

6004 (Old)



Total No. of Questions—15

Total No. of Printed Pages—8

Regd. No.

--	--	--	--	--	--	--	--	--	--

MATHEMATICS (Bridge Course)—I

Paper I

(English Version)

Time : 3 Hours

Max. Marks : 75

Note :— Answer *all* questions from Section A and *three* questions from Section B.

SECTION A

10×3=30

Note :— (i) Answer ALL questions.

(ii) Each question carries THREE marks.

1. Find the value of $\sqrt{8 + 2\sqrt{15}}$.
2. If $x = \frac{2 + \sqrt{3}}{2 - \sqrt{3}}$, then find $x^2 - 14x + 1$.
3. Show that :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x} - 1}{x} = \frac{1}{2}.$$

4. Find the derivative of $x^2 \log x$.
5. Find the equation to the locus of points which are equidistant from the points $(-2, 3)$, $(3, 5)$.
6. If the axes are rotated through an angle 30° , then find the coordinates of $(2\sqrt{3}, -4)$ in the new system.
7. Show that the points $(2, 3, 5)$, $(-1, 5, -1)$ and $(4, -3, 2)$ form a right-angled isosceles triangle.
8. If $A + B = \pi/4$, then prove that $(1 + \tan A)(1 + \tan B) = 2$.

9. Prove that $\sin 50^\circ - \sin 70^\circ + \sin 10^\circ = 0$.

10. If $\sec \theta + \tan \theta = \frac{2}{3}$, find the value of $\sin \theta$.

SECTION B

3×15=45

Note :—(i) Answer ANY THREE questions.

(ii) Each question carries FIFTEEN marks.

11. (i) (a) Find the cube root of $16 + 8\sqrt{5}$.

(b) Prove that :

$$\frac{3}{\sqrt{11-4\sqrt{7}}} - \frac{1}{\sqrt{7+4\sqrt{3}}} - \frac{4}{\sqrt{10-\sqrt{84}}} = 0.$$

Or

(ii) (a) By using the principle of Mathematical induction prove that :

$$a + (a + d) + (a + 2d) + \dots \text{ upto } n \text{ terms} = \frac{n}{2} [2a + (n - 1)d].$$

(b) By using the principle of Mathematical induction prove that :

$$\frac{1}{1.5} + \frac{1}{5.9} + \frac{1}{9.13} + \dots \text{ } n \text{ terms} = \frac{n}{4n+1}, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

12. (i) (a) Check the continuity of the function at 2 if :

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}(x^2 - 4) & \text{if } 0 < x < 2 \\ 0 & \text{if } x = 2 \\ 2 - 8x^{-3} & \text{if } x > 2 \end{cases}$$

(b) If $f(x) = e^{2x} \log x$, then find $f'(x)$.

Or

(ii) (a) If $\sqrt{1-x^2} + \sqrt{1-y^2} = a(x-y)$, then prove that $\frac{dy}{dx} = \sqrt{\frac{1-y}{1-x}}$

- (b) Find the equations of tangent and normal to the curve $y = x^3 + 4x^2$ at $(-1, 3)$.

13. (i) (a) Find the orthocentre of the triangle whose vertices are $(-2, -1)$, $(6, -1)$ and $(2, 5)$.
- (b) Find the value of p , if the straight lines $3x + 7y - 1 = 0$ and $7x - py + 3 = 0$ are mutually perpendicular.

Or

- (ii) (a) Show that the product of the perpendicular distances from a point (α, β) to the pair of straight lines $ax^2 + 2hxy + by^2 = 0$ is :

$$\left| \frac{a\alpha^2 + 2h\alpha\beta + b\beta^2}{\sqrt{(a-b)^2 + 4h^2}} \right|.$$

- (b) Find the angle between the lines joining the origin to the points of intersection of the curve $x^2 + 2xy + y^2 + 2x + 2y - 5 = 0$ and the line $3x - y + 1 = 0$.

14. (i) (a) If A, B, C are angles of a triangle, prove that :

$$\cos 2A - \cos 2B + \cos 2C = 1 - 4 \sin A \cos B \sin C.$$

- (b) Prove that :

$$\sin^{-1}\left(\frac{4}{5}\right) + \sin^{-1}\left(\frac{5}{13}\right) + \sin^{-1}\left(\frac{16}{65}\right) = \frac{\pi}{2}.$$

Or

- (ii) (a) Solve $2 \cos^2 \theta + 11 \sin \theta = 7$.

