21 ત્રિપરિમાણીય ભૂમિતિ

- **અવકાશમાં રેખા**

અવકાશમાં આવેલાં કોઈ પણ બે ભિન્ન બિંદુઓ એક અનન્ય રેખા નિશ્ચિત કરે છે. અવકાશની રેખાને મુખ્યત્વે L, M, N,... વડે દર્શાવાય છે.

- **રેખાની દિશા**

જો R^3 ની રેખા L પર બે ભિન્ન બિંદુઓ A અને B હોય, તો $\overrightarrow{AB}$ અને $\overrightarrow{BA}$ આ બે વિરુદ્ધ દિશાના સદિશો છે.

જો $\overrightarrow{AB}$ ની દિશા $\vec{l}$ હોય, તો $\overrightarrow{BA}$ ની દિશા $-\vec{l}$ થશે. $\overleftrightarrow{AB}$ (અથવા રેખા L)ની દિશા $\pm\vec{l}$ લેવામાં આવે છે.

જો **રેખા L ની દિક્‌કોસાઈન એટલે કે તે રેખા પર આવેલા કોઈ પણ સદિશની દિક્‌કોસાઈન.** જો રેખા L ની દિક્‌કોસાઈન l, m, n હોય, તો રેખા L ની દિક્‌કોસાઈન $-l, -m, -n$ પણ થાય. અહીં, $l^2 + m^2 + n^2 = 1$.

- **બિંદુ $A(\vec{a})$ માંથી પસાર થતી તથા શૂન્યેતર સદિશ $\vec{l}$ ની દિશાવાળી રેખાનું સમીકરણ :**

    - **સદિશ સમીકરણ (Vector equations) :** $\vec{r} = \vec{a} + k\vec{l}$, $k \in R$.

    - **પ્રચલ સમીકરણ (Parametric equations) :** જો $\vec{r} = (x, y, z)$, $\vec{a} = (x_1, y_1, z_1)$ અને $\hat{l} = (l_1, l_2, l_3)$ હોય, તો રેખાના પ્રચલ સમીકરણ : $x = x_1 + kl_1,\ y = y_1 + kl_2,\ z = z_1 + kl_3\ (k \in R)$

    - **કાર્તેઝિય સમીકરણ (સંમિત સ્વરૂપ) (Symmetric form) :**

$$\frac{x - x_1}{l_1} = \frac{y - y_1}{l_2} = \frac{z - z_1}{l_3}\ (= k)$$

જો $l_1 = 0, l_2 \ne 0, l_3 \ne 0$, તો રેખાનાં સમીકરણ $x = x_1, \frac{y - y_1}{l_2} = \frac{z - z_1}{l_3}$ **અથવા**

$\frac{x - x_1}{0} = \frac{y - y_1}{l_2} = \frac{z - z_1}{l_3}$ (અહીં $x - x_1$ ના છેદમાં શૂન્યનો અર્થ સદિશ $\vec{l}$ નો પ્રથમ ઘટક $l_1 = 0$ તો $x = x_1$ તે જ પ્રમાણે, જો $l_1 = 0, l_2 = 0$ તો રેખાનું સમીકરણ $\frac{x - x_1}{0} = \frac{y - y_1}{0} = \frac{z - z_1}{l_3}$ થશે, એટલે કે $x = x_1, y = y_1, z$ સ્વૈર.)

જો રેખાની દિક્‌કોસાઈન l, m, n હોય, તો રેખાનું સમીકરણ $\frac{x - x_1}{l} = \frac{y - y_1}{m} = \frac{z - z_1}{n}$ થાય, જ્યાં $l^2 + m^2 + n^2 = 1$.

    - કોઈક $k \in R$ માટે $(x_1 + kl_1, y_1 + kl_2, z_1 + kl_3)$ એ રેખા પરનું કોઈ પણ બિંદુ થશે.

- **R^3 માં યામાક્ષોનાં સમીકરણ :**

X–અક્ષનું સમીકરણ $y = 0, z = 0$

Y – અક્ષનું સમીકરણ $z = 0, x = 0$

Z – અક્ષનું સમીકરણ $x = 0, y = 0$

- **બે ભિન્ન બિંદુમાંથી પસાર થતી રેખાનું સમીકરણ :**
  - **બે ભિન્ન બિંદુઓ** $A(\vec{a})$ અને $B(\vec{b})$ માંથી પસાર થતી રેખાનું સદિશ સમીકરણ :

    $\vec{r} = \vec{a} + k(\vec{b} - \vec{a}),\ k \in R$

  - **પ્રચલ સમીકરણ :** જો $\vec{r} = (x, y, z)$, $\vec{a} = (x_1, y_1, z_1)$ અને $\vec{b} = (x_2, y_2, z_2)$ હોય, તો રેખાના

    પ્રચલ સમીકરણ : $\left.\begin{aligned} x &= x_1 + k(x_2 - x_1) \\ y &= y_1 + k(y_2 - y_1) \\ z &= z_1 + k(z_2 - z_1) \end{aligned}\right\} k \in R$

  - **કાર્તેઝિય સમીકરણ :**

    $$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1}$$

    જો $x_1 = x_2$ તો સમીકરણ $\frac{x - x_1}{0} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1}$ થશે.

    જો $x_1 = x_2, y_1 = y_2$ તો $x = x_1, y = y_1, z$ સ્વૈર.

- **સમરેખ બિંદુઓ :**

  $A(\vec{a})$, $B(\vec{b})$ અને $C(\vec{c})$ અવકાશનાં ભિન્ન બિંદુઓ છે.

  - જો A, B, C સમરેખ હોય તો $[\vec{a}\ \vec{b}\ \vec{c}] = 0$
  - A, B, C **સમરેખ હોવાની આવશ્યક અને પર્યાપ્ત શરત** $(\vec{c} - \vec{a}) \times (\vec{b} - \vec{a}) = \vec{0}$
  - **પરિણામ :** જો $A(\vec{a})$, $B(\vec{b})$ અને $C(\vec{c})$ અવકાશમાં ભિન્ન બિંદુઓ હોય અને શૂન્યેતર વાસ્તવિક સંખ્યાઓ l, m, n એવી મળે કે જેથી $l + m + n = 0$ અને $l\vec{a} + m\vec{b} + n\vec{c} = \vec{0}$ **તો અને તો જ** $A(\vec{a})$, $B(\vec{b})$ અને $C(\vec{c})$ સમરેખ છે.

- **બે રેખા વચ્ચેના ખૂણાનું માપ**

  અવકાશની બે ભિન્ન રેખાઓ $L : \vec{r} = \vec{a} + k\vec{l},\ k \in R$ અને $M : \vec{r} = \vec{b} + k\vec{m},\ k \in R$ છે.

  (i) જો $\vec{l} = \vec{m}$ અથવા $\vec{l} = -\vec{m}$ તો $\vec{l} \times \vec{m} = \vec{0}$. તેથી બે રેખાઓ વચ્ચેના ખૂણાનું માપ શૂન્ય છે. બંને રેખાની દિશા સમાન છે, તેથી L અને M સંપાતી અથવા સમાંતર રેખાઓ છે.

  (ii) $\vec{l} \cdot \vec{m} = 0$ તો $\vec{l} \perp \vec{m}$ એટલે કે $L \perp M$. તેમની વચ્ચેના ખૂણાનું માપ $\frac{\pi}{2}$ થશે.

  (iii) $\vec{l} \neq \pm\vec{m}$ તથા $\vec{l} \cdot \vec{m} \neq 0$ અને L અને M વચ્ચેના ખૂણાનું માપ (લઘુકોણ) α હોય, તો

$$cos\alpha = \frac{|\vec{l} \cdot \vec{m}|}{|\vec{l}|\,|\vec{m}|},\ 0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$$

આ પરિણામ $\alpha = 0$ અને $\alpha = \frac{\pi}{2}$ માટે પણ સત્ય છે, એટલે કે $cos\alpha = \frac{|\vec{l} \cdot \vec{m}|}{|\vec{l}|\,|\vec{m}|},\ 0 \le \alpha \le \frac{\pi}{2}$.

- **બે રેખાઓ વચ્ચેનો કોણદ્વિભાજક**

બે છેદક રેખાઓનું છેદબિંદુ $A(\vec{a})$ હોય, તો તે બે રેખાનાં સમીકરણ $\vec{r} = \vec{a} + k\vec{l},\ k \in R$ અને $\vec{r} = \vec{a} + k\vec{m},\ k \in R$ લેતાં, તેમના વચ્ચેના **છેદકોણના દ્વિભાજકનું સમીકરણ** $\vec{r} = \vec{a} + t\left\{\frac{\vec{l}}{|\vec{l}|} \pm \frac{\vec{m}}{|\vec{m}|}\right\}$ થશે.

લઘુકોણના કોણ દ્વિભાજક (અંતઃ દ્વિભાજક) માટે '+' ચિહ્ન અને ગુરુકોણના કોણદ્વિભાજક (બર્હિદ્વિભાજક) માટે '–' ચિહ્ન લેવું.

- **બે ભિન્ન રેખાઓ $\vec{r} = \vec{a} + k\vec{l},\ k \in R$ અને $\vec{r} = \vec{b} + k\vec{m},\ k \in R$ પરસ્પર છેદે, તો**

  $(\vec{a} - \vec{b}) \cdot (\vec{l} \times \vec{m}) = 0$.

  જો $\vec{a} = (x_1, y_1, z_1),\ \vec{b} = (x_2, y_2, z_2),\ \vec{l} = (l_1, l_2, l_3)$ અને $\vec{m} = (m_1, m_2, m_3)$ હોય, તો બે રેખાઓ

  છેદે, તે માટેની શરતનું કાર્તેઝિય સ્વરૂપ $\begin{vmatrix} x_1 - x_2 & y_1 - y_2 & z_1 - z_2 \\ l_1 & l_2 & l_3 \\ m_1 & m_2 & m_3 \end{vmatrix} = 0$

- બે ભિન્ન રેખાઓ $\vec{r} = \vec{a} + k\vec{l},\ k \in R$ અને $\vec{r} = \vec{b} + k\vec{m},\ k \in R$ સમતલીય હોવા માટેની આવશ્યક શરત $(\vec{a} - \vec{b}) \cdot (\vec{l} \times \vec{m}) = 0$.
- જો બે રેખાઓને સમાવતું કોઈ પણ સમતલ ન મળે, તો તે બે રેખાઓને **વિષમતલીય રેખાઓ (Skew lines)** કહે છે.
- જો બે રેખાઓ $\vec{r} = \vec{a} + k\vec{l},\ k \in R$ અને $\vec{r} = \vec{b} + k\vec{m},\ k \in R$ માટે $(\vec{a} - \vec{b}) \cdot (\vec{l} \times \vec{m}) \neq 0$ તો તે **બે રેખાઓ વિષમતલીય** છે.

- **બે રેખાઓ વચ્ચેનો સંબંધ**

રેખા $L : \vec{r} = \vec{a} + k\hat{l},\ k \in R$ અને $M : \vec{r} = \vec{b} + k\vec{m},\ k \in R$, માટે

(1) જો $\vec{l} \times \vec{m} = \vec{0}$ અને $(\vec{b} - \vec{a}) \times \vec{l} \neq \vec{0}$ તો L||M.

(2) જો $\vec{l} \times \vec{m} = \vec{0}$ અને $(\vec{b} - \vec{a}) \times \vec{l} = \vec{0}$ તો L અને M સંપાતી રેખાઓ છે.

(3) જો $\vec{l} \times \vec{m} \neq \vec{0}$ અને $(\vec{b} - \vec{a}) \cdot (\vec{l} \times \vec{m}) \neq 0$ તો L અને M વિષમતલીય રેખાઓ છે.

(4) જો $\vec{l} \times \vec{m} \neq \vec{0}$ અને $(\vec{b} - \vec{a}) \cdot (\vec{l} \times \vec{m}) = 0$ તો L અને M છેદક રેખાઓ છે.

- **બિંદુનું રેખાથી લંબઅંતર :**

બિંદુ $P(\vec{p})$ નું રેખા $\vec{r} = \vec{a} + k\vec{l}$, $k \in R$ થી લંબઅંતર $= \dfrac{|(\vec{p} - \vec{a}) \times \vec{l}|}{|\vec{l}|}$ અથવા $|(\vec{p} - \vec{a}) \times \vec{l}|$ થાય.

- **બે સમાંતર રેખાઓ વચ્ચેનું લંબઅંતર :**

ધારો કે $L : \vec{r} = \vec{a} + k\vec{l}$, $k \in R$ અને $M : \vec{r} = \vec{b} + k\vec{l}$, $k \in R$ બે સમાંતર રેખાઓ છે. L અને M વચ્ચેનું

લંબઅંતર $= \dfrac{|(\vec{b} - \vec{a}) \times \vec{l}|}{|\vec{l}|}$.

- **બે વિષમતલીય રેખાઓ વચ્ચેનું લંબઅંતર (ન્યૂનતમ અંતર) :**

ધારો કે $L : \vec{r} = \vec{a} + k\vec{l}$, $k \in R$ અને $\vec{r} = \vec{b} + k\vec{m}$, $k \in R$ વિષમતલીય રેખાઓ છે. L અને M વચ્ચેનું

ન્યૂનતમ અંતર $= \dfrac{|(\vec{b} - \vec{a}) \cdot (\vec{l} \times \vec{m})|}{|\vec{l} \times \vec{m}|}$.

- **બિંદુથી રેખા પરનો લંબપાદ, લંબરેખાનું સમીકરણ અને રેખામાં પ્રતિબિંબ :**

(1) બિંદુ $P(\alpha, \beta, \gamma)$ થી $L : \dfrac{x - x_1}{l_1} = \dfrac{y - y_1}{l_2} = \dfrac{z - z_1}{l_3}$ રેખા પરના લંબપાદ Mના યામ

$(x_1 + kl_1,\ y_1 + kl_2,\ z_1 + kl_3)$.

$\overrightarrow{\mathbf{PM}} \perp \vec{l}$ પરથી k શોધી લંબપાદના યામ મેળવવા.

(2) રેખા L ને બિંદુ $P(\vec{p})$ માંથી લંબરેખાનું સમીકરણ $\vec{r} = \vec{p} + k\overrightarrow{\mathbf{PM}}$, $k \in R$.

(3) બિંદુ P નું રેખા L ને સાપેક્ષ પ્રતિબિંબ Q હોય, તો M એ $\overline{PQ}$ નું મધ્યબિંદુ થશે P અને M પરથી Q ના યામ મળે.

- **છેદક રેખાઓનું છેદબિંદુ :**

બે રેખાઓ $L : \vec{r} = \vec{a} + k\vec{l}$, $k \in R$ અને $M : \vec{r} = \vec{b} + k\vec{m}$, $k \in R$ એકબીજાને અનન્ય બિંદુમાં છેદે છે.

રેખા $L : \dfrac{x - x_1}{l_1} = \dfrac{y - y_1}{l_2} = \dfrac{z - z_1}{l_3}$ પરનું કોઈ પણ બિંદુ $(x_1 + k_1l_1,\ y_1 + k_1l_2,\ z_1 + k_1l_3)$ અને રેખા

$M : \dfrac{x - x_2}{m_1} = \dfrac{y - y_2}{m_2} = \dfrac{z - z_2}{m_3}$ પરનું કોઈ પણ બિંદુ $(x_2 + k_2m_1,\ y_2 + k_2m_2,\ z_2 + k_2m_3)$ લઈએ.

બંને બિંદુના x, y અને z યામ સરખાવી k_1 અને k_2 ની કિંમત મેળવી, કોઈ પણ એક બિંદુના યામમાં આ કિંમત

મૂકવાથી છેદબિંદુના યામ મળશે.

- **સમતલ**
- **પૂર્વધારણા**

(1) ત્રણ ભિન્ન અસમરેખ બિંદુઓ અનન્ય સમતલ નિશ્ચિત કરે છે.

(2) એક રેખા અને આ રેખા પર ન હોય તેવું એક બિંદુ અનન્ય સમતલ નિશ્ચિત કરે છે.

(3) બે સમાંતર રેખાઓ અનન્ય સમતલ નિશ્ચિત કરે છે.

(4) અનન્ય બિંદુમાં છેદતી બે રેખાઓ એક અનન્ય સમતલ નિશ્ચિત કરે છે.

- **ત્રણ ભિન્ન અસમરેખ બિંદુઓમાંથી પસાર થતા સમતલનું સમીકરણ**

- R^3 નાં ત્રણ ભિન્ન અસમરેખ બિંદુઓ $A(\vec{a})$, $B(\vec{b})$ અને $C(\vec{c})$માંથી પસાર થતા સમતલનું સદિશ સમીકરણ $\vec{r} = l\vec{a} + m\vec{b} + n\vec{c}$, $l, m, n \in R$ અને $l + m + n = 1$.

- $(\vec{r} - \vec{a}) \cdot [(\vec{b} - \vec{a}) \times (\vec{c} - \vec{a})] = 0$ આ સમતલનું સદિશ સમીકરણ છે.

- **સમતલનાં પ્રચલ સમીકરણ :** $\vec{r} = (x, y, z)$, $A(x_1, y_1, z_1)$, $B(x_2, y_2, z_2)$ અને $C(x_3, y_3, z_3)$ લેતાં,

સમતલનાં પ્રચલ સમીકરણ $x = lx_1 + mx_2 + nx_3$ જ્યાં $l, m, n \in R$ અને $l + m + n = 1$.

$y = ly_1 + my_2 + ny_3$

$z = lz_1 + mz_2 + nz_3$

- **કાર્તેઝિય સમીકરણ :** $\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0.$

- XY – સમતલનું સમીકરણ $z = 0$

YZ – સમતલનું સમીકરણ $x = 0$

ZX – સમતલનું સમીકરણ $y = 0$

- **R^3 નાં ચાર ભિન્ન બિંદુઓ સમતલીય હોવા માટેની શરત :**

$A(x_1, y_1, z_1)$, $B(x_2, y_2, z_2)$, $C(x_3, y_3, z_3)$ અને $D(x_4, y_4, z_4)$ સમતલીય હોય, તો અને તો જ

$\begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \\ x_4 - x_1 & y_4 - y_1 & z_4 - z_1 \end{vmatrix} = 0.$ એટલે કે $\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ y_1 & y_2 & y_3 & y_4 \\ z_1 & z_2 & z_3 & z_4 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$

- **અક્ષો પર અંતઃખંડ બનાવતા સમતલનું સમીકરણ :**

જો સમતલ યામાક્ષોને $A(a, 0, 0)$, $B(0, b, 0)$ અને $C(0, 0, c)$ માં છેદે, તો સમતલનો X–અંતઃખંડ a, Y–અંતઃખંડ b અને Z–અંતઃખંડ c થાય.

