1 ગણ, સંબંધ અને વિધેય

- **મુદ્દાઓ**
- ગણ અને તેની રજૂઆત
- ગણના પ્રકારો
- યોગગણ તથા તેના બૈજિક ગુણધર્મો
- છેદગણ તથા તેના બૈજિક ગુણધર્મો
- પૂરકગણ તથા તેના બૈજિક ગુણધર્મો
- ઘાતગણ
- સંબંધ અને તેના પ્રકારો
- સામ્ય સંબંધની સમજ
- વિધેય
- વિધેયના પ્રકારો
- એક-એક વિધેય તથા અનેક-એક વિધેયની સમજ
- વ્યાપ્ત વિધેયની સમજ
- સંયોજિત વિધેયની સમજ
- પ્રતિ વિધેયની સમજ

અગત્યના મુદ્દાઓ

ગણ, ગણને દર્શાવવાની રીતો, સાન્તગણ, અનંતગણ, ખાલીગણ, એકાકી ગણ, સાર્વત્રિક ગણ, સામ્યગણ, સમાનગણ, યોગગણ અને છેદગણથી આપણે સૌ પરિચિત છીએ જ. આપણે તેના અન્ય પ્રકારો તેમજ બૈજિક ગુણધર્મોની ચર્ચા અહીં કરીશું.

(1) ઉપગણ : બે અરિક્ત ગણ A તથા B માટે, ગણ A નો પ્રત્યેક ઘટક, ગણ B નો પણ ઘટક હોય, તો A ને B નો ઉપગણ કહે છે. તેને $A \subset B$ વડે દર્શાવાય. B ને A નો અધિગણ પણ કહે છે.

(i) કોઈ પણ અરિક્ત ગણને ખાલીગણ તથા ગણ પોતે એમ બે ઉપગણ હોય જ, જ્યારે રિક્તગણને માત્ર એક જ ઉપગણ હોય.

(ii) આપેલ ગણ માટે ખાલીગણ તથા ગણ પોતે, આ ઉપગણને **અનુચિત ઉપગણ** કહે છે તથા તે સિવાયના ઉપગણને (જો હોય તો) **ઉચિત ઉપગણ** કહે છે.

(iii) જો કોઈ અરિક્ત ગણના સભ્યોની સંખ્યા n હોય, તો તે ગણના ઉપગણની સંખ્યા 2^n થાય, જ્યારે ઉચિત ઉપગણની સંખ્યા $2^n - 2$ થાય. $(n > 1)$

(iv) તમામ ગણ એ સાર્વત્રિક ગણના ઉપગણ છે અને સાર્વત્રિક ગણ એ સૌનો અધિગણ થાય.

(2) ઘાતગણ : કોઈપણ ગણ A ના સંદર્ભમાં, A ના તમામ ઉપગણથી બનતા ગણને A નો ઘાતગણ કહે છે. તેને P (A) અથવા 2^A વડે દર્શાવાય છે.

નોંધ :

(1) કોઈ પણ ગણનો ઘાતગણ ક્યારેય ખાલી ગણ ન હોઈ શકે.

(2) કોઈ પણ ગણના ઘાતગણના સભ્યોની ન્યૂનતમ સંખ્યા 1 હોય જ.

(3) જો A ના ઘટકોની સંખ્યા n હોય, તો ઘાતગણના સભ્યોની સંખ્યા 2^n.

યોગક્રિયા તથા છેદક્રિયાના બૈજિક ગુણધર્મો

યોગક્રિયા માટે :

(1) **સંવૃતતાનો ગુણધર્મ :** $A, B \in P(U) \Rightarrow (A \cup B) \in P(U)$

(2) $A \subset (A \cup B)$; $B \subset (A \cup B)$

(3) **સ્વયંઘાતી નિયમ :** $A \cup A = A$

(4) જો $A \subset B$ અને $C \subset D$ હોય, તો $(A \cup C) \subset (B \cup D)$

(5) **ક્રમનો નિયમ :** $A \cup B = B \cup A$

(6) **જૂથનો નિયમ :** $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$

(7) $A \cup \emptyset = A$. આથી $\emptyset$ એ યોગક્રિયા માટેનો તટસ્થ ઘટક છે.

(8) $A \cup U = U$

છેદક્રિયા માટે :

(1) $A, B \in P(U) \Rightarrow (A \cap B) \in P(U)$

(2) $(A \cap B) \subset A;\ \ (A \cap B) \subset B$

(3) $A \cap A = A$ ને સ્વયંઘાતી નિયમ કહે છે.