- (b) Show that :

$$\frac{1}{r^2} + \frac{1}{r_1^2} + \frac{1}{r_2^2} + \frac{1}{r_3^2} = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{\Delta^2}.$$

15. (i) (a) If $x = \frac{\sqrt{5}-2}{\sqrt{5}+2}$, find the values of $x + \frac{1}{x}$ and $x^2 + \frac{1}{x^2}$.

(b) Using Euler's theorem show that $x u_x + y u_y = \frac{1}{2} \tan u$ for the function :

$$u = \sin^{-1} \left(\frac{x+y}{\sqrt{x} + \sqrt{y}} \right).$$

Or

(ii) (a) Find the direction cosines of two lines which are connected by the relations :

$$l + m + n = 0 \text{ and}$$

$$mn - 2nl - 2lm = 0.$$

(b) A tree stands vertically on the slant of the hill. From a point A on the ground 35 meters down the hill from the base of the tree, the angle of elevation of the top of the tree is 60° . If the angle of elevation of the foot of the tree from A is 15° , then find the height of the tree.

6004 (Old)

(Telugu Version)

Time : 3 Hours

Max. Marks : 75

సూచనలు :— Section A నుండి అన్నింటికీ మరియు Section B నుండి ఏదైనా మూడు ప్రశ్నలకు సమాధానములు వ్రాయుము.

SECTION A

10×3=30

సూచనలు:—(i) అన్ని ప్రశ్నలకు సమాధానములు వ్రాయుము.

(ii) ప్రతి ప్రశ్నకు మూడు మార్కులు.

1. $\sqrt{8 + 2\sqrt{15}}$ విలువ కనుగొనుము.
2. $x = \frac{2 + \sqrt{3}}{2 - \sqrt{3}}$ అయితే $x^2 - 14x + 1$ విలువ కనుగొనుము.
3. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x} - 1}{x} = \frac{1}{2}$ అని చూపండి.
4. $x^2 \log x$ యొక్క అవకలజాన్ని కనుక్కోండి.
5. $(-2, 3), (3, 5)$ బిందువుల నుంచి సమాన దూరంలో ఉండే బిందు పథ సమీకరణాన్ని కనుక్కోండి.
6. 30° కోణంతో అక్షాలను భ్రమణంచేసినప్పుడు $(2\sqrt{3}, -4)$ బిందువు యొక్క కొత్త నిరూపకాలను కనుక్కోండి.
7. $(2, 3, 5), (-1, 5, -1), (4, -3, 2)$ బిందువులు సమద్విబాహు లంబకోణ త్రిభుజాన్ని ఏర్పరుస్తాయని చూపండి.
8. $A + B = \pi/4$ అయితే $(1 + \tan A)(1 + \tan B) = 2$ అని నిరూపించండి.

9. $\sin 50^\circ - \sin 70^\circ + \sin 10^\circ = 0$ అని నిరూపించండి.

10. $\sec \theta + \tan \theta = \frac{2}{3}$ అయితే $\sin \theta$ విలువ కనుక్కోండి.

SECTION B

3×15=45

సూచనలు:—(i) ఏదైనా మూడు ప్రశ్నలకు సమాధానాలు వ్రాయండి.

(ii) ప్రతి ప్రశ్నకు పదిహేను మార్కులు.

11. (i) (a) $16 + 8\sqrt{5}$ యొక్క ఘన మూలాన్ని కనుక్కోండి.

(b) $\frac{3}{\sqrt{11-4\sqrt{7}}} - \frac{1}{\sqrt{7+4\sqrt{3}}} - \frac{4}{\sqrt{10-\sqrt{84}}} = 0$ అని నిరూపించండి.

లేదా

(ii) (a) గణితాను గమన వద్దతి ఉపయోగించి :

$$a + (a + d) + (a + 2d) + \dots \dots \dots (n \text{ పదాలవరకు}) = \frac{n}{2} [2a + (n - 1)d] \text{ అని నిరూపించండి.}$$

(b) గణితాను గమన వద్దతి నుపయోగించి :

$$\frac{1}{1.5} + \frac{1}{5.9} + \frac{1}{9.13} + \dots \dots \dots (n \text{ పదాలవరకు}) = \frac{n}{4n+1}, \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

అని నిరూపించండి.