- જો સમતલ X–અક્ષ સાથે a, Y–અક્ષ સાથે b અને Z–અક્ષ સાથે c અંતઃખંડ $(a \neq 0,\ b \neq 0,\ c \neq 0)$ બનાવે,

તો સમતલનું સમીકરણ $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c} = 1.$

- **સમતલનો અભિલંબ**

સમતલમાં આવેલી પ્રત્યેક રેખાને લંબ હોય તેવી રેખાની દિશામાં આવેલા સદિશને સમતલનો અભિલંબ કહે છે. સામાન્ય રીતે સમતલના અભિલંબને $\vec{n}$ અથવા $\vec{n_1}, \vec{n_2}, \vec{n_3}, \dots$ વડે દર્શાવાય છે.

- **$\vec{n}$ અભિલંબવાળા સમતલનું સમીકરણ :**

  - $A(\vec{a})$માંથી પસાર થતા અને $\vec{n}$ અભિલંબવાળા સમતલનું સદિશ સમીકરણ : $\vec{r}\cdot\vec{n} = \vec{a}\cdot\vec{n}$ છે.

    જો $\vec{a}\cdot\vec{n} = d$ લઈએ, તો સમતલનું સદિશ સમીકરણ $\vec{r}\cdot\vec{n} = d$ થશે.

  - **કાર્તેઝિય સમીકરણ :** $\vec{r} = (x, y, z),\ \vec{n} = (a, b, c),\ \vec{a} = (x_1, y_1, z_1)$ લેતાં, સમતલનું કાર્તેઝિય સમીકરણ $ax+by+cz = d$ થશે. જ્યાં $d = ax_1+by_1+cz_1$ **અથવા** $a(x-x_1)+b(y-y_1)+c(z-z_1) = 0,$ $a^2+b^2+c^2 \neq 0.$

  - $X-$ અક્ષને સમાંતર સમતલનું સમીકરણ $by+cz = d$
    $Y-$ અક્ષને સમાંતર સમતલનું સમીકરણ $ax+cz = d$
    $Z-$ અક્ષને સમાંતર સમતલનું સમીકરણ $ax+by = d$

  - સમતલના અભિલંબના દિક્‌ખૂણા α, β, γ હોય અને સમતલનું ઊગમબિંદુથી લંબઅંતર p (અભિલંબની લંબાઈ) હોય, તેવા સમતલનું સમીકરણ $x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma = p.$

  - સમતલના સમીકરણ $ax+by+cz = d$ ને $x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma = d$ સ્વરૂપમાં ફેરવવા માટે સમતલના સમીકરણને $|\vec{n}|$ વડે ભાગીશું.

    સમીકરણનું સ્વરૂપ $\frac{a}{|\vec{n}|}x+\frac{b}{|\vec{n}|}y+\frac{c}{|\vec{n}|}z = \frac{d}{|\vec{n}|}$ થશે.

  - જો $d > 0$ તો $\vec{n} = (a, b, c)$ લઈશું અને $\hat{n} = \frac{\vec{n}}{|\vec{n}|} = \left(\frac{a}{|\hat{n}|}, \frac{b}{|\hat{n}|}, \frac{c}{|\hat{n}|}\right) = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$

    અને $\frac{d}{|\vec{n}|} = p.$

  - જો $d < 0$ તો $\vec{n} = (-a, -b, -c)$ લઈશું અને

    $\hat{n} = \frac{\vec{n}}{|\vec{n}|} = \left(\frac{-a}{|\vec{n}|}, \frac{-b}{|\vec{n}|}, \frac{-c}{|\vec{n}|}\right) = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$ અને $\frac{-d}{|\vec{n}|} = p.$

- સમતલ $ax+by+cz+d=0$ ને સમાંતર સમતલનું સમીકરણ $ax+by+cz+k=0$ જ્યાં $k \in R-\{d\}$.

- રેખા $\frac{x-x_1}{l} = \frac{y-y_1}{m} = \frac{z-z_1}{n}$ ને લંબ સમતલનું સમીકરણ $lx+my+nz+d=0$.

- **રેખા અને સમતલનો છેદગણ**

ધારો $L: \vec{r} = \vec{a} + k\vec{l}$, $k \in R$ રેખા દર્શાવે છે અને $\pi: \vec{r} \cdot \vec{n} = d$ સમતલ દર્શાવે છે. $(\vec{l} \neq \vec{0}, \vec{n} \neq \vec{0})$.

$\vec{l} = (l_1, l_2, l_3)$, $\vec{n} = (a, b, c)$, $\vec{a} = (x_1, y_1, z_1)$ લેતાં,

(1) $\vec{l} \cdot \vec{n} = 0$ અને $ax_1 + by_1 + cz_1 \neq d$ તો રેખા સમતલને સમાંતર થશે, તેમનો છેદગણ $\emptyset$, એટલે કે $L \cap \pi = \emptyset$.

(2) $\vec{l} \cdot \vec{n} = 0$ અને $ax_1 + by_1 + cz_1 = d$ તો રેખા સમતલમાં આવેલી છે, તેથી $L \cap \pi = L$

(3) $\vec{l} \cdot \vec{n} \neq 0$ તો રેખા સમતલને અનન્ય બિંદુમાં છેદે છે. છેદબિંદુ મેળવવા માટે રેખા $\frac{x-x_1}{l_1} = \frac{y-y_1}{l_2} = \frac{z-z_1}{l_3}$ પરના કોઈ પણ બિંદુના યામ $P(x_1+kl_1, y_1+kl_2, z_1+kl_3)$ને સમતલના સમીકરણમાં મૂકી k નું મૂલ્ય મેળવો. k નું મૂલ્ય P ના યામમાં મૂકતાં, છેદબિંદુ P મળશે.

- **બે સમતલ વચ્ચેના ખૂણાનું માપ**

ધારો કે સમતલો $\pi_1 : \vec{r} \cdot \vec{n_1} = d_1$ અને $\pi_2 : \vec{r} \cdot \vec{n_2} = d_2$ છે. તેમના વચ્ચેના ખૂણાનું માપ θ છે.

(1) π_1 અને π_2 વચ્ચેના ખૂણાનું માપ $\frac{\pi}{2}$ હોય, તો અને તો જ $\vec{n_1} \cdot \vec{n_2} = 0$.

(2) π_1 અને π_2 વચ્ચેના ખૂણાનું માપ 0 હોય, તો અને તો જ $\vec{n_1} \times \vec{n_2} = \vec{0}$.

(3) $cos\theta = \frac{|\vec{n_1} \cdot \vec{n_2}|}{|\vec{n_1}||\vec{n_2}|}$, $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$, એટલે કે $\theta = cos^{-1} \frac{|\vec{n_1} \cdot \vec{n_2}|}{|\vec{n_1}||\vec{n_2}|}$.

- જો સમતલનાં સમીકરણ $a_1x + b_1y + c_1z = d_1$ અને $a_2x + b_2y + c_2z = d_2$ હોય, તો

$$cos\theta = \frac{|a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2|}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2 + c_1^2}\sqrt{a_2^2 + b_2^2 + c_2^2}}.$$

એટલે કે $\theta = cos^{-1} \frac{|a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2|}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2 + c_1^2}\sqrt{a_2^2 + b_2^2 + c_2^2}}$.

- **રેખા અને સમતલ વચ્ચેનો ખૂણો**

ધારો કે રેખાનું સમીકરણ $\vec{r} = \vec{a} + k\vec{l}$, $k \in R$ અને સમતલનું સમીકરણ $\vec{r} \cdot \vec{n} = d$ છે. જો રેખા અને સમતલ વચ્ચેનો ખૂણાનું માપ α હોય, તો $\alpha = sin^{-1} \dfrac{|\vec{l} \cdot \vec{n}|}{|\vec{l}||\vec{n}|}$, $0 < \alpha < \dfrac{\pi}{2}$.

- **બે સમાંતર રેખાઓમાંથી પસાર થતા સમતલનું સમીકરણ**

    - સમાંતર રેખાઓ $\vec{r} = \vec{a} + k\vec{l}$, $k \in R$ અને $\vec{r} = \vec{b} + k\vec{l}$, $k \in R$ માંથી પસાર થતા સમતલનું સદિશ સમીકરણ $(\vec{r} - \vec{a}) \cdot [(\vec{b} - \vec{a}) \times \vec{l}\,] = 0$.

    - જો $\vec{a} = (x_1, y_1, z_1)$, $\vec{b} = (x_2, y_2, z_2)$ અને $\vec{l} = (l_1, l_2, l_3)$ હોય, તો સમતલનું કાર્તેઝિય સમીકરણ

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ l_1 & l_2 & l_3 \end{vmatrix} = 0.$$

- **બે છેદતી રેખાઓમાંથી પસાર થતા સમતલનું સમીકરણ**

    - $\vec{r} = \vec{a} + k\vec{l}$, $k \in R$ અને $\vec{r} = \vec{b} + k\vec{m}$, $k \in R$ પરસ્પર અનન્ય બિંદુમાં છેદતી બે રેખાઓ છે. આ રેખાઓમાંથી પસાર થતા સમતલનું સદિશ સમીકરણ $(\vec{r} - \vec{a}) \cdot (\vec{l} \times \vec{m}) = 0$.

    - જો $\vec{a} = (x_1, y_1, z_1)$, $\vec{l} = (l_1, l_2, l_3)$ અને $\vec{m} = (m_1, m_2, m_3)$, તો સમતલનું કાર્તેઝિય સમીકરણ

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ l_1 & l_2 & l_3 \\ m_1 & m_2 & m_3 \end{vmatrix} = 0.$$

- **સમતલમાં ન હોય તેવા બિંદુથી સમતલનું લંબઅંતર**

સમતલનું સમીકરણ $\vec{r} \cdot \vec{n} = d$ છે અને $P(\vec{p})$ સમતલમાં ન હોય તેવું બિંદુ છે.

P થી સમતલનું લંબઅંતર $= \dfrac{|\vec{p} \cdot \vec{n} - d|}{|\vec{n}|}$.

જો સમતલનું સમીકરણ $ax + by + cz + d = 0$ હોય અને $\vec{p} = (x_1, y_1, z_1)$ તો

લંબઅંતર $= \dfrac{|ax_1 + by_1 + cz_1 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$.

- **બે સમાંતર સમતલો વચ્ચેનું લંબઅંતર**

સમાંતર સમતલો $\vec{r} \cdot \vec{n} = d_1$ અને $\vec{r} \cdot \vec{n} = d_2$ વચ્ચેનું લંબઅંતર $= \dfrac{|d_1 - d_2|}{|\vec{n}|}$.

- સમતલો $a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0$ અને $a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0$ એકબીજાને સમાંતર હોય, તો $\dfrac{a_1}{a_2} = \dfrac{b_1}{b_2} = \dfrac{c_1}{c_2}$, $d_1 \neq d_2$

- **બે સમતલોનો છેદ**

- સમતલો $\vec{r} \cdot \vec{n_1} = d_1$ અને $\vec{r} \cdot \vec{n_2} = d_2$ માટે જો $\vec{n_1} \times \vec{n_2} \neq \vec{0}$ તો બંને સમતલો એકબીજાને છેદે છે.

  સમતલોનો છેદ એક રેખા થશે. આ રેખાનું સમીકરણ $\vec{r} = \vec{a} + k\vec{l}$, $k \in R$, જ્યાં $\vec{l} = \vec{n_1} \times \vec{n_2}$.

  સમતલોનું છેદબિંદુ એટલે કે છેદરેખા પરનું બિંદુ શોધવા માટે સમતલોના સમીકરણમાં $z = 0$ (અથવા x કે y નું મૂલ્ય 0) લઈ બંને સમીકરણ ઉકેલી x અને y નું મૂલ્ય મેળવવું.

- સમતલો $a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0$ અને $a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0$ એકબીજાને છેદતાં હોય તો તેમની છેદ રેખામાંથી પસાર થતા સમતલનું સમીકરણ

$$a_1x + b_1y + c_1z + d_1 + \lambda\left(a_2x + b_2y + c_2z + d_2\right) = 0, \ \lambda \in R.$$

અથવા $\lambda(a_1x + b_1y + c_1z + d_1) + a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0$

- **બિંદુનું સમતલમાં પ્રતિબિંબ**

ધારો કે બિંદુ $\mathrm{P}(x_1, y_1, z_1)$નું સમતલ $ax + by + cz + d = 0$ ને સાપેક્ષ પ્રતિબિંબ $\mathrm{Q}(x_2, y_2, z_2)$ છે.

હવે $\dfrac{x_2 - x_1}{a} = \dfrac{y_2 - y_1}{b} = \dfrac{z_2 - z_1}{c} = -2\left(\dfrac{ax_1 + by_1 + cz_1 + d}{a^2 + b^2 + c^2}\right) = r.$

$\therefore$ પ્રતિબિંબ Qના યામ $(x_1 + ar, y_1 + br, z_1 + cr)$ થશે.

- **સમતલની બહારના બિંદુથી સમતલ પરનો લંબપાદ**

ધારો કે સમતલ $ax + by + cz + d = 0$ ની બહાર બિંદુ $\mathrm{P}(x_1, y_1, z_1)$ છે. Pમાંથી સમતલ પરનો લંબપાદ $M(x_2, y_2, z_2)$ હોય, તો $x_2 = x_1 + ar$, $y_2 = y_1 + br$, $z_2 = z_1 + br$ જ્યાં $r = -\dfrac{ax_1 + by_1 + cz_1 + d}{a^2 + b^2 + c^2}$.

- **બે સમતલો વચ્ચેના ખૂણાને દુભાગતાં સમતલોનાં સમીકરણ**

સમતલો $a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0$ અને $a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0$ વચ્ચેના ખૂણાને દુભાગતાં સમતલોનાં સમીકરણ

$$\frac{a_1x + b_1y + c_1z + d_1}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2 + c_1^2}} = \pm \frac{a_2x + b_2y + c_2z + d_2}{\sqrt{a_2^2 + b_2^2 + c_2^2}}.$$

- **સમતલમાં રેખાનું પ્રતિબિંબ :**

રેખા : $\dfrac{x - x_1}{l_1} = \dfrac{y - y_1}{l_2} = \dfrac{z - z_1}{l_3}$ અને સમતલ $\pi : ax + by + cz + d = 0.$

- રેખા અને સમતલનું છેદબિંદુ P મેળવો.
- રેખા પરના બિંદુ (x_1, y_1, z_1) નું સમતલમાં પ્રતિબિંબ Q મેળવો.
- $\overleftrightarrow{PQ}$ નું સમીકરણ મેળવો.

$\overleftrightarrow{PQ}$ એ સમતલમાં આપેલ રેખાનું પ્રતિબિંબ દર્શાવતી રેખા છે.

બહુવિકલ્પી પ્રશ્નો

(1) અવકાશમાં આવેલી રેખાની દિક્‌કોસાઈન $\frac{1}{c}, \frac{1}{c}, \frac{1}{c}$ હોય તો ......

(A) $0 < c < 1.5$ (B) $c > 2$ (C) $c = \frac{1}{\sqrt{3}}$ (D) $c = \sqrt{3}$

ઉકેલ : રેખાની દિક્‌કોસાઈન $cos\alpha, cos\beta, cos\gamma$ લેતાં,

$cos^2\alpha + cos^2\beta + cos^2\gamma = 1$

$\therefore \frac{1}{c^2} + \frac{1}{c^2} + \frac{1}{c^2} = 1$

$\therefore 3 = c^2$

$\therefore c = \pm\sqrt{3}$ **જવાબ : (D)**

(2) (3, 2, 1) માંથી પસાર થતી અને $5x - 2y - z - 9 = 0$ને લંબરેખાનું સમીકરણ = ...

(A) $\frac{x-5}{3} = \frac{y+2}{2} = \frac{z+1}{1}$ (B) $\frac{x+3}{5} = \frac{y+2}{-2} = \frac{z+1}{-1}$

(C) $\frac{x-3}{5} = \frac{2-y}{2} = \frac{1-z}{1}$ (D) $\frac{x+3}{-5} = \frac{y+2}{2} = \frac{z+1}{1}$

ઉકેલ : સમતલ $5x - 2y - z - 9 = 0$ નો અભિલંબ સદિશ $\vec{n} = 5\hat{i} - 2\hat{j} - \hat{k}$ છે. રેખા સમતલને લંબ છે, તેથી રેખાની દિશા $\vec{n}$ થશે અને રેખા (3, 2, 1)માંથી પસાર થાય છે.

$\therefore$ રેખાનું સમીકરણ : $\frac{x-x_1}{l_1} = \frac{y-y_1}{l_2} = \frac{z-z_1}{l_3}$

$\therefore \frac{x-3}{5} = \frac{y-2}{-2} = \frac{z-1}{-1}$

$\therefore \frac{x-3}{5} = \frac{2-y}{2} = \frac{1-z}{1}$ **જવાબ : (C)**

(3) બિંદુ $(1, 2, -3)$થી રેખા $\frac{x+2}{-1} = \frac{y+1}{2} = \frac{z-3}{3}$ નું લંબઅંતર ......

(A) $\frac{15}{14}$ (B) $\sqrt{\frac{531}{14}}$ (C) $\frac{531}{14}$ (D) $\frac{\sqrt{531}}{14}$

ઉકેલ : બિંદુ $P(1, 2, -3)$ થી રેખા $\frac{x+2}{-1} = \frac{y+1}{2} = \frac{z-3}{3}$ નું લંબઅંતર,

$|\overrightarrow{AP} \times \hat{l}|$, જ્યાં $A(-2, -1, 3)$ અને $\vec{l} = (-1, 2, 3)$

$$p = \frac{|(3, 3, -6) \times (-1, 2, 3)|}{|(-1, 2, 3)|}$$

$$= \frac{|(21, -3, 9)|}{\sqrt{14}} = \sqrt{\frac{531}{14}}$$

જવાબ : (B)

(4) જો બિંદુઓ $(-3, -1, 2)$, $(1, 4, x)$ અને $(5, y, 8)$ સમરેખ હોય, તો x અને y અનુક્રમે ......