(4) જો $A \subset B$ અને $C \subset D$ હોય, તો $(A \cap C) \subset (B \cap D)$

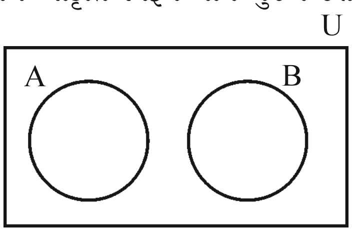
(5) **ક્રમનો નિયમ :** $A \cap B = B \cap A$

(6) **જૂથનો નિયમ :** $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$

(7) $A \cap \emptyset = \emptyset$

(8) $A \cap U = A$. આથી U એ છેદક્રિયા માટેનો એકમ ઘટક છે.

(3) અલગ ગણ : કોઈ બે અરિક્ત ગણનો છેદગણ $\emptyset$ હોય, તો તે બંને ગણ અલગ ગણ છે તેમ કહેવાય. આ હકીકતને વેન આકૃતિ સ્વરૂપે નીચે મુજબ દર્શાવાય :



આકૃતિ 1.1
$A \cap B = \emptyset$

→ ત્રણ અરિક્ત ગણ A, B તથા C માટે, કોઈ પણ બે ગણનો છેદગણ $\emptyset$ હોય, તો, તે પરસ્પર અલગ ગણ દર્શાવે છે તેમ કહેવાય.

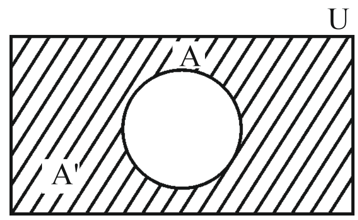
→ ગણ A તથા ગણ B માટે,
$P(A \cap B) = P(A) \cap P(B)$, પરંતુ $P(A \cup B) \neq P(A) \cup P(B)$

→ વિધાનો (i) $A \subset B$ (ii) $A \cup B = B$ તથા (iii) $A \cap B = A$ તાર્કિક રીતે સમાન છે.

- **વિભાજનના નિયમો :** કોઈ પણ ત્રણ ગણ $A, B, C \in P(U)$ માટે,
  (i) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ તથા
  (ii) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ ને વિભાજનના નિયમો કહે છે.

(4) પૂરકગણ : $A \in P(U)$ માટે, સાર્વત્રિક ગણ U માં હોય પરંતુ ગણ A માં ન હોય તેવા તમામ સભ્યોથી બનતા ગણને A નો પૂરકગણ કહે છે. તેને A' કે A^c વડે દર્શાવાય. ટૂંકમાં, A' અથવા $A^c = \{x \mid x \in U, x \notin A\}$

વેન આકૃતિ સ્વરૂપે A' ને સામે મુજબ દર્શાવાય.



આકૃતિ 1.2

(i) $(A')' = A$ (ii) $\emptyset' = U$ તથા $U' = \emptyset$ (iii) $A \cup A' = U$

(iv) $A \cap A' = \emptyset$ (v) જો $A \subset B \Leftrightarrow B' \subset A'$

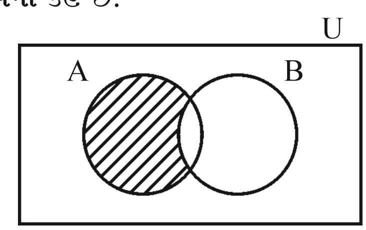
દ'મોર્ગનના નિયમો : બે ગણ $A, B \in P(U)$ માટે,

(i) $(A \cup B)' = A' \cap B'$ તથા (ii) $(A \cap B)' = A' \cup B'$ ને **દ'મોર્ગનના નિયમો** કહે છે.

(5) તફાવત ગણ : ગણ $A, B \in P(U)$ હોય તો, ગણ Aમાં હોય પરંતુ ગણ Bમાં ન હોય તેવા તમામ સભ્યોથી બનતા ગણને ગણ A તથા ગણ B નો તફાવત ગણ કહે છે. તેને $A - B$ વડે દર્શાવાય.

ટૂંકમાં, $A - B = \{x \mid x \in A, x \notin B\}$

તેને વેન આકૃતિ સ્વરૂપે આકૃતિ 1.3 મુજબ દર્શાવાય.



