન 2 : દરેક $n \in N$ માટે $n^7 - n$ એ 7 વડે વિભાજ્ય છે. (AIEEE : 2011)

ઉકેલ : વિધાન 2 માટે

$p(n) : n^7 - n$ એ 7 વડે વિભાજ્ય છે. $\forall \ n \in N$

$\therefore p(1) : 1^7 - 1 = 0$ એ 7 વડે વિભાજ્ય છે.

$\therefore p(1)$ સત્ય છે.

ધારો કે $p(k) : k^7 - k$ એ 7 વડે વિભાજ્ય છે, સત્ય છે. ધારો કે $k^7 - k = 7m, \ m \in N$ (1)

$$(k + 1)^7 - (k + 1) = k^7 + \binom{7}{1} k^6 + \binom{7}{2} k^5 + ... + 7k + 1 - k - 1$$

$$= (k^7 - k) + \binom{7}{1} k^6 + \binom{7}{2} k^5 + ... + \binom{7}{6} k$$

$k^7 - k$ એ 7 વડે વિભાજ્ય છે, કારણ કે $\binom{7}{r}$ એ 7 વડે વિભાજ્ય છે. (I પરથી)

$\therefore p(k + 1)$ સત્ય છે.

$\therefore p(n)$ પ્રત્યેક $n \in N$ માટે સત્ય છે.

$\therefore$ વિધાન 2 સત્ય છે.

વિધાન 1 વિચારીએ

વિધાન 2 પરથી $n^7 - n$ એ 7 વડે વિભાજ્ય છે. $\forall \ n \in N$

$\therefore (n + 1)^7 - (n + 1)$ એ 7 વડે વિભાજ્ય છે.

$\therefore (n + 1)^7 - (n + 1) = 7m, \ m \in N$ તથા $n^7 - n = 7p, \quad p \in N$

$\therefore (n + 1)^7 - n^7 + n^7 - n - 1 = 7m$

$\therefore [(n + 1)^7 - n^7 - 1] + (n^7 - n) = 7m$

$\therefore (n + 1)^7 - n^7 - 1 = 7 (m - p)$

$\therefore (n + 1)^7 - n^7 - 1$ એ 7 વડે વિભાજ્ય છે. $\forall \ n \in N$

∴ વિધાન 1 પણ સત્ય છે.

∴ વિધાન 1 તથા વિધાન 2 બંને સત્ય છે તથા વિધાન 2 એ વિધાન 1ની સમજૂતી માટે પર્યાપ્ત છે.

જવાબ : (A)

(31) **વિધાન 1 :** $p(n)$: 111...1 (n વખત) એ કોઈક $n \in N - \{1\}$ માટે અવિભાજ્ય સંખ્યા નથી.

વિધાન 2 : $p(n)$: 111...1 (n વખત) એ $n = 91$ માટે વિભાજ્ય સંખ્યા છે.

ઉકેલ : વિધાન 2 માં $n = 91$ લેતાં,

111...1 (91) વખત

$= 1 + 10 + 10^2 + 10^3 + ... + 10^{90}$

$= 1 \frac{(10^{91} - 1)}{10 - 1}$

$= \frac{10^{91} - 1}{9} = \frac{\left(10^7\right)^{13} - 1}{9}$ ($10^7 = t$ લેતા)

$= \frac{(10^7 - 1)}{9} (10^{84} + 10^{77} + ... + 10^7 + 1)$

$= \frac{(10-1)(10^6 + 10^5 + ... + 10 + 1)(10^{84} + 10^{77} + ... + 10^7 + 1)}{9}$

$= (10^6 + 10^5 + ... + 10 + 1)(10^{84} + 10^{77} + 10^{70} + ... + 10^7 + 1)$ વિભાજ્ય સંખ્યા છે.

વિધાન 2 સત્ય છે.

∴ 111...1 (91 વખત) અવિભાજ્ય સંખ્યા નથી.

∴ વિધાન 1 પણ સત્ય છે.

આમ બંને વિધાન સત્ય છે અને વિધાન 2 એ વિધાન 1ની સમજૂતી માટે પર્યાપ્ત છે. **જવાબ :** (A)

●