(A) 9 અને 5 (B) –5 અને 9 (C) 5 અને 9 (D) 5 અને –9

ઉકેલ : બિંદુઓ $\vec{a} = -3\hat{i} - \hat{j} + 2\hat{k}$, $\vec{b} = \hat{i} + 4\hat{j} + x\hat{k}$ અને $\vec{c} = 5\hat{i} + y\hat{j} + 8\hat{k}$ સમરેખ છે.

તેથી $(\vec{b} - \vec{a}) \times (\vec{c} - \vec{a}) = \vec{0}$.

$\therefore \quad (4\hat{i} + 5\hat{j} + (x-2)\hat{k}) \times (8\hat{i} + (y+1)\hat{j} + 6\hat{k}) = \vec{0}$

$\therefore \quad (-xy + 2y - x + 32)\hat{i} + (8x - 40)\hat{j} + (4y - 36)\hat{k} = \vec{0}$

$\therefore \quad 8x - 40 = 0$ અને $4y - 36 = 0$

$\therefore \quad x = 5$ અને $y = 9$

જુઓ કે $-xy + 2y - x + 32 = 0$ થાય છે.

જવાબ : (C)

બીજી રીત :

$\overrightarrow{\mathbf{BC}} = k\,\overrightarrow{\mathbf{AB}}$

$\therefore (4, 5, x-2)\,k = (4, y-4, 8-x)$

$\therefore 4k = k$

$\therefore k = 1$

$\therefore (4, 5, x-2) = (4, y-4, x-8)$

$\therefore y - 4 = 5 \Rightarrow y = 9$

$\therefore x - 2 = 8 - x \Rightarrow x = 5$

$\therefore x = 5, \ y = 9$

(5) યામાક્ષો સાથે સમાન માપના ખૂણા બનાવતી રેખાની દિક્કોસાઇન ...... છે.

(A) $\sqrt{3}, \sqrt{3}, \sqrt{3}$ (B) $\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}$ (C) 1, 1, 1 (D) $-\sqrt{3}, -\sqrt{3}, -\sqrt{3}$

ઉકેલ : રેખાની દિક્‌કોસાઇન l, m, n હોય, તો $l = m = n$ અને $l^2 + m^2 + n^2 = 1$.

$\therefore\ 3l^2 = 1$

$\therefore\ l = \pm\frac{1}{\sqrt{3}} = m = n.$

$\therefore$ રેખાની દિક્‌કોસાઇન $\pm\frac{1}{\sqrt{3}}, \pm\frac{1}{\sqrt{3}}, \pm\frac{1}{\sqrt{3}}$. **જવાબ : (B)**

(6) રેખા અક્ષોની ધનદિશા સાથે α, β, γ માપના ખૂણા બનાવે, તો $sin^2\alpha + sin^2\beta + sin^2\gamma =$ ......

(A) 2 (B) 1 (C) 0 (D) 3

ઉકેલ : રેખાના દિક્‌ખૂણાઓ α, β, γ છે.

$\therefore\ cos^2\alpha + cos^2\beta + cos^2\gamma = 1$

$\therefore\ 1 - sin^2\alpha + 1 - sin^2\beta + 1 - sin^2\gamma = 1$

$\therefore\ 2 = sin^2\alpha + sin^2\beta + sin^2\gamma$ **જવાબ : (A)**

(7) બિંદુ $(1, 2, 3)$ નું X-અક્ષથી અંતર = ...

(A) 1 (B) $\sqrt{14}$ (C) $\sqrt{13}$ (D) 5

ઉકેલ: (x_1, y_1, z_1) નું $\frac{x}{1} = \frac{y}{0} = \frac{z}{0}$ થી અંતર $= |\overrightarrow{OA} \times \hat{l}| = |(x_1, y_1, z_1) \times (1, 0, 0)| = |(0, z_1, -y_1)| = \sqrt{y_1^2 + z_1^2}$

બિંદુનું X-અક્ષથી અંતર $= \sqrt{y^2 + z^2} = \sqrt{4+9} = \sqrt{13}$. **જવાબ : (C)**

નોંધ : (x_1, y_1, z_1)નું X-અક્ષથી અંતર = (1, 0, 0) નું (1, 2, 3) થી અંતર $= |3\hat{i} - 2\hat{j}| = \sqrt{13}$

(8) $6\sqrt{3}$ માનવાળો સદિશ અક્ષો સાથે સમાન માપના ખૂણા બનાવે, તો તે સદિશ ...... છે.

(A) $\sqrt{3}\,(\hat{i} + \hat{j} + \hat{k})$ (B) $-6\,(\hat{i} + \hat{j} + \hat{k})$ (C) $2\sqrt{3}\,(\hat{i} + \hat{j} + \hat{k})$ (D) $-2\sqrt{3}\,(\hat{i} + \hat{j} + \hat{k})$

ઉકેલ : સદિશ $\vec{r}$ એ અક્ષો સાથે સમાન ખૂણા બનાવે છે. તેની દિક્‌કોસાઇન l, m, n લેતાં $l = m = n$ અને $l^2 + m^2 + n^2 = 1$.

$\therefore\ 3l^2 = 1$. આથી, $l = \pm\frac{1}{\sqrt{3}}$

$|\vec{r}| = 6\sqrt{3}$ હોવાથી, $\vec{r} = |\vec{r}|\,(l\hat{i} + m\hat{j} + n\hat{k}) = \pm 6(\hat{i} + \hat{j} + \hat{k})$ **જવાબ : (B)**

(9) રેખાઓ $\frac{x-6}{1} = \frac{y-7}{2} = \frac{z-17}{-3}$ અને $\frac{x-4}{-2} = \frac{y+5}{1} = \frac{z+3}{2}$ ને લંબરેખાના દિક્‌ગુણોત્તર ...... છે.

(A) 7, –4, –5 (B) –7, 4, 5 (C) 7, 4, 5 (D) 7, –4, 5

ઉકેલ : ધારો કે આપેલ રેખાઓને લંબરેખાના દિક્‌ગુણોત્તર a, b, c છે.

હવે a, b, c દિક્‌ગુણોત્તર વાળી રેખા $\frac{x-6}{1} = \frac{y-7}{2} = \frac{z-17}{-3}$ ને લંબ છે.

$\therefore\ a + 2b - 3c = 0$. તે જ પ્રમાણે $-2a + b + 2c = 0$

$$\therefore\ \frac{a}{4+3} = \frac{b}{-2+6} = \frac{c}{1+4}$$

$\therefore$ દિક્‌ગુણોત્તર 7, 4, 5.

બીજી રીત :

માંગેલ દિશા = (1, 2, –3) × (–2, 1, 2) = (7, 4, 5) **જવાબ : (C)**

(10) રેખાઓ $\vec{r} = (4\hat{j} - \hat{k}) + t(-3\hat{i} + 2\hat{j} + \hat{k}),\ t \in R$ અને $\vec{r} = (2\hat{i} + \hat{j} - \hat{k}) + s(2\hat{i} + \hat{j} - 3\hat{k}),\ s \in R$ વચ્ચેના ખૂણાનું માપ ......

(A) $\frac{\pi}{3}$ (B) $\frac{2\pi}{3}$ (C) $\frac{\pi}{6}$ (D) $\frac{5\pi}{6}$

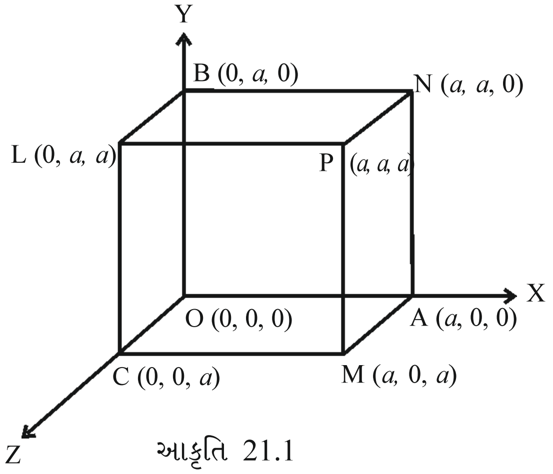
ઉકેલ : $\vec{l} = (-3, 2, 1),\ \vec{m} = (2, 1, -3)$

હવે, $\cos\theta = \frac{|\vec{l} \cdot \vec{m}|}{|\vec{l}|\,|\vec{m}|} = \frac{|-6+2-3|}{\sqrt{14} \cdot \sqrt{14}} = \frac{7}{14} = \frac{1}{2}$

$\therefore\ \theta = \frac{\pi}{3}$. **જવાબ : (A)**

(11) a લંબાઈની બાજુવાળા સમઘનના બે વિકર્ણો વચ્ચેના ખૂણાનું માપ ......

(A) $\cos^{-1}\frac{1}{\sqrt{3}}$ (B) $\cos^{-1}\frac{1}{3}$ (C) $\frac{\pi}{6}$ (D) $\frac{\pi}{3}$



આકૃતિ 21.1

ઉકેલ : સમઘનને ચાર વિકર્ણો છે : $\overline{OP}, \overline{AL}, \overline{BM}$ અને $\overline{CN}$.

$\overrightarrow{OP}$ માટે $\vec{l} = (a, a, a)$ આથી, $\hat{l} = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$

અને $\overrightarrow{\mathbf{AL}}$ માટે $\vec{m} = (-a, a, a)$ આથી, $\hat{m} = \left(-\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$

$$cos\,(\overrightarrow{\mathbf{OP}} \,\hat{}\, , \overrightarrow{\mathbf{AL}}) = |\hat{l} \cdot \hat{m}|$$

$$= \left|\frac{1}{\sqrt{3}}\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) + \frac{1}{\sqrt{3}}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) + \frac{1}{\sqrt{3}}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\right|$$

$$= \frac{1}{3}$$

$$\therefore \quad (\overrightarrow{\mathbf{OP}} \,\hat{}\, , \overrightarrow{\mathbf{AL}}) = cos^{-1}\,\frac{1}{3}.$$

તે જ પ્રમાણે કોઈ પણ બે વિકર્ણો વચ્ચેના ખૂણાનું માપ $cos^{-1}\,\frac{1}{3}$ થાય. **જવાબ : (B)**

(12) $A(1, 3, 2)$ અને $B(3, 9, 5)$માંથી પસાર થતી રેખા પર $\overline{AB}$ ના મધ્યબિંદુથી 7 એકમના અંતરે આવેલું બિંદુ ...... છે.

(A) $(4, 12, 13)$ (B) $\left(0, 0, \frac{1}{2}\right)$ (C) $\left(4, 12, \frac{13}{4}\right)$ (D) $\left(0, 0, \frac{1}{4}\right)$

ઉકેલ : $\overleftrightarrow{\mathrm{AB}}$ નું સમીકરણ $\vec{r} = \vec{a} + k\,\vec{l}, \; k \in R$

$\therefore \quad \vec{r} = (1, 3, 2) + k(2, 6, 3), \; k \in R$

$\therefore$ $\overleftrightarrow{\mathrm{AB}}$ પરનું કોઈ પણ બિંદુ $P(1 + 2k,\, 3 + 6k,\, 2 + 3k)$ છે.

બિંદુ P નું $\overline{AB}$ ના મધ્યબિંદુ $M\left(2, 6, \frac{7}{2}\right)$થી અંતર 7 છે.

$\therefore \quad PM = 7.$ આથી, $PM^2 = 49$

$$\therefore \quad (2k + 1 - 2)^2 + (6k + 3 - 6)^2 + \left(3k + 2 - \frac{7}{2}\right)^2 = 49$$

$$\therefore \quad (2k - 1)^2 + (6k - 3)^2 + \left(3k - \frac{3}{2}\right)^2 = 49$$

$$\therefore \quad (2k - 1)^2 \left(1 + 9 + \frac{9}{4}\right) = 49$$

$$\therefore \quad (2k - 1)^2 = 4$$

$\therefore \quad 2k - 1 = 2$ અથવા $2k - 1 = -2$

$\therefore \quad k = \frac{3}{2}$ અથવા $k = -\frac{1}{2}$

$\therefore$ રેખા પરનાં બિંદુ $\left(4, 12, \frac{13}{2}\right)$ અને $\left(0, 0, \frac{1}{2}\right)$ છે. **જવાબ : (B)**

(13) $\frac{x-2}{3} = \frac{y-3}{4} = \frac{z-1}{2}$ અને $\frac{x-4}{4} = \frac{y-5}{5} = \frac{z-2}{3}$ વચ્ચેનું લઘુતમ અંતર શોધો.

(A) $\sqrt{6}$ (B) $\frac{1}{6}$ (C) $\frac{1}{\sqrt{6}}$ (D) 6

ઉકેલ : $\vec{a} = (2, 3, 1)$, $\vec{l} = (3, 4, 2)$, $\vec{b} = (4, 5, 2)$, $\vec{m} = (4, 5, 3)$

$\vec{b} - \vec{a} = (2, 2, 1)$ $\quad\quad$ $\vec{l} \times \vec{m} = (2, -1, -1)$

$\therefore$ લઘુતમ અંતર $= \dfrac{|(\vec{b} - \vec{a}) \cdot (\vec{l} \times \vec{m})|}{|\vec{l} \times \vec{m}|}$.

$= \dfrac{|2(2) + 2(-1) + 1(-1)|}{\sqrt{6}}$

$= \dfrac{1}{\sqrt{6}}$ **જવાબ : (C)**

(14) રેખાઓ $\vec{r} = (2, -5, 1) + k(3, 2, 6)$, $k \in R$ અને $\frac{x-7}{1} = \frac{y}{2} = \frac{z+6}{2}$ ...... છે.

(A) છેદક રેખાઓ (B) સમાંતર રેખાઓ

(C) સંપાતી રેખાઓ (D) વિષમતલીય રેખાઓ

ઉકેલ : $\vec{a} = (2, -5, 1)$, $\vec{l} = (3, 2, 6)$ અને $\vec{b} = (7, 0, -6)$, $\vec{m} = (1, 2, 2)$.

$\vec{l} \times \vec{m} = (-8, 0, 4) \neq \vec{0}$

$\therefore$ આપેલ રેખાઓ સમાંતર કે સંપાતી રેખાઓ નથી.

હવે $(\vec{b} - \vec{a}) \cdot (\vec{l} \times \vec{m}) = (5, 5, -7) \cdot (-8, 0, 4) = -40 - 28 \neq 0$

$\therefore$ આપેલ રેખાઓ વિષમતલીય રેખાઓ છે. **જવાબ : (D)**

(15) $(4, 1, 2)$ અને $(5, y, 0)$ માંથી પસાર થતી રેખા એ $(2, 1, 1)$ અને $(3, 3, z)$ માંથી પસાર થતી રેખાને સમાંતર હોય, તો $(y, z) =$ ......

(A) $(-1, 3)$ (B) $(3, -1)$ (C) $(-3, 1)$ (D) $(-3, -1)$

ઉકેલ : આપેલી રેખાઓના દિક્ગુણોત્તર $1, y-1, -2$ અને $1, 2, z-1$ છે.

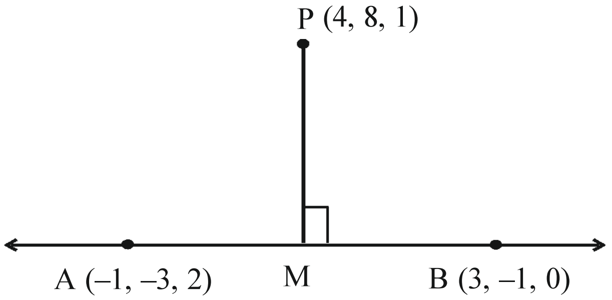
રેખાઓ એકબીજીને સમાંતર છે.

$\therefore \frac{1}{1} = \frac{y-1}{2} = \frac{-2}{z-1}$

$\therefore y = 3$ અને $z = -1$ **જવાબ : (B)**

(16) બિંદુ $(4, 8, 1)$ નો બિંદુઓ $(-1, -3, 2)$ અને $(3, -1, 0)$ ને જોડતી રેખા પરનો લંબપાદ ....

(A) $\left(\frac{19}{3}, \frac{2}{3}, \frac{-5}{3}\right)$ (B) $\left(\frac{19}{3}, \frac{2}{3}, \frac{5}{3}\right)$ (C) $\left(\frac{19}{3}, \frac{-2}{3}, \frac{5}{3}\right)$ (D) $\left(\frac{19}{3}, \frac{-2}{3}, \frac{-5}{3}\right)$



આકૃતિ 21.2

ઉકેલ : $A(-1, -3, 2)$ અને $B(3, -1, 0)$ માંથી પસાર થતી રેખા $\overleftrightarrow{AB}$ નું સમીકરણ,

$\vec{r} = (-1, -3, 2) + k'(4, 2, -2),\ k' \in R$

$\therefore\ \vec{r} = (-1, -3, 2) + k(2, 1, -1),\ k = 2k' \in R$

ધારો કે $\overleftrightarrow{AB}$ પરનું બિંદુ $M(-1+2k,\ -3+k,\ 2-k)$ એ $P(4, 8, 1)$ માંથી $\overleftrightarrow{AB}$ પરનો લંબપાદ છે.

હવે $\overleftrightarrow{PM} \perp \vec{l}$. આથી $\overleftrightarrow{PM} \cdot \vec{l} = 0$

$\therefore\ (2k-5, k-11, -k+1) \cdot (2, 1, -1) = 0$

$\therefore\ 4k - 10 + k - 11 + k - 1 = 0$

$\therefore\ 6k = 22$ આથી $k = \frac{11}{3}$

$\therefore$ લંબપાદ $M\left(\frac{19}{3}, \frac{2}{3}, \frac{-5}{3}\right)$ **જવાબ : (A)**

(17) નીચે આપેલાં બિંદુઓમાંથી ...... બિંદુ, રેખા $\vec{r} = (2, 0, -1) + k(2, 1, -3),\ k \in R$ પર આવેલું નથી.