આકૃતિ 1.3
$A - B = A \cap B'$

યાદ રાખો

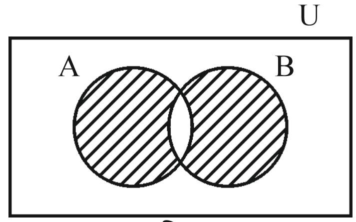
(i) $A - B = A \cap B' = A - (A \cap B)$ (ii) $U - A = A'$

(iii) જો $A \subset B$ હોય, તો $A - B = \emptyset$

(6) સંમિત તફાવત ગણ : બે ગણ $A, B \in P(U)$ હોય તો, ગણ A માં હોય અથવા ગણ Bમાં હોય પરંતુ ગણ A તથા ગણ B બંનેમાં ન હોય તેવા તમામ સભ્યોથી બનતા ગણને ગણ A તથા ગણ B નો **સંમિત તફાવત ગણ** કહે છે. તેને સંકેતમાં $A \Delta B$ વડે દર્શાવાય.

ટૂંકમાં, $A \Delta B = \{x \mid x\ A \cup B, x \notin A \cap B\}$

તેને વેન આકૃતિ સ્વરૂપે આકૃતિ 1.4 મુજબ દર્શાવાય.



આકૃતિ 1.4
A Δ B

યાદ રાખો

(i) $A \Delta A = \emptyset$ (ii) $A \Delta \emptyset = A$ (iii) $A \Delta U = U - A = A'$

(iv) $(A \cup B) - (A \cap B) = (A - B) \cup (B - A) = A \Delta B$

સાન્તગણનો મૂળ અંક : જો A સાન્તગણ હોય તો, A ના સભ્યોની સંખ્યાને ગણ A નો **મૂળ અંક** કહે છે. તેને $n(A)$ વડે દર્શાવાય.

અગત્યનાં પરિણામો :

સાર્વત્રિક ગણ U ના બે સાન્ત ઉપગણ A તથા B માટે

(1) $n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$ જ્યાં $n(A \cap B) \neq 0$ (એટલે કે, $(A \cap B) \neq \emptyset$)

જો $(A \cap B) = \emptyset$ હોય, તો $n(A \cup B) = n(A) + n(B)$ મળે.

વળી, $n(A \cup B) = n(A \cap B') + n(B \cap A') + n(A \cap B)$

$= n(A - B) + n(B - A) + n(A \cap B)$ દ્વારા પણ દર્શાવી શકાય.

(2) ગણ A તથા ગણ B માટે,

$n(A \cap B') = n(A) - n(A \cap B) = n(A - B)$

(3) ગણ A તથા ગણ B માટે,

$n(B \cap A') = n(B) - n(A \cap B) = n(B - A)$

(4) ગણ A તથા ગણ B માંથી બરાબર કોઈ એક જ ગણમાં હોય, તેવા સભ્યોની સંખ્યા

$= n(A) + n(B) - 2n(A \cap B)$

$= n(A - B) + n(B - A)$

$= n(A \cap B') + n(B \cap A')$

(5) ગણ A ના પૂરકગણના સભ્યોની સંખ્યા $= n(A') = n(U) - n(A)$

સાર્વત્રિક ગણ Uના ત્રણ સાન્ત ઉપગણ A, B તથા C માટે,

(1) ઓછામાં ઓછા કોઈ એક ગણમાં હોય, તેવા ઘટકોની સંખ્યા,

$n(A \cup B \cup C) = n(A) + n(B) + n(C) - n(A \cap B) - n(B \cap C) - n(C \cap A) + n(A \cap B \cap C)$

(2) (i) $n(A \cap B' \cap C') = n(A - (B \cup C)')$

$= n(A) - n(A \cap B) - n(C \cap A) + n(A \cap B \cap C)$

(ii) $n(A' \cap B \cap C') = n(B - (A \cup C)')$

$= n(B) - n(B \cap A) - n(B \cap C) + n(A \cap B \cap C)$

(iii) $n(A' \cap B' \cap C) = n(C - (A \cup B)')$

$= n(C) - n(C \cap A) - n(C \cap B) + n(A \cap B \cap C)$

(3) $n(A \cup B \cup C)' = n(A' \cap B' \cap C') = n(U) - n(A \cup B \cup C)$

(4) ત્રણ ગણમાંથી બરાબર એક જ ગણમાં હોય, તેવા ઘટકોની સંખ્યા =

$n(A) + n(B) + n(C) - 2n(A \cap B) - 2n(B \cap C) - 2n(C \cap A) + 3n(A \cap B \cap C)$