12. (i) (a) క్రింది ప్రమేయానికి 2 వద్ద అవిచ్ఛిన్నతను పరిశీలించండి :

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}(x^2 - 4) & 0 < x < 2 \text{ అయితే} \\ 0 & x = 2 \text{ అయితే} \\ 2 - 8x^{-3} & x > 2 \text{ అయితే} \end{cases}$$

(b) $f(x) = e^{2x} \log x$ అయితే $f'(x)$ విలువ కనుక్కోండి.

లేదా

(ii) (a) $\sqrt{1-x^2} + \sqrt{1-y^2} = a(x-y)$ అయితే $\frac{dy}{dx} = \sqrt{\frac{1-y^2}{1-x^2}}$ అని నిరూపించండి.

(b) $y = x^3 + 4x^2$ వక్రానికి $(-1, 3)$ బిందువు వద్ద స్పర్శరేఖ, అభిలంబ రేఖల సమీకరణాలు కనుక్కోండి.

13. (i) (a) $(-2, -1), (6, -1), (2, 5)$ శీర్షాలుగా గల త్రిభుజ లంబకేంద్రాన్ని కనుక్కోండి.

(b) $3x + 7y - 1 = 0, 7x - py + 3 = 0$ సరళరేఖలు లంబముగా ఉంటే p విలువ కనుక్కోండి.

లేదా

(ii) (a) $ax^2 + 2hxy + by^2 = 0$ అనే రేఖాయుగ్మం నుంచి (α, β) అనే బిందువుకు లంబ దూరాల లబ్ధం :

$$\left| \frac{a\alpha^2 + 2h\alpha\beta + b\beta^2}{\sqrt{(a-b)^2 + 4h^2}} \right| \text{ అని నిరూపించండి.}$$

(b) $3x - y + 1 = 0$ అనే రేఖ $x^2 + 2xy + y^2 + 2x + 2y - 5 = 0$ అనే వక్రాన్ని ఖండించే బిందువులను మూలబిందువుకు కలిపితే వచ్చే రేఖల మధ్యకోణాన్ని కనుక్కోండి.

14. (i) (a) A, B, C లు త్రిభుజంలోని కోణాలు అయితే :

$$\cos 2A - \cos 2B + \cos 2C = 1 - 4 \sin A \cos B \sin C \text{ అని నిరూపించండి.}$$

$$(b) \sin^{-1}\left(\frac{4}{5}\right) + \sin^{-1}\left(\frac{5}{13}\right) + \sin^{-1}\left(\frac{16}{65}\right) = \frac{\pi}{2} \text{ అని నిరూపించండి.}$$

లేదా

$$(ii) (a) 2 \cos^2 \theta + 11 \sin \theta = 7 \text{ సాధించండి.}$$

$$(b) \frac{1}{r^2} + \frac{1}{r_1^2} + \frac{1}{r_2^2} + \frac{1}{r_3^2} = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{\Delta^2} \text{ అని చూపండి.}$$

15. (i) (a) $x = \frac{\sqrt{5} - 2}{\sqrt{5} + 2}$ అయితే $x + \frac{1}{x}$ మరియు $x^2 + \frac{1}{x^2}$ విలువలు కనుక్కోండి.

(b) అయిలర్ సిద్ధాంతమును ఉపయోగించి

$$u = \sin^{-1} \left(\frac{x + y}{\sqrt{x} + \sqrt{y}} \right) \text{ అయితే}$$

$$x u_x + y u_y = \frac{1}{2} \tan u \text{ అని చూపండి.}$$

లేదా

(ii) (a) రెండు సరళరేఖల దిక్ కొసైన్లు

$l + m + n = 0, mn - 2nl - 2lm = 0$ సమీకరణాలను తృప్తిపరుస్తాయి. ఆ దిక్ కొసైన్లు ఏవి?

(b) కొండవాలుపై నిటారుగా ఒక చెట్టు ఉన్నది. చెట్టు పాదం నుంచి 35 మీ. దూరంలో A అనే బిందువు నుంచి చెట్టు పైభాగానికి ఊర్ధ్వ కోణం 60° . చెట్టు పాదానికి A నుంచి చేసే ఊర్ధ్వ కోణం 15° అయితే చెట్టు ఎత్తు ఎంత?