(A) $(6, 2, -7)$ (B) $(2, 0, -1)$ (C) $(-2, 1, 3)$ (D) $(4, 1, -4)$

ઉકેલ : રેખાનું સમીકરણ $\vec{r} = (2, 0, -1) + k(2, 1, -3),\ k \in R$

બિંદુ $(6, 2, -7)$ માટે $(6, 2, -7) = (2+2k, k, -1-3k)$ હોય, તો

$\therefore\ 6 = 2 + 2k,\quad k = 2,\quad -1 - 3k = -7$

$k = 2$ બાકીનાં બંને સમીકરણોનું સમાધાન કરે છે.

$\therefore\ (6, 2, -7)$ રેખા પર આવેલું છે.

$(2, 0, -1)$ રેખા પરનું બિંદુ છે જ.

હવે $(-2, 1, 3)$ માટે $(-2, 1, 3) = (2+2k,\ k,\ -1-3k)$ લેતાં,

$\therefore\ -2 = 2 + 2k,\ 1 = k,\ 3 = -1 - 3k$

$k = 1$ બાકીનાં બંને સમીકરણોનું સમાધાન કરતું નથી.

$\therefore\ (-2, 1, 3)$ રેખા પર આવેલું નથી.

$(4, 1, -4)$ માટે પણ $k = 1$ આથી $(4, 1, -4)$ રેખા પર છે. **જવાબ : (C)**

(18) રેખાઓ $x = ay + b,\ z = cy + d$ અને $x = a'y + b',\ z = c'y + d'$ પરસ્પર લંબ હોય, તો અને તો જ ......

(A) $aa' + bb' + cc' = 0$ (B) $(a + a')(b + b')(c + c') = 0$

(C) $aa' + cc' + 1 = 0$ (D) $aa' + bb' + cc' + 1 = 0$ (AIEEE:2003)

ઉકેલ : $x = ay + b$ અને $z = cy + d$ તથા $x = a'y + b',\ z = c'y + d'$

$\therefore\ \frac{x-b}{a} = y$ અને $y = \frac{z-d}{c}$

$\therefore\ \frac{x-b}{a} = \frac{y}{1} = \frac{z-d}{c}$ તે જ રીતે $\frac{x-b'}{a'} = \frac{y}{1} = \frac{z-d'}{c'}$

$\therefore\ \vec{l} = (a, 1, c)$ તથા $\vec{m} = (a', 1, c')$

બે રેખાઓ પરસ્પર લંબ છે. $\Leftrightarrow\ \vec{l} \cdot \vec{m} = 0\ \Leftrightarrow\ aa' + 1 + cc' = 0$ **જવાબ : (C)**

(19) રેખાઓ $\frac{x-2}{1} = \frac{y-3}{1} = \frac{z-4}{-k}$ અને $\frac{x-1}{k} = \frac{y-4}{2} = \frac{z-5}{1}$ સમતલીય હોય, તો ......

(A) $k = 1$ અથવા -1 (B) $k = 0$ અથવા -3 (C) $k = 3$ અથવા -3 (D) $k = 0$ અથવા -1

(AIEEE : 2003)

ઉકેલ : $\vec{a} = (2, 3, 4),\ \vec{l} = (1, 1, -k)$ તથા $\vec{b} = (1, 4, 5),\ \vec{m} = (k, 2, 1)$

રેખાઓ સમતલીય છે.

$$\therefore \begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ l_1 & l_2 & l_3 \\ m_1 & m_2 & m_3 \end{vmatrix} = 0$$

$$\therefore \begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -k \\ k & 2 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$\therefore\ -1(1 + 2k) - 1(1 + k^2) + 1(2 - k) = 0$

$\therefore\ -1 - 2k - 1 - k^2 + 2 - k = 0$

$\therefore\ k^2 + 3k = 0$

$\therefore\ k(k + 3) = 0$

$\therefore\ k = 0$ અથવા -3 **જવાબ : (B)**

(20) જો કોઈ સમઘનની ત્રણ ધારો એ અવકાશના ત્રણ અક્ષો હોય, તો ઊગમબિંદુ અને તેની વિરુદ્ધ બાજુના ખૂણા પર આવેલા બિંદુને જોડતા વિકર્ણના દિક્‌ગુણોત્તર ...... થાય.

(A) $\langle 2, -2, 2 \rangle$ (B) $\left\langle -\frac{2}{\sqrt{3}}, \frac{2}{\sqrt{3}}, \frac{2}{\sqrt{3}} \right\rangle$ (C) $\langle 1, 1, 1 \rangle$ (D) $\langle 3, 2, 1 \rangle$

ઉકેલ : ધારો કે a લંબાઈની બાજુવાળા સમઘનની ધારો $\overrightarrow{\mathbf{OA}}, \overrightarrow{\mathbf{OB}}, \overrightarrow{\mathbf{OC}}$ એ અનુક્રમે X-અક્ષ Y-અક્ષ અને Z-અક્ષ છે.

એક શિરોબિંદુ ઊગમબિંદુ $(0, 0, 0)$ અને બીજું શિરોબિંદુ $\mathrm{P}(a, a, a)$ થશે.

વિકર્ણ $\overline{\mathrm{OP}}$ ને સમાવતા સદિશ $\overrightarrow{\mathbf{OP}}$ ના દિક્‌ગુણોત્તર $\langle a-0, a-0, a-0\rangle$ એટલે કે $\langle 1, 1, 1\rangle$ થશે.

જવાબ : (C)

(21) બિંદુઓ $A(2, 1, -2)$ અને $B(3, -4, -1)$ ને જોડતા રેખાખંડના રેખા $\frac{x-4}{3} = \frac{y+9}{2} = \frac{z-1}{-6}$ પરના પ્રક્ષેપનું માન ......

(A) $\frac{26}{7}$ (B) $\frac{19}{7}$ (C) $\frac{16}{7}$ (D) $\frac{13}{7}$

ઉકેલ : $\overline{AB}$ ના રેખા $\vec{r} = \vec{a} + k\vec{l}, \ k \in R$ પરના પ્રક્ષેપનું માન

$= |(x_2 - x_1)l + (y_2 - y_1)m + (z_2 - z_1)n|$ જ્યાં l, m, n એ રેખાના સદિશ $\vec{l}$ ની દિક્‌કોસાઇન છે.

$\overline{AB}$ માટે

$x_2 - x_1 = 1, \ y_2 - y_1 = -5, \ z_2 - z_1 = 1$ અને રેખાની દિક્‌કોસાઇન $l = \frac{3}{7}, \ m = \frac{2}{7}, \ n = \frac{-6}{7}$.

$\therefore$ પ્રક્ષેપનું માન $= \left|(1)\left(\frac{3}{7}\right) + (-5)\left(\frac{2}{7}\right) + (1)\left(\frac{-6}{7}\right)\right|$

$= \frac{1}{7}|3-10-6|$

$= \frac{13}{7}$

જવાબ : (D)

(22) ઊગમબિંદુથી રેખા $\{(4+3k, 2+4k, 4-5k) \mid k \in R\}$નું લંબઅંતર ......

(A) 2 (B) 6 (C) $5\sqrt{2}$ (D) $2\sqrt{5}$

ઉકેલ : ઊગમબિંદુ $\mathrm{O}(0, 0, 0)$ અને રેખા $\vec{r} = (4, 2, 4) + k(3, 4, -5), k \in R$ આપેલ છે.

$\therefore \ \mathrm{A}(\vec{a}) = (4, 2, 4)$ અને $\vec{l} = (3, 4, -5)$

લંબ અંતર $= |\overrightarrow{\mathrm{OA}} \times \hat{l}|$

$= \frac{30\sqrt{2}}{5\sqrt{2}} = 6$

જવાબ : (B)

(23) જો રેખાઓ $x=-1+s,\ y=3-\lambda s,\ z=1+\lambda s$ અને $x=\frac{t}{2},\ y=1+t,\ z=2-t,$ (s, t પ્રચલ છે.) સમતલીય હોય, તો $\lambda =$ ......

(A) -2 (B) -1 (C) $-\frac{1}{2}$ (D) 0 (AIEEE : 2004)

ઉકેલ : રેખાઓનાં કાર્તેઝીય સમીકરણ,

$$\frac{x+1}{1}=\frac{y-3}{-\lambda}=\frac{z-1}{\lambda} \text{ અને } \frac{x}{\frac{1}{2}}=\frac{y-1}{1}=\frac{z-2}{-1}$$

$\therefore\ \vec{a}=(-1,3,1),\ \vec{l}=(1,-\lambda,\lambda)$ અને $\vec{b}=(0,1,2),\ \vec{m}=\left(\frac{1}{2},1,-1\right)$

રેખાઓ સમતલીય છે.

$$\therefore \begin{vmatrix} x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ l_1 & l_2 & l_3 \\ m_1 & m_2 & m_3 \end{vmatrix} = 0$$

$$\therefore \begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 1 & -\lambda & \lambda \\ \frac{1}{2} & 1 & -1 \end{vmatrix} = 0$$

$$\therefore\ 1(\lambda-\lambda)+2\left(-1-\frac{\lambda}{2}\right)+1\left(1+\frac{\lambda}{2}\right)=0$$

$$\therefore\ -2-\lambda+1+\frac{\lambda}{2}=0$$

$$\therefore\ \lambda=-2$$

જવાબ : (A)

(24) રેખાઓ $\frac{x-1}{2}=\frac{y+1}{3}=\frac{z-1}{4}$ અને $\frac{x-3}{1}=\frac{y-k}{2}=\frac{z}{1}$ એકબીજાને છેદે, તો $k =$ ......

(A) $\frac{3}{2}$ (B) $\frac{9}{2}$ (C) $\frac{-2}{9}$ (D) $\frac{-3}{2}$ (IIT : 2004)

ઉકેલ : રેખાઓ $\vec{r}=(1,-1,1)+\lambda(2,3,4), \lambda \in R$ અને $\vec{r}=(3,k,0)+\lambda(1,2,1), \lambda \in R$ માટે

$\vec{a}=(1,-1,1),\ \vec{l}=(2,3,4)$ અને $\vec{b}=(3,k,0), \vec{m}=(1,2,1)$.

આપેલ રેખાઓ છેદક રેખાઓ છે.

$$\therefore \begin{vmatrix} 2 & k+1 & -1 \\ 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$$\therefore\ 2(-5)-(k+1)(-2)-1\,(1)=0$$

$$\therefore\ -10+2k+2-1=0$$

$\therefore\ k=\frac{9}{2}$ $\vec{l}\times\vec{m}\neq\vec{0}$ આથી $k=\frac{9}{2}$ માટે તે છેદક રેખાઓ છે. **જવાબ : (B)**

નોંધ : $(1,-1,1)$ બીજી રેખા પર નથી તે સ્પષ્ટ છે. આથી રેખાઓ સમાંતર નથી.

(25) રેખાઓ $2x = 3y = -z$ અને $6x = -y = -4z$ વચ્ચેના ખૂણાનું માપ ......

(A) $\frac{\pi}{2}$ (B) 0 (C) $\frac{\pi}{6}$ (D) $\frac{\pi}{4}$ (AIEEE: 2005)

ઉકેલ : રેખાઓ $\frac{x}{3} = \frac{y}{2} = \frac{z}{-6}$ અને $\frac{x}{2} = \frac{y}{-12} = \frac{z}{-3}$ માટે,

$\vec{l} = (3, 2, -6)$; $\vec{m} = (2, -12, -3)$

$$cos\theta = \frac{|\vec{l} \cdot \vec{m}|}{|\vec{l}||\vec{m}|}$$

$$= \frac{|6 - 24 + 18|}{\sqrt{9+4+36} \cdot \sqrt{4+144+9}} = 0$$

$\therefore \vec{l} \perp \vec{m}$

$\therefore$ રેખાઓ પરસ્પર લંબ છે.

$\therefore$ તેમની વચ્ચેના ખૂણાનું માપ $\frac{\pi}{2}$. **જવાબ : (A)**

(26) $A(1, 1, 1)$ માંથી પસાર થતી $B(1, 4, 6)$ અને $C(5, 4, 4)$ માંથી પસાર થતી $\overleftrightarrow{BC}$ ને લંબ રેખાનું સમીકરણ ......

(A) $\frac{x-1}{2} = \frac{y-1}{3} = \frac{z-1}{4}$ (B) $\frac{x-1}{3} = \frac{y-4}{4} = \frac{z-6}{5}$

(C) $\frac{x-5}{3} = \frac{y-4}{4} = \frac{z-4}{5}$ (D) $\frac{x-1}{-2} = \frac{y-1}{-3} = \frac{z-1}{4}$

ઉકેલ : $\overleftrightarrow{BC}$ નું સમીકરણ $\vec{r} = \vec{a} + k(\vec{b} - \vec{a}),\ k \in R = (1, 4, 6) + k(4, 0 - 2)\ k \in R$

ધારો કે બિંદુ A માંથી $\overleftrightarrow{BC}$ પરનો લંબપાદ $M(1 + 4k, 4, 6 - 2k)$ છે.

$\therefore \overrightarrow{\mathbf{AM}} \perp \vec{l}$

$\therefore (4k, 3, 5 - 2k) \cdot (4, 0, -2) = 0$

$\therefore 16k - 10 + 4k = 0$

$\therefore k = \frac{1}{2}$

$\overrightarrow{\mathbf{AM}} = (4k, 3, 5 - 2k) = (2, 3, 4)$

$\therefore$ માંગેલ લંબરેખાનું સમીકરણ $\vec{r} = (1, 1, 1) + k\ (\overrightarrow{\mathbf{AM}}),\ k \in R$

$\therefore \vec{r} = (1, 1, 1) + k\ (2, 3, 4),\ k \in R$

$\therefore \frac{x-1}{2} = \frac{y-1}{3} = \frac{z-1}{4}$

નોંધ : $\overrightarrow{\mathbf{BC}} = (4, 0, -2)$ જે આપેલ વિકલ્પોમાં માત્ર (A)માં આપેલી રેખાને જ લંબ છે. **જવાબ : (A)**

(27) જો $\overrightarrow{AB}$ ના $\overleftrightarrow{OX}$, $\overleftrightarrow{OY}$ અને $\overleftrightarrow{OZ}$ પરના પ્રક્ષેપ અનુક્રમે 3, 4 અને 12 હોય તો $|\overrightarrow{\mathbf{AB}}|$ = ...

(A) 169 (B) 144 (C) 19 (D) 13

ઉકેલ : $\overrightarrow{\mathbf{AB}} = x_1\hat{i} + x_2\hat{j} + x_3\hat{k}$ હોય, તો $\overrightarrow{\mathbf{AB}}$ નો $\overleftrightarrow{OX}$ પરનો પ્રક્ષેપ $= \overrightarrow{\mathbf{AB}} \cdot \hat{i}$.

$\therefore\ x_1 = 3$. તે જ પ્રમાણે $x_2 = 4,\ x_3 = 12$

$\therefore\ |\overrightarrow{\mathbf{AB}}| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2} = 13$ **જવાબ : (D)**

(28) જો બે રેખાઓના દિક્ગુણોત્તર $3lm - 4ln + mn = 0$ અને $l + 2m + 3n = 0$ નું સમાધાન કરે, તો તે બે રેખાઓ વચ્ચેના ખૂણાનું માપ ......

(A) $\frac{\pi}{2}$ (B) $\frac{\pi}{3}$ (C) $\frac{\pi}{4}$ (D) $\frac{\pi}{6}$

ઉકેલ : $l = -2m - 3n$ પરથી મળતું l નું મૂલ્ય $3lm - 4ln + mn = 0$ માં મૂકતાં,

$3m(-2m-3n) - 4(-2m-3n)n + mn = 0$

$\therefore\ -6m^2 - 9mn + 8mn + 12n^2 + mn = 0$

$\therefore\ m^2 = 2n^2$

$\therefore\ m = \pm\sqrt{2}\,n$

હવે $m = \sqrt{2}n$ લેતાં $l = -2\sqrt{2}n - 3n$ અને $m = -\sqrt{2}n$ લેતાં $l = 2\sqrt{2}n - 3n$

$\therefore$ બંને રેખાઓના દિક્ગુણોત્તર, $-2\sqrt{2} - 3,\ \sqrt{2},\ 1$ અને $2\sqrt{2} - 3,\ -\sqrt{2},\ 1$

ધારો કે બે રેખા વચ્ચેના ખૂણાનું માપ θ છે.

$\left(-2\sqrt{2}-3,\ \sqrt{2},\ 1\right) \bullet \left(2\sqrt{2}-3,\ -\sqrt{2},\ 1\right) = -(8-9) - 2 + 1 = 0$

$\therefore\ \theta = \frac{\pi}{2}$ **જવાબ : (A)**

(29) રેખાઓ $\vec{r} = (1, -1, 0) + k\,(2, 0, 1),\ k \in R$ અને $\frac{x-2}{1} = \frac{y+1}{1} = \frac{z-a}{-1}$ વચ્ચેનું લઘુતમ અંતર $\frac{1}{\sqrt{14}}$ હોય, તો a = ...

(A) 0 અથવા –1 (B) 0 અથવા 1 (C) 1 અથવા –1 (D) 2 અથવા –2

ઉકેલ : $\vec{r} = (1, -1, 0) + k\,(2, 0, 1)$, $k \in R$ અને $\frac{x-2}{1} = \frac{y+1}{1} = \frac{z-a}{-1}$ માટે,

$\vec{a} = (1, -1, 0),\ \vec{l} = (2, 0, 1)$ અને $\vec{b} = (2, -1, a),\ \vec{m} = (1, 1, -1)$

$\vec{l} \times \vec{m} = (2, 0, 1) \times (1, 1, -1) = (-1, 3, 2)$ આથી $|\vec{l} \times \vec{m}| = \sqrt{14}$

$(\vec{b} - \vec{a}) \cdot (\vec{l} \times \vec{m}) = (1, 0, a) \cdot (-1, 3, 2) = -1 + 2a$

હવે લઘુતમ અંતર $= \dfrac{|(\vec{b}-\vec{a})\cdot(\vec{l}\times\vec{m})|}{|\vec{l}\times\vec{m}|}. = \dfrac{|2a-1|}{\sqrt{14}} = \dfrac{1}{\sqrt{14}}$

$\therefore\ 2a-1=1$ અથવા $2a-1=-1$

$\therefore\ a=1$ અથવા $a=0$ **જવાબ : (B)**

(30) જો રેખા X-અક્ષ અને Y-અક્ષની ધન દિશા સાથે $\frac{\pi}{4}$ માપનો ખૂણો બનાવે, તો Z-અક્ષની ધન દિશા સાથે ...... માપનો ખૂણો બનાવશે.