(5) (i) $n(A \cap B \cap C') = n(A \cap B) - n(A \cap B \cap C)$

(ii) $n(B \cap C \cap A') = n(B \cap C) - n(A \cap B \cap C)$

(iii) $n(C \cap A \cap B') = n(C \cap A) - n(A \cap B \cap C)$

(6) ત્રણ ગણમાંથી બરાબર બે જ ગણમાં હોય, તેવા ઘટકોની કુલ સંખ્યા

$= n(A \cap B \cap C') + n(B \cap C \cap A') + n(C \cap A \cap B')$

$= n(A \cap B) + n(B \cap C) + n(C \cap A) - 3\,n(A \cap B \cap C)$

(7) ત્રણ ગણમાંથી ઓછામાં ઓછા બે ગણમાં હોય, તેવા ઘટકોની કુલ સંખ્યા

$= n(A \cap B) + n(B \cap C) + n(C \cap A) - 2n(A \cap B \cap C)$

→ સાન્ત ગણ $A_1, A_2, A_3, \ldots A_n$ માટે,

$$A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \ldots \cup A_n = \bigcup_{i=1}^{n} A_i$$

$$A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap \ldots \cap A_n = \bigcap_{i=1}^{n} A_i,$$

કાર્તેઝિય ગુણાકાર : બે અરિક્ત ગણ A તથા B માટે, $x \in A$ તથા $y \in B$ હોય, તેવી તમામ ક્રમયુક્ત જોડ (x, y)ના ગણને A તથા B નો કાર્તેઝિય ગુણાકાર કહે છે. તેને **A × B** વડે દર્શાવાય.

ટૂંકમાં, $A \times B = \{(x, y) \mid x \in A, y \in B\}$. વળી, $n(A \times B) = n(A) \cdot n(B)$

આ જ રીતે, ત્રણ ગણ માટે, જો $x \in A, y \in B$ તથા $z \in C$ હોય તો, $(x, y, z) \in A \times B \times C$

વળી, $n(A \times B \times C) = n(A) \cdot n(B) \cdot n(C)$

$[n(A)]^2 = n(A) \cdot n(A) = n(A \times A)$ તથા

$[n(A)]^3 = n(A) \cdot n(A) \cdot n(A) = n(A \times A \times A)$

→ જો $A = \emptyset$ કે $B = \emptyset$ હોય, તો $A \times B = \emptyset$

→ જો $A \subset B$ હોય, તો $n(A) \leq n(B)$

સંબંધ

બે ગણ A તથા B માટે, A × B ના કોઈપણ ઉપગણને A થી Bનો સંબંધ કહે છે. તેને આપણે S વડે દર્શાવીશું.

→ જો $(x, y) \in S$ હોય, તો x એ y સાથે S દ્વારા **સંબંધ** દર્શાવે છે તેમ કહેવાય. તેને xSy થી દર્શાવાય.

$\{x \mid (x, y) \in S\}$ને Sનો **પ્રદેશ** તથા $\{y \mid (x, y) \in S\}$ ને S નો **વિસ્તાર** કહે છે.

→ A થી B નો કોઈ સંબંધ S એ $\emptyset$ હોય, તો S ને **રિક્ત સંબંધ** અથવા **ખાલી સંબંધ** કહે છે.

→ A થી B નો કોઈ સંબંધ S એ A × B હોય, તો S ને **સાર્વત્રિક સંબંધ** કહે છે.

→ **બે અરિક્ત ગણ A તથા B માટે, $n(A) = m$ તથા $n(B) = n$ હોય, તો $n(A \times B) = mn$ થાય તથા સંબંધોની કુલ સંખ્યા = 2^{mn} થાય.**

ટૂંકમાં, A થી B પરના સંબંધોની કુલ સંખ્યા = $2^{n(A \times B)}$

સંબંધના પ્રકારો

(1) **સ્વવાચક સંબંધ :** જો S એ ગણ A પરનો સંબંધ હોય અને $\forall \, \boldsymbol{a} \in \mathbf{A}$, aSa એટલે કે $(a, a) \in S$ હોય, તો S ને સ્વવાચક સંબંધ કહે છે.
$<$ એ R પર સ્વવાચક સંબંધ નથી, પરંતુ $\leq$ એ R પર સ્વવાચક સંબંધ છે.

(2) **સંમિત સંબંધ :** જો S એ ગણ A પરનો સંબંધ હોય અને $aSb \Rightarrow bSa$ હોય, એટલે કે $(a, b) \in S \Rightarrow (b, a) \in S$, $\forall \, a; b \in A$ હોય, તો S ને સંમિત સંબંધ કહે છે.
બે ગણ A તથા B માટે, A એ B નો ઉચિત ઉપગણ હોય, તો B એ A નો ઉચિત ઉપગણ ન હોય તેથી ઉચિત ઉપગણનો સંબંધ એ P(U) પર સંમિત સંબંધ નથી.

(3) **પરંપરિત સંબંધ :** જો S એ ગણ A પરનો સંબંધ હોય તથા $\forall \, a, b, c \in A$, aSb, bSc તો aSc થાય એટલે કે, $\forall \, (a, b) \in S$; $\forall \, (b, c) \in S \Rightarrow (a, c) \in S$ થાય, તો S એ **પરંપરિત સંબંધ** છે તેમ કહેવાય.

(4) **સામ્ય સંબંધ :** જો ગણ A પરનો સંબંધ S એ **સ્વવાચક, સંમિત** તથા **પરંપરિત** હોય, તો S ને ગણ A પરનો **સામ્ય સંબંધ** કહે છે.

(5) **વિસંમિત સંબંધ :** જો S એ ગણ A પર કોઈ સંબંધ હોય અને
જો $(a, b) \in S$ તથા $(b, a) \in S \Rightarrow a = b$ હોય, તો S **વિસંમિત સંબંધ** છે તેમ કહેવાય.

(6) **વ્યસ્ત સંબંધ :** જો $S= \{(x, y)\}$ એ A થી B પરનો સંબંધ હોય, તો B થી A પરના સંબંધ $\{(y, x)\}$ ને Sનો **વ્યસ્ત સંબંધ** કહે છે. તેને S^{-1} વડે દર્શાવાય.

- **સામ્ય વર્ગો :** ધારો કે S એ ગણ A પર સામ્ય સંબંધ છે. જો xSy હોય, તો $x \sim y$ કહેવાય.
ધારો કે $x \in A$ હોય, તો $A_p = \{x \in A \mid x \sim p$ એટલે કે, $(x, p) \in S\}$ને p નો **સામ્ય વર્ગ** કહે છે.

→ જો S એ ગણ A પર સામ્ય સંબંધ ધરાવે તો,
$S_1 = \{(x, y) \mid x$ અને y સમાન વર્ગમાં છે$\}$ ને A પરનો સામ્ય વર્ગ કહે છે.

→ A નું એવી રીતે અલગ-અલગ વર્ગમાં વર્ગ-વિભાજન થાય છે કે જેથી
જો p અને q સામ્ય ન હોય, તો $A_p \cap A_q = \emptyset$.

વિધેય

જો A તથા B અરિક્ત ગણો હોય તથા $f \subset (A \times B)$ અને $f \neq \emptyset$ હોય તથા પ્રત્યેક $x \in A$ ને સંગત અનન્ય ક્રમયુક્ત જોડ $(x, y) \in f$ હોય, તો $f : A \rightarrow B$ ને વિધેય કહે છે.

ગણ A ને વિધેય f નો **પ્રદેશ** કહે છે. તેને D_f વડે દર્શાવાય તથા ગણ B ને વિધેય f નો **સહપ્રદેશ** કહે છે.

(i) $\{ x \mid (x, y) \in f \}$ ને વિધેયનો પ્રદેશ તથા $\{ y \mid (x, y) \in f \}$ને વિધેયનો **વિસ્તાર** કહે છે. તેને R_f વડે દર્શાવાય.

(ii) જો પ્રદેશગણનો કોઈ ઘટક સહપ્રદેશના કોઈ અનન્ય ઘટક સાથે સંગતતા ન ધરાવે, તો વિધેય અસ્તિત્વ ધરાવતું નથી.

(iii) $f : A \rightarrow B$ માટે, $f(x)$ ને x આગળ f નું મૂલ્ય અથવા f દ્વારા મળતું xનું પ્રતિબિંબ કહે છે અને x ને $f(x)$નું પૂર્વ પ્રતિબિંબ કહે છે.