(A) $\frac{\pi}{3}$ (B) $\frac{\pi}{4}$ (C) $\frac{\pi}{2}$ (D) $\frac{\pi}{6}$ (AIEEE : 2007)

ઉકેલ : જો રેખાના દિક્‌ખૂણાઓ α, β, γ હોય, તો $cos^2\alpha + cos^2\beta + cos^2\gamma = 1$

$\therefore\ cos^2\frac{\pi}{4} + cos^2\frac{\pi}{4} + cos^2\gamma = 1$

$\therefore\ \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + cos^2\gamma = 1$

$\therefore\ cos^2\gamma = 0$. આથી, $cos\gamma = 0$

$\therefore\ \gamma = \frac{\pi}{2}$ **જવાબ : (C)**

(31) રેખાઓ $\dfrac{x-1}{k} = \dfrac{y-2}{2} = \dfrac{z-3}{3}$ અને $\dfrac{x-2}{3} = \dfrac{y-3}{k} = \dfrac{z-1}{2}$ છેદક રેખાઓ હોય, તો k નું પૂર્ણાંક મૂલ્ય ......

(A) –2 (B) –5 (C) 5 (D) 2 (AIEEE : 2008)

ઉકેલ : રેખાઓ $\dfrac{x-1}{k} = \dfrac{y-2}{2} = \dfrac{z-3}{3}$ અને $\dfrac{x-2}{3} = \dfrac{y-3}{k} = \dfrac{z-1}{2}$ માટે

$\vec{a} = (1, 2, 3),\ \vec{l} = (k, 2, 3)$ અને $\vec{b} = (2, 3, 1),\ \vec{m} = (3, k, 2)$

આપેલ રેખાઓ છેદક રેખાઓ છે અને તેથી તે સમતલીય છે.

$$\therefore \begin{vmatrix} x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ l_1 & l_2 & l_3 \\ m_1 & m_2 & m_3 \end{vmatrix} = 0$$

$$\therefore \begin{vmatrix} 1 & 1 & -2 \\ k & 2 & 3 \\ 3 & k & 2 \end{vmatrix} = 0$$

$\therefore\ 1(4-3k)-1(2k-9)-2(k^2-6)=0$

$\therefore\ 2k^2+5k-25=0$

$\therefore\ (2k-5)\ (k+5)=0$

$\therefore\ k=\frac{5}{2}$ અથવા $k=-5$

$\therefore\ k$ નું પૂર્ણાંક મૂલ્ય –5. અહીં, $(-5, 2, 3) \times (3, -5, 2) \neq \vec{0}$ **જવાબ : (B)**

નોંધ : $\vec{l}\times\vec{m} \neq \vec{0}$ રેખાઓ સંપાતી કે સમાંતર નથી.

(32) ત્રિપરિમાણીય અવકાશની એક રેખા $\overleftrightarrow{AB}$ એ X–અક્ષ અને Y–અક્ષની ધન દિશા સાથે અનુક્રમે $\frac{\pi}{4}$ અને $\frac{2\pi}{3}$ માપના ખૂણા બનાવે છે. જો $\overleftrightarrow{AB}$ એ Z–અક્ષની ધન દિશા સાથે લઘુકોણ θ બનાવે, તો $\theta =$ ......

(AIEEE: 2010)

(A) $\frac{\pi}{6}$ (B) $\frac{\pi}{4}$ (C) $\frac{\pi}{3}$ (D) $\frac{5\pi}{12}$

ઉકેલ : $\overleftrightarrow{AB}$ના દિક્ખૂણાઓ α, β, γ હોય, તો $cos^2\alpha + cos^2\beta + cos^2\gamma = 1$

$\therefore\ cos^2\frac{\pi}{4} + cos^2\frac{2\pi}{3} + cos^2\theta = 1$

$\therefore\ \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + cos^2\theta = 1$

$\therefore\ cos^2\theta = \frac{1}{4}$

$\therefore\ cos\theta = \frac{1}{2}$ (θ લઘુકોણ છે.)

$\therefore\ \theta = \frac{\pi}{3}$ **જવાબ : (C)**

(33) બિંદુ $P(3, -1, 11)$ થી $\frac{x}{2} = \frac{y-2}{3} = \frac{z-3}{4}$ રેખા પર દોરેલ લંબની લંબાઈ ......

(A) $\sqrt{29}$ (B) $\sqrt{33}$ (C) $\sqrt{53}$ (D) $\sqrt{65}$ (AIEEE : 2011)

ઉકેલ : $\overrightarrow{\mathbf{PA}} = (0, 2, 3) - (3, -1, 11) = (-3, 3, -8)$ $(A = (0, 2, 3))$

બિંદુ $P(3, -1, 11)$ થી રેખા $\vec{r} = (0, 2, 3) + k\,(2, 3, 4),\ k \in R$ નું લંબઅંતર

$$= \frac{|\overrightarrow{\mathbf{PA}} \times \vec{l}\,|}{|\vec{l}\,|}$$

$$= \frac{|(-3, 3, -8) \times (2, 3, 4)|}{\sqrt{4 + 9 + 16}}$$

$$= \frac{|(36, -4, -15)|}{\sqrt{29}} = \frac{\sqrt{1296 + 16 + 225}}{\sqrt{29}} = \frac{\sqrt{1537}}{\sqrt{29}} = \sqrt{53}$$ **જવાબ : (C)**

(34) $l + m + n = 0,\ l^2 + m^2 - n^2 = 0$ અને l, m, n એ બે રેખાઓની દિક્કોસાઈન હોય, તો તેમની વચ્ચેના ખૂણાનું માપ ......

(A) $\frac{\pi}{4}$ (B) $\frac{\pi}{6}$ (C) $\frac{\pi}{3}$ (D) $\frac{\pi}{2}$

ઉકેલ : l, m, n રેખાઓની દિક્કોસાઇન છે.

$\therefore\ l^2+m^2+n^2=1$ તથા $l^2+m^2=n^2$ (આપેલ છે.)

$\therefore\ 2n^2=1$. આથી $n=\pm\frac{1}{\sqrt{2}}$

હવે, $l+m+n=0$ પરથી $n=-l-m$નું મૂલ્ય $l^2+m^2-n^2=0$ માં મૂકતાં,

$l^2+m^2-(l+m)^2=0$

$\therefore\ -2lm=0$

$\therefore\ l=0$ અથવા $m=0$

જ્યારે $l=0$ તો $m+n=0$. આથી, $m=-n=\mp\frac{1}{\sqrt{2}}$

$\therefore$ એક રેખાની દિક્‌કોસાઇન $0, \mp\frac{1}{\sqrt{2}}, \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$

અને જ્યારે $m=0$ તો $l+n=0$. આથી, $l=-n=\mp\frac{1}{\sqrt{2}}$

$\therefore$ બીજી રેખાની દિક્‌કોસાઇન $\mp\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$

આ બે રેખા વચ્ચેનો ખૂણાનું માપ θ લેતાં,

$$cos\theta = \left|(0)\left(\mp\frac{1}{\sqrt{2}}\right)+\left(\mp\frac{1}{\sqrt{2}}\right)(0)+\left(\pm\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\left(\pm\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\right| = \frac{1}{2}$$

$\therefore\ \theta=\frac{\pi}{3}$ **જવાબ : (C)**

(35) ભિન્ન બિંદુઓ $(x, 0, 0)$, $(0, y, 0)$, $(0, 0, z)$ અને $(0, 0, 0)$ થી સમાન અંતરે આવેલું બિંદુ ......

(A) (x, y, z) (B) $\left(\frac{x}{2}, \frac{y}{2}, \frac{z}{2}\right)$ (C) $\left(\frac{x}{3}, \frac{y}{3}, \frac{z}{3}\right)$ (D) $(3x, 3y, 3z)$

ઉકેલ : ધારો કે $P(a, b, c)$ આપેલાં બિંદુઓથી સમાન અંતરે આવેલું છે.

$\therefore\ A(x, 0, 0)$, $B(0, y, 0)$, $C(0, 0, z)$, $O(0, 0, 0)$ લેતાં,

$PA^2=PO^2$

$\therefore\ (x-a)^2+b^2+c^2=a^2+b^2+c^2$

$\therefore\ x^2-2ax=0$

$\therefore\ a=\frac{x}{2}$ (બિંદુઓ ભિન્ન હોવાથી $x\neq 0$)

તે જ પ્રમાણે, $PB^2=PO^2$ અને $PC^2=PO^2$ લેતાં, $b=\frac{y}{2}$ અને $c=\frac{z}{2}$

$\therefore$ માંગેલ બિંદુ $\left(\frac{x}{2}, \frac{y}{2}, \frac{z}{2}\right)$. **જવાબ : (B)**

(36) જો રેખા X-અક્ષ, Y-અક્ષ અને Z-અક્ષની ધન દિશા સાથે અનુક્રમે α, β, γ માપના ખૂણાઓ બનાવે, તો $cos2\alpha + cos2\beta + cos2\gamma =$ ......

(A) -1 (B) 1 (C) -2 (D) 2

ઉકેલ : અહીં, $cos^2\alpha + cos^2\beta + cos^2\gamma = 1$

હવે, $\cos 2\alpha + \cos 2\beta + \cos 2\gamma = 2cos^2\alpha - 1 + 2cos^2\beta - 1 + 2cos^2\gamma - 1$

$= 2\left(cos^2\alpha + cos^2\beta + cos^2\gamma\right) - 3$

$= 2(1) - 3 = -1$ **જવાબ : (A)**

(37) $(4, 2, 3)$ માંથી પસાર થતી અને રેખા $\frac{x-4}{2} = \frac{y+1}{-3} = \frac{z+10}{8}$ ને સમાંતર રેખાનું સમીકરણ -

(A) $\frac{x-4}{4} = \frac{y+1}{2} = \frac{z+10}{3}$ (B) $\frac{x-4}{-4} = \frac{y-2}{1} = \frac{z-3}{10}$

(C) $\frac{x-4}{2} = \frac{y-2}{-3} = \frac{z-3}{8}$ (D) $\frac{x-4}{4} = \frac{y-2}{2} = \frac{z-3}{3}$

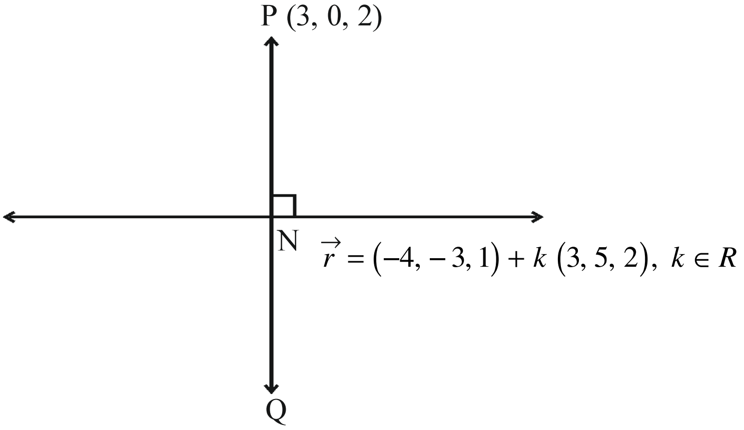
ઉકેલ : આપેલ રેખાની દિશામાં સદિશ $\vec{l} = (2, -3.8)$ = આપેલ રેખાને સમાંતર રેખાનો સદિશ.

$\therefore$ $(4, 2, 3)$ માંથી પસાર થતી અને $\vec{l} = (2, -3.8)$ દિશાવાળી રેખાનું સમીકરણ

$\frac{x-4}{2} = \frac{y-2}{-3} = \frac{z-3}{8}$. **જવાબ : (C)**

(38) રેખા $\frac{x+4}{3} = \frac{y+3}{5} = \frac{z-1}{2}$ ને સાપેક્ષ બિંદુ $(3, 0, 2)$ નું પ્રતિબિંબ ......

(A) $(-1, 2, 3)$ (B) $(-3, 0, -2)$ (C) $(-4, 2, 1)$ (D) $(-5, 4, 4)$



આકૃતિ 21.3

ઉકેલ : રેખા $\vec{r} = (-4, -3, 1) + k\,(3, 5, 2),\ k \in R$ પરનું કોઈ પણ બિંદુ

$N(-4+3k, -3+5k, 1+2k)$ ને $P(3, 0, 2)$ માંથી રેખા પરનો લંબપાદ N લેતાં,

$\overrightarrow{\mathbf{PN}} \perp \vec{l}$

$\therefore\ (3k-4-3, 5k-3-0, 2k+1-2) \cdot (3, 5, 2) = 0$

$\therefore\ 9k - 21 + 25k - 15 + 4k - 2 = 0$

$\therefore\ 38k - 38 = 0$

$\therefore\ k = 1$

$\therefore$ લંબપાદ $N(-1, 2, 3)$

P નું આપેલ રેખાને સાપેક્ષ પ્રતિબિંબ Q લેતાં N એ $\overline{PQ}$ નું મધ્યબિંદુ થશે.

$Q(a, b, c)$ લેતાં $(-1, 2, 3) = \left(\frac{a+3}{2}, \frac{b+0}{2}, \frac{c+2}{2}\right)$

$\therefore\ Q(-5, 4, 4)$ **જવાબ : (D)**

(39) રેખાઓ $\frac{x+2}{1} = \frac{y-7}{-1} = \frac{z-5}{3}$ અને $\vec{r} = (6, 3, -3) + k\,(4, 2, -3),\ k \in R$ થી સદિશ $-5\hat{i} + 7\hat{j} + 2\hat{k}$ ની દિશાવાળી રેખા પર જે રેખાખંડ કપાય તેની લંબાઈ ......

(A) $\sqrt{86}$ (B) 12 (C) $\sqrt{78}$ (D) $\sqrt{131}$

ઉકેલ : ધારો કે $-5\hat{i} + 7\hat{j} + 2\hat{k}$ દિશાવાળી રેખા એ $\frac{x+2}{1} = \frac{y-7}{-1} = \frac{z-5}{3}$

એટલે કે $\vec{r} = (-2, 7, 5) + k\,(1, -1, 3),\ k \in R$ ને બિંદુ $P(-2+k_1, 7-k_1, 5+3k_1)$

અને રેખા $\vec{r} = (6, 3, -3) + k\,(4, 2, -3),\ k \in R$ ને બિંદુ $Q(6+4k_2, 3+2k_2, -3-3k_2)$ માં છેદે છે.

$\overrightarrow{\mathbf{PQ}} = (8 + 4k_2 - k_1,\ -4 + 2k_2 + k_1,\ -8 - 3k_2 - 3k_1)$

પરંતુ $\overleftrightarrow{PQ}$ ની દિશા $(-5, 7, 2)$ છે.

$\therefore\ \frac{8+4k_2-k_1}{-5} = \frac{-4+2k_2+k_1}{7} = \frac{-8-3k_2-3k_1}{2}$

$\therefore\ \frac{8+4k_2-k_1}{-5} = \frac{-4+2k_2+k_1}{7}$

$\therefore\ 38k_2 - 2k_1 = -36$ (1)

અને $\frac{-4+2k_2+k_1}{7} = \frac{-8-3k_2-3k_1}{2}$

$\therefore\ 25k_2 + 23k_1 = -48$ (2)

સમીકરણ (1) અને (2)ને ઉકેલીએ.

$874k_2 - 46k_1 = -828$ અને $50k_2 + 46k_1 = -96$

$\therefore$ $924k_2 = -924$ આથી $k_2 = -1$ અને $k_1 = -1$

$\therefore$ $P(-3, 8, 2)$ અને $Q(2, 1, 0)$

આપેલ બે રેખાથી $\overleftrightarrow{PQ}$ પર $\overline{PQ}$ કપાય છે.

$\therefore$ $PQ = \sqrt{(2+3)^2 + (1-8)^2 + (0-2)^2} = \sqrt{25+49+4} = \sqrt{78}$ **જવાબ : (C)**

(40) રેખાઓ $\vec{r} = 3\hat{i} + 4\hat{j} - \hat{k} + \lambda(-2\hat{i} + 4\hat{j} - 2\hat{k})$, $\lambda \in R$ અને

$\vec{r} = 3\hat{i} + 4\hat{j} - \hat{k} + \mu(-2\hat{i} + 4\hat{j} - 2\hat{k})$, $\mu \in R$ વચ્ચેનું અંતર ......

(A) $3\sqrt{14}$ (B) $\sqrt{21}$ (C) $3\sqrt{2}$ (D) 0

ઉકેલ : આપેલ રેખાઓ માટે $\vec{a} = (2, -3, 4)$, $\vec{l} = (1, -2, 1)$ અને $\vec{b} = (3, 4, -1)$, $\vec{m} = (-2, 4, -2)$.

અહીં $\vec{l} = k\vec{m}$, $k = -\frac{1}{2}$

$\therefore$ આપેલ રેખાઓ એકબીજાને સમાંતર છે અથવા સંપાતી છે.

$(2, -3, 4) = (3, 4, -1) + \mu(-2, 4, -2) \Rightarrow (-1, -7, 5) = \mu(2, 4, -2)$

આ શક્ય નથી. આથી (2, –3, 4) એ બીજી રેખા પર નથી.

$\therefore$ રેખાઓ પરસ્પર સમાંતર છે.

તેમની વચ્ચેનું લંબઅંતર $= |(\vec{b} - \vec{a}) \times \hat{l}|$

$$= \frac{|(1, 7, -5) \times (1, -2, 1)|}{\sqrt{6}}$$

$$= \frac{|(-3, -6, -9)|}{\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{126}}{\sqrt{6}} = \sqrt{21}$$ **જવાબ : (B)**

(41) બે રેખાઓની દિક્‌કોસાઇન સમીકરણો $al + bm + cn = 0$ અને $fmn + gnl + hlm = 0$ નું સમાધાન કરે છે. જો આ રેખાઓ પરસ્પર લંબ હોય, તો ...... $(a \neq 0, b \neq 0, c \neq 0)$

(A) $\frac{f}{a^2} + \frac{g}{b^2} + \frac{c}{h^2} = 0$ (B) $\frac{f}{a} + \frac{g}{b} + \frac{h}{c} = 0$

(C) $\frac{a^2}{f} + \frac{b^2}{g} + \frac{c^2}{h} = 0$ (D) $\frac{a}{f} + \frac{b}{g} + \frac{c}{h} = 0$

ઉકેલ : $al + bm + cn = 0$

$\therefore$ $n = \frac{-al - bm}{c}$ નું મૂલ્ય $fmn + gnl + hlm = 0$ માં મૂકતાં,

$$fm\frac{(-al - bm)}{c} + gl\frac{(-al - bm)}{c} + hlm = 0$$

$\therefore\ -aflm - bfm^2 - agl^2 - bglm + chlm = 0$

$-m^2$ વડે ભાગતાં, $af\left(\frac{l}{m}\right) + bf + ag\left(\frac{l}{m}\right)^2 + bg\left(\frac{l}{m}\right) - ch\left(\frac{l}{m}\right) = 0$

$\therefore\ \frac{l}{m}$ માં દ્વિઘાત સમીકરણ $ag\left(\frac{l}{m}\right)^2 + (af + bg - ch)\left(\frac{l}{m}\right) + bf = 0$ મળે,

તેનાં બે બીજ $\alpha = \frac{l_1}{m_1}$ અને $\beta = \frac{l_2}{m_2}$ લેતાં, બે બીજનો ગુણાકાર $\alpha\beta = \frac{l_1 l_2}{m_1 m_2} = \frac{bf}{ag}$

$\therefore\ \frac{l_1 l_2}{\left(\frac{f}{a}\right)} = \frac{m_1 m_2}{\left(\frac{g}{b}\right)}$

જો n ના બદલે l અથવા m નો લોપ કર્યો હોય, તો $\frac{n_1 n_2}{\left(\frac{h}{c}\right)} = \frac{l_1 l_2}{\left(\frac{f}{a}\right)} = \frac{m_1 m_2}{\left(\frac{g}{b}\right)}$ મળે.

રેખાની દિક્‌કોસાઈન l_1, m_1, n_1 અને l_2, m_2, n_2 લેતાં, રેખાઓ પરસ્પર લંબ હોય, તો

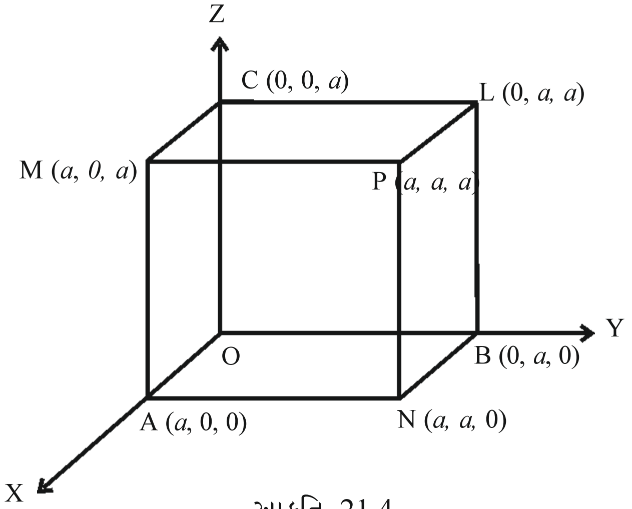
$l_1 l_2 + m_1 m_2 + n_1 n_2 = 0$

$\therefore\ \frac{f}{a} + \frac{g}{b} + \frac{h}{c} = 0$ **જવાબ : (B)**

(42) સમઘનના ચાર વિકર્ણો સાથે કોઈક રેખા α, β, γ અને δ માપના ખૂણા બનાવે, તો

$sin^2\alpha + sin^2\beta + sin^2\gamma + sin^2\delta = \ldots\ldots$

(A) $\frac{4}{3}$ (B) $\frac{8}{3}$ (C) 1 (D) 2



આકૃતિ 21.4

ઉકેલ : ધારો કે રેખાની દિક્‌કોસાઈન l, m, n છે. સમઘનના વિકર્ણો $\overline{OP}, \overline{AL}, \overline{BM}, \overline{CN}$ માટે

$\overrightarrow{\mathbf{OP}} = (a, a, a)$, $\overrightarrow{\mathbf{AL}} = (-a, a, a)$, $\overrightarrow{\mathbf{BM}} = (a, -a, a)$ અને $\overrightarrow{\mathbf{CN}} = (a, a, -a)$.

$\therefore$ $\overrightarrow{\mathbf{OP}}$ ની દિક્કોસાઈન $\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}$.

આપેલી રેખા $\overleftrightarrow{OP}$ સાથે α માપનો ખૂણો બનાવે, તો $cos\alpha = \frac{|l+m+n|}{\sqrt{3}}$

તે જ પ્રમાણે $cos\beta = \frac{|-l+m+n|}{\sqrt{3}}$, $cos\gamma = \frac{|l-m+n|}{\sqrt{3}}$ અને $cos\delta = \frac{|l+m-n|}{\sqrt{3}}$.

હવે $\quad cos^2\alpha + cos^2\beta + cos^2\gamma + cos^2\delta = \frac{4\left(l^2+m^2+n^2\right)}{3} = \frac{4}{3}$

$\therefore$ $sin^2\alpha + sin^2\beta + sin^2\gamma + sin^2\delta = 4 - \left(cos^2\alpha + cos^2\beta + cos^2\gamma + cos^2\delta\right)$

$= 4 - \frac{4}{3} = \frac{8}{3}$ **જવાબ : (B)**

(43) રેખા X-અક્ષ અને Z-અક્ષ સાથે θ માપનો તથા Y-અક્ષ સાથે β માપનો ખૂણો બનાવે છે. જો $sin^2\beta = 3sin^2\theta$ હોય, તો $cos^2\theta =$ ......

(A) $\frac{3}{5}$ (B) $\frac{1}{5}$ (C) $\frac{2}{3}$ (D) $\frac{2}{5}$ (AIEEE:2004)

ઉકેલ : રેખા X-અક્ષ, Y-અક્ષ અને Z-અક્ષ સાથે અનુક્રમે θ, β અને θ માપના ખૂણા બનાવે છે.

$\therefore$ $cos^2\theta + cos^2\beta + cos^2\theta = 1$

$\therefore$ $2cos^2\theta + 1 - sin^2\beta = 1$

$\therefore$ $2cos^2\theta - 3sin^2\theta = 0$ $\quad (sin^2\beta = 3sin^2\theta)$

$\therefore$ $2cos^2\theta - 3(1 - cos^2\theta) = 0$

$\therefore$ $5cos^2\theta = 3$

$\therefore$ $cos^2\theta = \frac{3}{5}$. **જવાબ : (A)**

(44) ઊગમબિંદુથી સમતલ પરનો લંબપાદ $(-3, 4, -2)$ હોય, તેવા સમતલનું સમીકરણ ......

(A) $3x - 4y + 2z - 29 = 0$ (B) $3x - 4y + 2z + 29 = 0$

(C) $4x - 2y - 3z + 29 = 0$ (D) $4x - 2y - 3z - 29 = 0$

ઉકેલ : ઊગમબિંદુ $O(0, 0, 0)$થી સમતલ પરનો લંબપાદ $P(-3, 4, -2)$ છે.

$\therefore$ સમતલનો અભિલંબ સદિશ $\vec{n} = \overrightarrow{\mathbf{OP}} = (-3, 4, -2) = (a, b, c)$

$\therefore$ સમતલનું સમીકરણ $a(x - x_1) + b(y - y_1) + c(z - z_1) = 0$

$\therefore$ $-3(x+3) + 4(y-4) - 2(z+2) = 0$

$\therefore$ $-3x - 9 + 4y - 16 - 2z - 4 = 0$

$\therefore$ $3x - 4y + 2z + 29 = 0$ **જવાબ : (B)**

(45) રેખા $\frac{x+3}{2} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-2}{2}$ અને સમતલ $2x-3y-z+7=0$નું છેદબિંદુ ......

(A) $(-3, 1, 2)$ (B) $(2, -3, -1)$ (C) $(2, 1, 2)$ (D) $(-11, -3, -6)$

ઉકેલ : રેખા $\vec{r} = (-3, 1, 2) + k(2, 1, 2),\ k \in R$ પરનું કોઈ પણ બિંદુ $(-3+2k, 1+k, 2+2k)$ છે.

તે સમતલ $2x-3y-z+7=0$ પર હોય, તો

$$2(-3+2k)-3(1+k)-(2+2k)+7=0$$

$$-4 = k$$

$\therefore$ છેદબિંદુ $= (-11, -3, -6)$ **જવાબ : (D)**

(46) $\hat{i}+3\hat{j}+2\hat{k}$ સ્થાન સદિશવાળા બિંદુમાંથી પસાર થતા અને $\vec{r}\cdot(3\hat{i}+5\hat{j}+4\hat{k})=0$ ને સમાંતર સમતલનું સમીકરણ ......

(A) $3x+4y+4z+26=0$ (B) $3x+5y+4z-26=0$

(C) $x+3y+2z+26=0$ (D) $x+3y+2z-26=0$

ઉકેલ : સમતલ $\vec{r}\bullet(3\hat{i}+5\hat{j}+4\hat{k})=0$ ને સમાંતર સમતલનું સમીકરણ

$\vec{r}\bullet(3\hat{i}+5\hat{j}+4\hat{k})+t=0$

તે બિંદુ $(1, 3, 2)$માંથી પસાર થાય છે.

$\therefore\ (1, 3, 2)\bullet(3, 5, 4)+t=0$

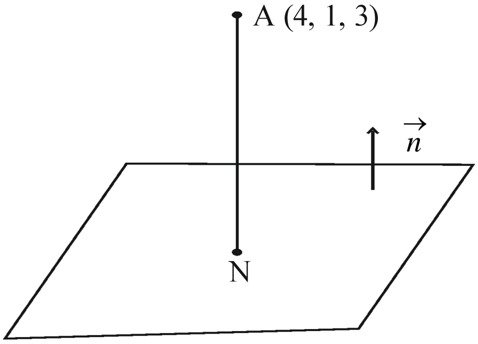
$\therefore\ t=-26$

$\therefore$ સમતલનું સમીકરણ $\vec{r}\bullet(3\hat{i}+5\hat{j}+4\hat{k})-26=0$

$\therefore\ 3x+5y+4z-26=0$ **જવાબ : (B)**

(47) $(4, 1, 3)$થી સમતલ $x-y-2z-3=0$ પરનો લંબપાદ ......

(A) $(6, -1, -1)$ (B) $(1, -1, -2)$ (C) $(-3, -2, -5)$ (D) $(5, 0, 1)$



આકૃતિ 21.5

ઉકેલ : સમતલ $x-y-2z-3=0$ નો અભિલંબ સદિશ $\vec{n}=(1, -1, -2)$ છે.

બિંદુ $A(4, 1, 3)$ થી સમતલ પરનો લંબપાદ N લેતાં,

$\overleftrightarrow{AN}$ નું સમીકરણ $\vec{r} = \vec{a} + k\vec{n}$, $k \in R$

$\therefore \ \vec{r} = (4, 1, 3) + k\,(1, -1, -2)$, $k \in R$

$\therefore$ કોઈક $k \in R$ માટે, $N(4+k, 1-k, 3-2k)$ થશે અને તે સમતલ $x - y - 2z - 3 = 0$ પર છે.

$\therefore \ 4 + k - 1 + k - 6 + 4k - 3 = 0$

$\therefore \ 6k = 6$. આથી $k = 1$

$\therefore$ લંબપાદ $N(5, 0, 1)$ છે. **જવાબ : (D)**

(48) બિંદુ $(2, -1, 3)$ માંથી પસાર થતી સમતલ $5x + 4y - 7z - 1 = 0$ ને લંબરેખાનું સમીકરણ ......

(A) $\vec{r} = 2\hat{i} - \hat{j} + 3\hat{k} + \lambda(5\hat{i} + 4\hat{j} - 7\hat{k})$, $\lambda \in R$

(B) $\vec{r} = 5\hat{i} + 4\hat{j} - 7\hat{k} + \lambda(2\hat{i} - \hat{j} + 3\hat{k})$, $\lambda \in R$

(C) $\vec{r} = 2\hat{i} - \hat{j} + 3\hat{k} + \lambda(3\hat{i} + 5\hat{j} - 10\hat{k})$, $\lambda \in R$

(D) મળશે નહિ.

ઉકેલ : સમતલનો અભિલંબ સદિશ $\vec{n} = (5, 4, -7)$ એ સમતલને લંબ રેખાની દિશાનો સદિશ થશે.

રેખા $\vec{a} = (2, -1, 3)$ માંથી પસાર થાય છે.

$\therefore$ લંબરેખાનું સમીકરણ $\vec{r} = \vec{a} + \lambda\vec{n}$, $\lambda \in R$

$\therefore \ \vec{r} = (2, -1, 3) + \lambda\,(5, 4, -7)$, $\lambda \in R$

$\therefore \ \vec{r} = 2\hat{i} - \hat{j} + 3\hat{k} + \lambda(5\hat{i} + 4\hat{j} - 7\hat{k})$, $\lambda \in R$ **જવાબ : (A)**

(49) સમતલના અભિલંબ સદિશનું માન $3\sqrt{3}$ છે. સમતલનો અભિલંબ ત્રણેય યામાક્ષો સાથે સમાન માપના ખૂણા બનાવે છે. જો આ સમતલ બિંદુ $(3, -1, 2)$ માંથી પસાર થતું હોય, તો તેનું સમીકરણ ......

(A) $\vec{r} \cdot (3\hat{i} - \hat{j} + 2\hat{k}) = 0$

(B) $\vec{r} \cdot (3\hat{i} - \hat{j} + 2\hat{k}) = 6$

(C) $\vec{r} \cdot (\hat{i} + \hat{j} + \hat{k}) = 4$

(D) $\vec{r} \cdot (\hat{i} + \hat{j} + \hat{k}) = 0$

ઉકેલ : સમતલનો અભિલંબ સદિશ યામાક્ષો સાથે સમાન ખૂણા બનાવે છે. આથી, $\vec{n} = (l, l, l)$

$\therefore \ l^2 + l^2 + l^2 = 1$ આથી, $l = \pm \frac{1}{\sqrt{3}}$

હવે, $|\vec{n}| = 3\sqrt{3}$ હોવાથી, $\vec{n} = 3\sqrt{3}\left(\dfrac{\hat{i} + \hat{j} + \hat{k}}{\sqrt{3}}\right) = 3\hat{i} + 3\hat{j} + 3\hat{k}$

સમતલનું સમીકરણ,

$$\vec{r} \bullet \vec{n} = \vec{a} \bullet \vec{n}$$

$$\therefore \quad \vec{r} \bullet (3\hat{i} + 3\hat{j} + 3\hat{k}) = (3, -1, 2) \cdot (3, 3, 3)$$

$$\therefore \quad \vec{r} \bullet (\hat{i} + \hat{j} + \hat{k}) = 4$$

જવાબ : (C)

(50) બિંદુઓ $(-2, 4, 7)$ અને $(3, -5, 8)$ ને જોડતા રેખાખંડનું સમતલ $x - 2y + 3z = 15$ ...... ગુણોત્તરમાં વિભાજન કરે છે.

(A) $-2:11$ (B) $2:11$ (C) $17:26$ (D) $1:2$

ઉકેલ : ધારો કે સમતલ $x - 2y + 3z = 15$, $P(-2, 4, 7)$ અને $Q(3, -5, 8)$ ને જોડતા રેખાખંડનું $\lambda : 1$ ગુણોત્તરમાં વિભાજન કરે છે.

$\therefore$ વિભાજન કરતું બિંદુ $R\left(\frac{3\lambda - 2}{\lambda + 1}, \frac{-5\lambda + 4}{\lambda + 1}, \frac{8\lambda + 7}{\lambda + 1}\right)$ સમતલ $x - 2y + 3z = 15$ નું બિંદુ છે.

$$\therefore \quad \frac{3\lambda - 2}{\lambda + 1} - 2\left(\frac{-5\lambda + 4}{\lambda + 1}\right) + 3\left(\frac{8\lambda + 7}{\lambda + 1}\right) = 15$$

$$\therefore \quad 3\lambda - 2 + 10\lambda - 8 + 24\lambda + 21 = 15\lambda + 15$$

$$\therefore \quad 22\lambda = 4$$

$$\therefore \quad \lambda = \frac{2}{11}$$

$\therefore$ ગુણોત્તર $2:11$

જવાબ : (B)

(51) બે સમતલો $2x + y + 2z - 8 = 0$ અને $4x + 2y + 4z + 5 = 0$ વચ્ચેનું અંતર ...... છે.

(A) $\frac{7}{2}$ (B) $\frac{5}{2}$ (C) $\frac{3}{2}$ (D) $\frac{9}{2}$

(AIEEE : 2004, JEE : 2013)

ઉકેલ : સમાંતર સમતલો $4x + 2y + 4z - 16 = 0$ અને $4x + 2y + 4z + 5 = 0$ વચ્ચેનું લંબઅંતર

$$= \frac{|d_2 - d_1|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

$$= \frac{|5 + 16|}{\sqrt{16 + 4 + 16}} = \frac{21}{6} = \frac{7}{2}$$

જવાબ : (A)

(52) $(1, 0, 0)$ અને $(0, 1, 0)$ માંથી પસાર થતા અને સમતલ $x + y = 3$ સાથે $\frac{\pi}{4}$ માપનો ખૂણો બનાવતા સમતલના અભિલંબ સદિશની દિક્સંખ્યાઓ ......

(A) $1, \sqrt{2}, 1$ (B) $1, 1, \sqrt{2}$ (C) $1, 1, 2$ (D) $\sqrt{2}, 1, 1$

(AIEEE : 2002)

ઉકેલ : ધારો કે સમતલના અભિલંબની દિક્સંખ્યાઓ a, b, c છે.

સમતલ $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$ માંથી પસાર થાય છે.

$\therefore\ a(x_2 - x_1) + b(y_2 - y_1) + c(z_2 - z_1) = 0$

$\therefore\ a(0-1) + b(1-0) + c(0-0) = 0$

$\therefore\ -a + b = 0$

$\therefore\ a = b$

$\therefore$ અભિલંબ સદિશ $\vec{n_1} = (a, a, c)$.

તથા સમતલ $x + y = 3$ નો અભિલંબ સદિશ $\vec{n_2} = (1, 1, 0)$

હવે, $cos\theta = \dfrac{|\vec{n_1} \cdot \vec{n_2}|}{|\vec{n_1}||\vec{n_2}|}$

$\therefore\ cos\dfrac{\pi}{4} = \dfrac{|a+a|}{\sqrt{2a^2 + c^2}\sqrt{2}}$

$\therefore\ \dfrac{1}{\sqrt{2}} = \dfrac{2|a|}{\sqrt{2a^2 + c^2} \cdot \sqrt{2}}$

$\therefore\ 2a^2 + c^2 = 4a^2$

$\therefore\ c = \pm\sqrt{2}\,a$

$\therefore$ દિક્સંખ્યાઓ $a, a, \pm\sqrt{2}\,a$ એટલે કે $1, 1, \pm\sqrt{2}$. **જવાબ : (B)**

(53) એક જ ઊગમબિંદુવાળા લંબવૃત્તીય અક્ષોની બે યામ પદ્ધતિ છે. એક સમતલ ઊગમબિંદુથી પ્રથમ યામ પદ્ધતિના અક્ષોને a, b, c અંતરે અને બીજી યામ પદ્ધતિના અક્ષોને a', b', c' અંતરે છેદે, તો ......

(A) $\dfrac{1}{a^2} + \dfrac{1}{b^2} + \dfrac{1}{c^2} + \dfrac{1}{a'^2} + \dfrac{1}{b'^2} + \dfrac{1}{c'^2} = 0$ (B) $\dfrac{1}{a^2} - \dfrac{1}{b^2} - \dfrac{1}{c^2} + \dfrac{1}{a'^2} - \dfrac{1}{b'^2} - \dfrac{1}{c'^2} = 0$

(C) $\dfrac{1}{a^2} + \dfrac{1}{b^2} + \dfrac{1}{c^2} - \dfrac{1}{a'^2} - \dfrac{1}{b'^2} - \dfrac{1}{c'^2} = 0$ (D) $\dfrac{1}{a^2} + \dfrac{1}{b^2} + \dfrac{1}{c^2} + \dfrac{1}{a'^2} + \dfrac{1}{b'^2} + \dfrac{1}{c'^2} = 2$

(AIEEE : 2003)

ઉકેલ : સમતલના અક્ષો પરના અંતઃખંડ a, b, c છે. તેથી સમતલનું સમીકરણ $\pm\dfrac{x}{a} \pm \dfrac{y}{b} \pm \dfrac{z}{c} = 1$

તે જ પ્રમાણે આ જ સમતલનું સમીકરણ $\pm\dfrac{x}{a'} \pm \dfrac{y}{b'} \pm \dfrac{z}{c'} = 1$ પણ થશે.

ઊગમબિંદુથી સમતલનું લંબઅંતર $d_1 = \dfrac{|0+0+0-1|}{\sqrt{\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}}} = \dfrac{1}{\sqrt{\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}}}$.

તે જ પ્રમાણે સમતલનું સમીકરણ બીજી યામ પદ્ધતિ પ્રમાણે લેતાં, ઊગમબિંદુથી લંબઅંતર

$d_2 = \dfrac{1}{\sqrt{\frac{1}{(a')^2} + \frac{1}{(b')^2} + \frac{1}{(c')^2}}}$.

હવે $d_1 = d_2$

$$\therefore \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{(a')^2}+\frac{1}{(b')^2}+\frac{1}{(c')^2}}}$$

$$\therefore \frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}-\frac{1}{(a')^2}-\frac{1}{(b')^2}-\frac{1}{(c')^2} = 0$$ **જવાબ : (C)**

(54) $(-1, 0, 1)$ અને $(2, 2, 3)$ માંથી પસાર થતા તથા રેખા $\frac{x-2}{3} = \frac{y-1}{-2} = z-1$ ને સમાંતર સમતલનું સમીકરણ ......

(A) $3x-2y+z+2=0$ (B) $2x-y-4z+2=0$

(C) $2x+y-4z-6=0$ (D) $2x+y-4z+6=0$

ઉકેલ : ધારો કે સમતલનો અભિલંબ સદિશ $\vec{n} = (a, b, c)$ છે.

$A(-1, 0, 1)$ સમતલ પર આવેલું છે.

$\therefore$ સમતલનું સમીકરણ $a(x+1)+b(y-0)+c(z-1)=0$ (1)

સમતલ $B(2, 2, 3)$ માંથી પસાર થાય છે.

$\therefore 3a+2b+2c=0 \quad (a(x_2-x_1)+b(y_2-y_1)+c(z_2-z_1)=0)$ (2)

રેખા માટે $\vec{l} = (3, -2, 1)$ એ (a, b, c) ને લંબ છે.

$\therefore 3a-2b+c=0 \qquad (\vec{l} \cdot \vec{n} = 0)$ (3)

સમીકરણ (2) અને (3)નું સમાધાન કરતાં

$$\frac{a}{6} = \frac{b}{3} = \frac{c}{-12}$$

$$\therefore \frac{a}{2} = \frac{b}{1} = \frac{c}{-4}$$

$\therefore a:b:c = 2:1:(-4)$

$\therefore$ સમતલનું સમીકરણ $2(x+1)+1(y-0)-4(z-1)=0$

$\therefore 2x+y-4z+6=0.$ **જવાબ : (D)**

(55) એક સમતલ X-અક્ષને A, Y-અક્ષને B અને Z-અક્ષને C માં છેદે છે. ΔABC નું મધ્યકેન્દ્ર (α, β, γ) હોય, તો ......

(A) $\frac{x}{\alpha}+\frac{y}{\beta}+\frac{z}{\gamma}=1$ (B) $\frac{x}{\alpha}+\frac{y}{\beta}+\frac{z}{\gamma}=3$

(C) $\frac{x}{\alpha}+\frac{y}{\beta}+\frac{z}{\gamma}=\frac{1}{3}$ (D) $\frac{x}{\alpha}+\frac{y}{\beta}+\frac{z}{\gamma}=0$

ઉકેલ : સમતલ અક્ષોને $A(a, 0, 0)$, $B(0, b, 0)$ અને $C(0, 0, c)$ માં છેદે છે.

સમતલનું સમીકરણ $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$ થશે.

ΔABC નું મધ્યકેન્દ્ર $(\alpha, \beta, \gamma) = \left(\frac{a}{3}, \frac{b}{3}, \frac{c}{3}\right)$

$\therefore\ a = 3\alpha,\ b = 3\beta,\ c = 3\gamma$

$\therefore$ સમતલનું સમીકરણ $\frac{x}{3\alpha} + \frac{y}{3\beta} + \frac{z}{3\gamma} = 1$

$$\therefore\ \frac{x}{\alpha} + \frac{y}{\beta} + \frac{z}{\gamma} = 3$$

જવાબ : **(B)**

(56) $(3, 2, 0)$ માંથી પસાર થતા અને રેખા $\frac{x-3}{1} = \frac{y-6}{5} = \frac{z-4}{4}$ ને સમાવતા સમતલનું સમીકરણ ......

(A) $x - y + z = 1$ (B) $x + y + z = 5$ (C) $x + 2y - z = 1$ (D) $2x - y + z = 5$

(AIEEE : 2002)

ઉકેલ : સમતલનું સમીકરણ $\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ l_1 & l_2 & l_3 \end{vmatrix} = 0$ જ્યાં $(x_1, y_1, z_1) = (3, 2, 0)$

$(x_2, y_2, z_2) = (3, 6, 4)$

$(l_1, l_2, l_3) = (1, 5, 4)$

$$\therefore \begin{vmatrix} x-3 & y-2 & z \\ 0 & 4 & 4 \\ 1 & 5 & 4 \end{vmatrix} = 0$$

$\therefore\ -4(x-3) + 4(y-2) - 4z = 0$

$\therefore\ -x + 3 + y - 2 - z = 0$

$\therefore\ x - y + z = 1$

જવાબ : **(A)**

બીજી રીત : ધારો કે સમતલનું સમીકરણ $a(x-3) + b(y-2) + c(z-0) = 0$ છે.

રેખા પરનું કોઈ પણ બિંદુ $(k+3, 5k+6, 4k+4)$ સમતલ પર છે.

$\therefore\ a(k+3-3) + b(5k+6-2) + c(4k+4) = 0 \quad \forall\, k \in R$

$\therefore\ (a + 5b + 4c)\,k + 4b + 4c = 0 \quad \forall\, k \in R$

$\therefore\ a + 5b + 4c = 0$

$4b + 4c = 0$. i.e. $b + c = 0$

$\frac{a}{1} = \frac{b}{-1} = \frac{c}{1}$

$\therefore$ સમતલનું સમીકરણ $(x-3) - (y-2) + (z-0) = 0$

$\therefore\ x - y + z = 1.$

ત્રીજી રીત : સમતલનું સમીકરણ $a(x-3)+b(y-2)+c(z-0)=0$

સમતલનું અભિલંબ (a, b, c) એ રેખાની દિશા $(1, 5, 4)$ ને લંબ છે.

$\therefore\ a+5b+4c=0$ (1)

$(3, 6, 4)$ સમતલ પર છે.

$a(3-3)+b(6-2)+c(4)=0$

$\therefore\ 4b+4c=0$ (2)

(1) - (2) કરતાં $a+b=0$

$\therefore\ a=-b=c$ ((2) પરથી)

$\therefore\ x-3-(y-2)+z=0$ સમતલનું સમીકરણ છે.

$\therefore\ x-y+z=1$

(57) એક ચતુષ્ફલકનાં શિરોબિંદુઓ $O(0, 0, 0)$, $A(1, 2, 1)$, $B(2, 1, 3)$, $C(-1, 1, 2)$ છે. બિંદુઓ O, A, B થી અને A, B, C થી રચાતાં સમતલો વચ્ચેના ખૂણાનું માપ ...... (AIEEE:2003)

(A) $cos^{-1}\left(\frac{17}{31}\right)$ (B) $\frac{\pi}{6}$ (C) $\frac{\pi}{2}$ (D) $cos^{-1}\left(\frac{19}{35}\right)$

ઉકેલ : O, A, B શિરોબિંદુઓથી રચાતા સમતલનો અભિલંબ સદિશ

$$\vec{n_1} = \overrightarrow{\mathbf{OA}} \times \overrightarrow{\mathbf{OB}} = (1, 2, 1) \times (2, 1, 3) = (5, -1, -3)$$

અને A, B, C થી રચાતા સમતલનો અભિલંબ સદિશ

$$\vec{n_2} = \overrightarrow{\mathbf{AB}} \times \overrightarrow{\mathbf{AC}} = (1, -1, 2) \times (-2, -1, 1) = (1, -5, -3)$$

તેમના વચ્ચેના ખૂણાનું માપ θ હોય તો $cos\theta = \frac{|\vec{n_1} \cdot \vec{n_2}|}{|\vec{n_1}||\vec{n_2}|} = \frac{|5+5+9|}{\sqrt{35} \cdot \sqrt{35}} = \frac{19}{35}$

$\therefore\ \theta = cos^{-1}\left(\frac{19}{35}\right)$ **જવાબ : (D)**

(58) રેખા $\frac{x-4}{1} = \frac{y-2}{1} = \frac{z-k}{2}$ એ સમતલ $2x-4y+z=7$ માં આવેલી હોય, તો $k =$ ......

(A) 7 (B) –7 (C) 1 (D) કોઈ પણ વાસ્તવિક સંખ્યા નથી.

(IIT : 2003)

ઉકેલ : રેખા સમતલમાં આવેલી છે. તેથી રેખા પરનું બિંદુ $(4, 2, k)$ સમતલમાં છે.

$\therefore\ 2(4) - 4(2) + k = 7$

$\therefore\ k = 7.$ **જવાબ : (A)**

(59) સમતલ $x-3y+4z+6=0$ ના અક્ષો પરના અંતઃખંડોનો સરવાળો ......

(A) $\frac{11}{2}$ (B) $\frac{-11}{2}$ (C) $\frac{-19}{2}$ (D) 8

ઉકેલ : $x-3y+4z=-6$

$\therefore \frac{x}{-6}+\frac{y}{2}+\frac{z}{-\frac{3}{2}}=1$

$\therefore$ સમતલના અંતઃખંડો $-6, 2, -\frac{3}{2}$

$\therefore$ અંતઃખંડોનો સરવાળો $= \frac{-11}{2}$ **જવાબ : (B)**

(60) સમતલ અક્ષોને A, B, C માં છેદે છે. જો ΔABC નું મધ્યકેન્દ્ર $\left(p^2, p, 1\right)$ હોય, તો સમતલનું સમીકરણ ......

(A) $p^2x+py+z==3p^2$ (B) $x+py+p^2z=3p^2$

(C) $p^2x+py+z=3$ (D) $x+py+p^2z=3$

ઉકેલ : ધારો કે સમતલ અક્ષોને $A(a, 0, 0)$, $B(0, b, 0)$, $C(0, 0, c)$ માં છેદે છે.

સમતલનું સમીકરણ $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$

ΔABC નું મધ્યકેન્દ્ર $\left(p^2, p, 1\right)=\left(\frac{a}{3}, \frac{b}{3}, \frac{c}{3}\right)$

$\therefore a=3p^2, b=3p, c=3$

$\therefore$ સમતલનું સમીકરણ $\frac{x}{3p^2}+\frac{y}{3p}+\frac{z}{3}=1$

$\therefore x+py+p^2z=3p^2$ **જવાબ : (B)**

(61) બિંદુ $(4, 2, 3)$ નું સમતલ $2x+3y-6z+11=0$ થી લંબઅંતર = ...

(A) $\frac{1}{7}$ (B) $\frac{43}{7}$ (C) 1 (D) $\frac{15}{7}$

ઉકેલ : બિંદુ (x_1, y_1, z_1) નું સમતલ $ax+by+cz+d=0$ થી લંબઅંતર

$$p=\frac{|ax_1+by_1+cz_1+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$

$$=\frac{|8+6-18+11|}{\sqrt{4+9+36}}=\frac{7}{7}=1.$$ **જવાબ : (C)**

(62) $(1, 4, 7)$ અને $(3, 0, 1)$ ને જોડતા રેખાખંડના લંબદ્વિભાજક સમતલનું સમીકરણ ......

(A) $x-2y-3z=0$ (B) $x-2y-3z+14=0$

(C) $x-2y-3z-14=0$ (D) $x+2y+3z-18=0$

ઉકેલ : $A(1, 4, 7)$ અને $B(3, 0, 1)$ ને જોડતા $\overline{AB}$ નું મધ્યબિંદુ $M(2, 2, 4)$ થશે.

લંબદ્વિભાજક સમતલનો અભિલંબ સદિશ $\vec{n} = \overrightarrow{\mathbf{AB}} = (2, -4, -6)$·

$\therefore$ લંબદ્વિભાજક સમતલનું સમીકરણ $\vec{r} \cdot \vec{n} = \vec{a} \cdot \vec{n}$.

$\therefore \ \vec{r} \cdot (1, -2, -3) = (2, 2, 4) \cdot (1, -2, -3) = -14$

$\therefore \ x - 2y - 3z + 14 = 0$ **જવાબ : (B)**

(63) સમતલો $x + 3y - z = 1$ અને $\vec{r} \cdot (-2\hat{i} + \hat{j} + 4\hat{k}) = 2$ ની છેદરેખા ...... સદિશને સમાંતર છે.

(A) $3\hat{i} - 2\hat{j} - 7\hat{k}$ (B) $-13\hat{i} + 2\hat{j} - 7\hat{k}$ (C) $13\hat{i} - 2\hat{j} + 7\hat{k}$ (D) $2\hat{i} + 7\hat{j} - 13\hat{k}$

ઉકેલ : $\vec{n_1} = (1, 3, -1)$, $\vec{n_2} = (-2, 1, 4)$

$\vec{l} = \vec{n_1} \times \vec{n_2} = 13\hat{i} - 2\hat{j} + 7\hat{k}$ સદિશની દિશાવાળી રેખા એ છેદરેખા છે.

તે $-13\hat{i} + 2\hat{j} - 7\hat{k}$ સદિશને સમાંતર છે. **જવાબ : (B), (C)**

(64) રેખા $\vec{r} = 2\hat{i} - 2\hat{j} + 3\hat{k} + \lambda(\hat{i} - \hat{j} + 4\hat{k})$ અને સમતલ $\vec{r} \cdot (\hat{i} + 5\hat{j} + \hat{k}) = 5$ વચ્ચેનું અંતર ......

(A) $\frac{10}{3\sqrt{3}}$ (B) $\frac{10}{9}$ (C) $\frac{10}{3}$ (D) $\frac{3}{10}$

(AIEEE : 2005)

ઉકેલ : $(1, -1, 4) \cdot (1, 5, 1) = 0$ અને (2, –2, 3) સમતલમાં આવેલું નથી.

$\therefore$ રેખા સમતલને સમાંતર છે.

હવે, $A(2, -2, 3)$ રેખા પરનું બિંદુ છે અને સમતલનું સમીકરણ $x + 5y + z - 5 = 0$ છે.

રેખા અને સમતલ વચ્ચેનું અંતર એટલે કે સમતલથી રેખા પરના બિંદુનું અંતર

$\therefore$ રેખાનું સમતલથી અંતર $= \dfrac{|1(2) + 5(-2) + 1(3) - 5|}{\sqrt{1^2 + 5^2 + 1^2}}$

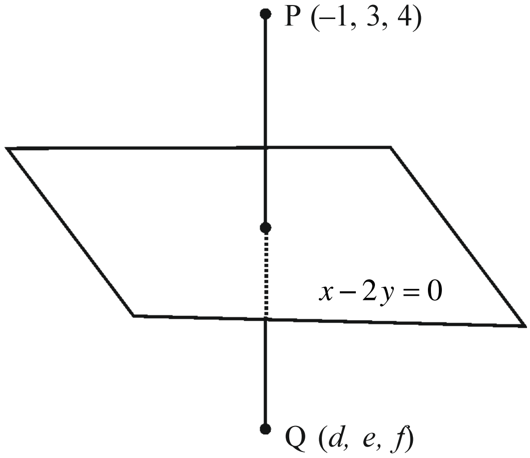
$= \dfrac{10}{3\sqrt{3}}$

જવાબ : (A)

(65) સમતલ $x-2y=0$ માં બિંદુ $(-1, 3, 4)$ નું પ્રતિબિંબ ......

(A) $\left(\frac{-17}{3}, \frac{-19}{3}, 4\right)$ (B) $(15, 11, 4)$ (C) $\left(\frac{-17}{3}, \frac{-19}{3}, 1\right)$ (D) $\left(\frac{9}{5}, \frac{-13}{5}, 4\right)$

(AIEEE :2006)



આકૃતિ 21.6

ઉકેલ : ધારો કે $P(-1, 3, 4)$ નું પ્રતિબિંબ $Q(d, e, f)$ છે.

$\therefore$ $\overline{PQ}$ નું મધ્યબિંદુ $M\left(\frac{d-1}{2}, \frac{e+3}{2}, \frac{f+4}{2}\right)$ સમતલ $x-2y=0$ માં છે.

$\therefore \frac{d-1}{2} - 2\left(\frac{e+3}{2}\right) = 0$

$\therefore d-2e=7$ (1)

P માંથી પસાર થતી સમતલને લંબરેખાનું સમીકરણ

$\vec{r} = (-1, 3, 4) + k(1, -2, 0),\ k \in R$ $(\vec{l} = \vec{n})$

$\therefore \frac{x+1}{1} = \frac{y-3}{-2} = \frac{z-4}{0}$

લંબરેખા Qમાંથી પણ પસાર થશે.

$\therefore \frac{d+1}{1} = \frac{e-3}{-2} = \frac{f-4}{0}$

$\therefore -2d-2=e-3$

$\therefore 2d+e=1$ અને $f=4.$ (2)

સમીકરણ (1) અને (2) ઉકેલતાં, $d=\frac{9}{5},\ e=\frac{-13}{5}$

$\therefore$ પ્રતિબિંબ $\left(\frac{9}{5}, \frac{-13}{5}, 4\right)$ **જવાબ : (D)**

(66) સમતલો $x+5y+z=4$ અને $x+3y+2z=1$ ને લંબ $(1, 4, -2)$ માંથી પસાર થતા સમતલનું સમીકરણ ......

(A) $7x+y+2z=7$ (B) $2x+8y+3z=28$ (C) $7x-y-2z=7$ (D) $7x-y+2z=-1$

ઉકેલ : આપેલ સમતલોના અભિલંબ સદિશ $\vec{n_1} = (1, 5, 1)$ અને $\vec{n_2} = (1, 3, 2)$

બંને સમતલોને લંબ સમતલનો અભિલંબ સદિશ $\vec{n} = \vec{n_1} \times \vec{n_2}$

$$= (1, 5, 1) \times (1, 3, 2) = (7, -1, -2)$$

$\therefore$ લંબ સમતલનું સમીકરણ $a(x - x_1) + b(y - y_1) + c(z - z_1) = 0$

$$\therefore\ 7(x-1) - 1(y-4) - 2(z+2) = 0$$

$$\therefore\ 7x - y - 2z = 7$$

જવાબ : (C)

(67) $(1, -2, 1)$ માંથી પસાર થતા $2x - 2y + z = 0$ અને $x - y + 2z = 4$ બંનેને લંબ સમતલનું $(1, 2, 2)$થી અંતર ......

(A) 0 (B) 1 (C) $\sqrt{2}$ (D) $2\sqrt{2}$ (IIT : 2006)

ઉકેલ : લંબ સમતલનો અભિલંબ સદિશ $\vec{n} = \vec{n_1} \times \vec{n_2} = (2, -2, 1) \times (1, -1, 2) = (-3, -3, 0)$

અથવા $\vec{n} = (1, 1, 0)$

લંબ સમતલનું સમીકરણ $\vec{r} \cdot \vec{n} = \vec{a} \cdot \vec{n}$ $\left(\vec{a} = (1, -2, 1)\right)$

$$\therefore\ x + y = -1$$

$$\therefore\ x + y + 1 = 0$$

સમતલ $x + y + 1 = 0$ નું બિંદુ $(1, 2, 2)$થી અંતર

$$= \frac{|1(1) + 1(2) + 0(2) + 1|}{\sqrt{1+1+0}} = \frac{4}{\sqrt{2}} = 2\sqrt{2}$$

જવાબ : (D)

(68) સમતલો $2x + 3y + z = 1$ અને $x + 3y + 2z = 2$ ની છેદ રેખા L એ X–અક્ષની ધન દિશા સાથે α માપનો ખૂણો બનાવે, તો $cos\alpha =$ ......

(A) $\frac{1}{2}$ (B) 1 (C) $\frac{1}{\sqrt{2}}$ (D) $\frac{1}{\sqrt{3}}$ (AIEEE : 2007)

ઉકેલ : રેખાની દિશા $\vec{l} = \vec{n_1} \times \vec{n_2} = (2, 3, 1) \times (1, 3, 2) = (3, -3, 3)$

એટલે કે $\vec{l} = (1, -1, 1)$

$$cos\alpha = \frac{|\vec{l} \cdot \hat{i}|}{|\vec{l}||\hat{i}|} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

જવાબ : (D)

(69) રેખા $\frac{x-x_1}{l_1}=\frac{y-y_1}{l_2}=\frac{z-z_1}{l_3}$ એ YZ–સમતલને સમાંતર હોય, તો ......

(A) $l_1=0$ (B) $l_2=0$ (C) $l_3=0$ (D) $l_2=0, l_3=0$

ઉકેલ : રેખાની દિશા (l_1, l_2, l_3) એ $x=0$ ને લંબ છે.

$\therefore\ l_1+0+0=0$

$\therefore\ l_1=0$ **જવાબ : (A)**

(70) $(1, 5, 10)$ બિંદુનું રેખા $\frac{x+2}{3}=\frac{y-1}{4}=\frac{z+2}{12}$ અને સમતલ $x+y-z-1=0$ના છેદબિંદુથી અંતર ......

(A) 15 (B) 11 (C) 13 (D) $\frac{14}{5}$

ઉકેલ : રેખા પરનું બિંદુ $(-2, 1, -2)$ એ સમતલ $x+y-z-1=0$ નું પણ બિંદુ છે. તેથી $(-2, 1, -2)$ એ રેખા અને સમતલનું છેદબિંદુ થશે.

$\therefore$ માગેલું અંતર $=\sqrt{(1+2)^2+(5-1)^2+(10+2)^2}$

$=\sqrt{9+16+144}=13$ **જવાબ : (C)**

(71) સમતલ $6x+4y+3z-12=0$ અક્ષોને A, B, C બિંદુએ છેદે, તો ΔABC નું ક્ષેત્રફળ ...... એકમ થાય.

(A) $\sqrt{41}$ (B) $\sqrt{61}$ (C) $\sqrt{29}$ (D) $\sqrt{244}$

ઉકેલ : સમતલનું સમીકરણ : $6x+4y+3z=12$

$$\therefore\ \frac{x}{2}+\frac{y}{3}+\frac{z}{4}=1$$

$\therefore$ અક્ષો પરના અંતઃખંડ 2, 3, 4 છે.

$\therefore$ અક્ષો સાથેનાં છેદબિંદુઓ $A(2, 0, 0)$, $B(0, 3, 0)$, $C(0, 0, 4)$

ΔABC નું ક્ષેત્રફળ $=\frac{1}{2}|\overrightarrow{\mathbf{AB}}\times\overrightarrow{\mathbf{AC}}|$

$=\frac{1}{2}\left|(-2, 3, 0)\times(-2, 0, 4)\right|$

$=\frac{1}{2}\left|(12, 8, 6)\right|$

$=\frac{1}{2}\sqrt{144+64+36}$

$=\sqrt{61}$

નોંધ : ΔABC નું ક્ષેત્રફળ $=\frac{1}{2}\sqrt{a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2}$ **જવાબ : (B)**

(72) $P(3, 6, 2)$ માંથી પસાર થતું અને $\overleftrightarrow{OP}$ ને લંબ સમતલનું સમીકરણ ......

(A) $3x+6y+2z=49$ (B) $3x+6y+2z=7$

(C) $2x+6y+3z=49$ (D) $2x+6y+3z=7$

ઉકેલ : $\overleftrightarrow{OP}$ ને લંબ સમતલનો અભિલંબ સદિશ $\vec{n}=\overrightarrow{\mathbf{OP}}=(3, 6, 2)$ તથા સમતલ $\vec{a}=(3, 6, 2)$ માંથી પસાર થાય છે.

$\therefore\ 3(x-3)+6(y-6)+2(z-2)=0$

$\therefore\ 3x+6y+2z=49$ **જવાબ : (A)**

(73) $(5, 1, a)$ અને $(3, b, 1)$ માંથી પસાર થતી રેખા YZ - સમતલને $\left(0, \frac{17}{2}, \frac{-13}{2}\right)$ બિંદુએ છેદે, તો ......

(AIEEE:2008)

(A) $a=8, b=2$ (B) $a=2, b=8$ (C) $a=4, b=6$ (D) $a=6, b=4$

ઉકેલ : $(5, 1, a)$ અને $(3, b, 1)$ માંથી પસાર થતી રેખાનું સમીકરણ

$\vec{r}=(5, 1, a)+k(-2,\ b-1,\ 1-a),\ k \in R$

ધારો કે રેખા $(5-2k,\ 1+k(b-1),\ a+k(1-a))$ બિંદુએ YZ -સમતલને છેદે છે.

$\therefore\ \left(0, \frac{17}{2}, \frac{-13}{2}\right) = (5-2k,\ 1+k(b-1),\ a+k(1-a))$

$\therefore\ 0=5-2k$. આથી, $k=\frac{5}{2}$.

$\frac{17}{2}=1+k(b-1)$

$\therefore\ \frac{17}{2}=1+\frac{5}{2}(b-1)$

$\therefore\ b=4$

$\frac{-13}{2}=a+k(1-a)$

$\therefore\ \frac{-18}{2}=\frac{-3a}{2}$

$\therefore\ 6=a$ **જવાબ : (D)**

(74) રેખા $\frac{x-2}{3}=\frac{y-1}{-5}=\frac{z+2}{2}$ એ સમતલ $x+3y-\alpha z+\beta=0$ માં આવેલી હોય, તો (α, β) = ...

(A) $(6, -17)$ (B) $(-6, 7)$ (C) $(5, -15)$ (D) $(-5, 5)$ (AIEEE : 2009)

ઉકેલ : રેખા માટે $\vec{a}=(2, 1, -2)$, $\vec{l}=(3, -5, 2)$ અને $\vec{n}=(1, 3, -\alpha)$

$\vec{l} \perp \vec{n}$. આથી $\vec{l}\cdot\vec{n}=0$

$\therefore\ 3-15-2\alpha=0$. આથી $\alpha=-6$

અને બિંદુ $(2, 1, -2)$ સમતલ $x+3y-\alpha z+\beta=0$ પર છે.

$\therefore\ 2+3+6(-2)+\beta=0$

$\therefore\ \beta=7$

$\therefore\ (\alpha, \beta)=(-6, 7)$. **જવાબ : (B)**

નોંધ : $\alpha=-6$ પરથી જ જવાબ મળી જાય.

(75) $P(3, 2, 6)$ અવકાશનું એક બિંદુ છે. બિંદુ Q રેખા $\vec{r} = (\hat{i} - \hat{j} + 2\hat{k}) + \mu(-3\hat{i} + \hat{j} + 5\hat{k})$ પર આવેલું છે. સદિશ $\overrightarrow{PQ}$ એ સમતલ $x - 4y + 3z = 1$ ને સમાંતર હોય, તો μ = ...

(A) $\frac{1}{4}$ (B) $-\frac{1}{4}$ (C) $\frac{1}{8}$ (D) $-\frac{1}{8}$ (IIT:2009)

ઉકેલ : રેખા $\vec{r} = (\hat{i} - \hat{j} + 2\hat{k}) + \mu(-3\hat{i} + \hat{j} + 5\hat{k})$ પરનું બિંદુ $Q(1-3\mu, -1+\mu, 2+5\mu)$ છે.

$\overrightarrow{PQ} = (1-3\mu-3, -1+\mu-2, 2+5\mu-6)$ એ સમતલ $x - 4y + 3z = 1$ ને સમાંતર છે,

તેથી $\overrightarrow{PQ} \perp \vec{n}$, જ્યાં $\vec{n} = (1, -4, 3)$

$\therefore \overrightarrow{PQ} \cdot \vec{n} = 0$

$\therefore (-3\mu-2)(1) + (\mu-3)(-4) + (5\mu-4)(3) = 0$

$\therefore -3\mu - 2 - 4\mu + 12 + 15\mu - 12 = 0$

$\therefore 8\mu = 2$

$\therefore \mu = \frac{1}{4}$

જવાબ : (A)

(76) X–અક્ષને સમાંતર, Y–અંતઃખંડ 2 અને Z–અંતઃખંડ 3 હોય તેવા સમતલનું સમીકરણ ......

(A) $3y + 2z = 1$ (B) $3y + 2z = 6$ (C) $2y + 3z = 1$ (D) $2y + 3z = 6$

ઉકેલ : X–અક્ષને સમાંતર સમતલનું સમીકરણ $by + cz + 1 = 0$ છે.

સમતલનો y-અંતઃખંડ 2 અને z-અંતઃખંડ 3 છે.

$\therefore 2b + 1 = 0$ અને $3c + 1 = 0$

$\therefore b = -\frac{1}{2}$ અને $c = -\frac{1}{3}$

સમતલનું સમીકરણ $-\frac{y}{2} - \frac{z}{3} + 1 = 0$

$\therefore 3y + 2z = 6$

બીજી રીત :

X-અક્ષને સમાંતર સમતલનું સમીકરણ

$\frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1.$

Y-અંતઃખંડ 2 અને Z-અંતઃખંડ 3 છે.

$\therefore$ સમતલનું સમીકરણ $\frac{y}{2} + \frac{z}{3} = 1.$

$\therefore 3y + 2z = 6$

જવાબ : (B)

(77) $P(1, -2, 1)$ થી સમતલ $x + 2y - 2z = \alpha$, $\alpha > 0$ નું અંતર 5 છે. P થી સમતલ પરનો લંબપાદ ......

(A) $\left(\frac{8}{3}, \frac{4}{3}, \frac{-7}{3}\right)$ (B) $\left(\frac{4}{3}, \frac{-4}{3}, \frac{1}{3}\right)$ (C) $\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{10}{3}\right)$ (D) $\left(\frac{2}{3}, \frac{-1}{3}, \frac{5}{3}\right)$ (IIT : 2010)

ઉકેલ : બિંદુ $(1, -2, 1)$ થી સમતલ $x + 2y - 2z - \alpha = 0$ નું લંબ અંતર.

$$\frac{|1(1) - 2(2) + 1(-2) - \alpha|}{\sqrt{1+4+4}} = 5$$

$\therefore |-5 - \alpha| = 15$

$\therefore 5 + \alpha = 15$ અથવા $5 + \alpha = -15$

$\therefore \alpha = 10$ અથવા $\alpha = -20$

હવે $\alpha > 0$ હોવાથી $\alpha = 10$.

P માંથી સમતલ પરનો લંબપાદ M હોય, તો

$\overleftrightarrow{PM}$ નું સમીકરણ $\vec{r} = (1, -2, 1) + k\,(1, 2, -2),\ k \in R$

$\therefore$ Mના યામ કોઈક $k \in R$ માટે $(1+k,\ -2+2k,\ 1-2k)$ છે અને તે સમતલ $x+2y-2z-10=0$ પર છે.

$\therefore\ 1+k-4+4k-2+4k-10 = 0$

$\therefore\ 9k = 15$

$\therefore\ k = \frac{5}{3}$

$\therefore$ લંબપાદ $M\left(\frac{8}{3}, \frac{4}{3}, \frac{-7}{3}\right)$ **જવાબ : (A)**

(78) સમતલો $3x-6y-2z=7$ અને $2x+y-kz=5$ પરસ્પર લંબ હોય, તો $k =$ ......

(A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) 3

ઉકેલ : $\vec{n_1} \perp \vec{n_2}$ આથી, $\vec{n_1} \cdot \vec{n_2} = 0$

$\therefore\ (3, -6, -2) \cdot (2, 1, -k) = 0$

$\therefore\ 6-6+2k=0$. આથી, $k=0$ **જવાબ : (A)**

(79) $P(2, -1, 2)$માંથી પસાર થતી રેખાની દિક્કોસાઈન ધન છે. તે યામાક્ષો સાથે સમાન માપના ખૂણા બનાવે છે. રેખા, સમતલ $2x+y+z=9$ ને Q માં છેદે છે. રેખાખંડ PQ ની લંબાઈ ......

(A) 1 (B) $\sqrt{2}$ (C) $\sqrt{3}$ (D) 2 (IIT-2009)

ઉકેલ : રેખાની દિક્કોસાઇન l, m, n લેતાં,

હવે, $l^2+m^2+n^2=1$ તથા રેખા અક્ષો સાથે સમાન માપના ખૂણા બનાવે છે, તેથી $l=m=n$.

$\therefore\ 3l^2=1$

$\therefore\ l = \pm\frac{1}{\sqrt{3}}$

દિક્કોસાઇન ધન હોવાથી રેખાની દિક્કોસાઇન $\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}$ થશે.

$\therefore$ P માંથી પસાર થતી રેખાનું સમીકરણ $\vec{r} = (2, -1, 2) + k\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right),\ k \in R$

$\therefore$ P થી R અંતરે આવેલું રેખા પરનું બિંદુ $Q\left(2+\frac{k}{\sqrt{3}},\ -1+\frac{k}{\sqrt{3}},\ 2+\frac{k}{\sqrt{3}}\right)$ છે.

તે સમતલ $2x+y+z=9$ પર આવેલું છે.

$\therefore\ 2\left(2+\frac{k}{\sqrt{3}}\right) + \left(-1+\frac{k}{\sqrt{3}}\right) + \left(2+\frac{k}{\sqrt{3}}\right) = 9$

$\therefore\ \frac{4k}{\sqrt{3}} = 4$

$\therefore\ K = \sqrt{3}$

$\therefore\ PQ = \sqrt{3}$ **જવાબ : (C)**