(iv) A થી B પરનાં વિધેયોની કુલ સંખ્યા = (સહપ્રદેશના ઘટકોની સંખ્યા)$^{\text{પ્રદેશના ઘટકોની સંખ્યા}}$

ધારો કે $n(A) = m$, $n(B) = n$ હોય તો,

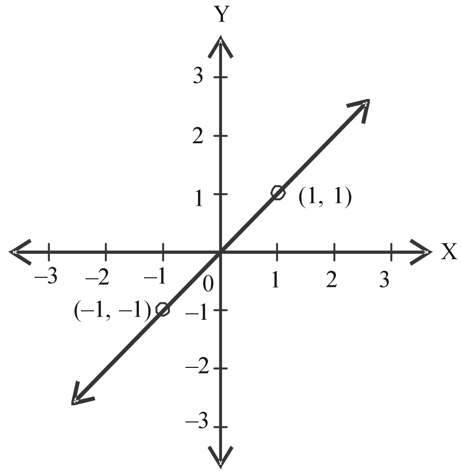
A થી B પરનાં વિધેયોની કુલ સંખ્યા = n^m

વિધેયના પ્રકારો

(1) **સમાન વિધેયો :** જો બે વિધેયના પ્રદેશ, સહપ્રદેશ અને આલેખ/સૂત્ર સમાન હોય તો તેમને સમાન વિધેયો કહે છે.
એટલે કે, જો $A = C$ તથા $B = D$ હોય તથા પ્રત્યેક $x \in A$ અથવા $x \in C$ માટે, $\boldsymbol{f(x) = g(x)}$ થાય તો $f : A \rightarrow B$ તથા $g : C \rightarrow D$ **સમાન વિધેયો** કહેવાય.

(2) તદેવ વિધેય : કોઈ અરિક્ત ગણ A માટે, $f : A \to A; f(x) = x, \forall x \in A$ થી વ્યાખ્યાયિત વિધેયને **તદેવ વિધેય** કહે છે. તેને I_A વડે દર્શાવાય. ટૂંકમાં, $I_A(x) = x$

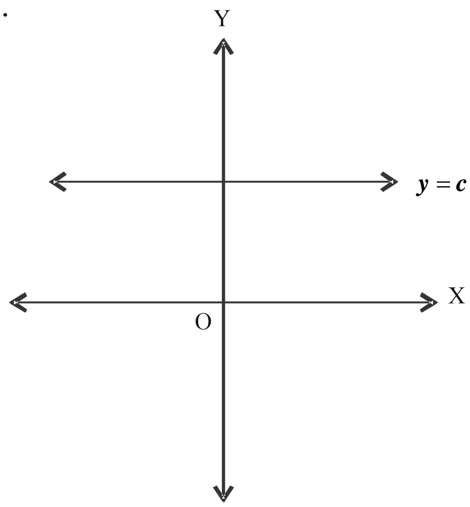
(1) તદેવ વિધેયનો વિસ્તાર = તદેવ વિધેયનો સહપ્રદેશ
(2) તદેવ વિધેયનો આલેખ એ ઊગમબિંદુમાંથી પસાર થતી તેમજ પ્રથમ અને તૃતીય ચરણમાં આવેલી રેખા $x = y$ નો આલેખ દર્શાવે છે.
(3) આ વિધેય સતત છે.



આકૃતિ 1.5

(3) અચળ વિધેય : જે વિધેયનો વિસ્તાર **એકાકી ગણ** હોય તેવા વિધેયને અચળ વિધેય કહે છે.
$f : A \to B; \ \forall x \in A; f(x) = c$ અચળ વિધેય દર્શાવે છે.

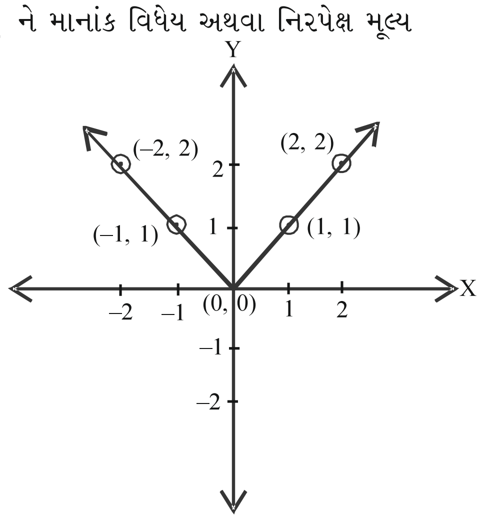
- $f(x) = c$ નો આલેખ $c \neq 0$ માટે X-અક્ષને સમાંતર (સમક્ષિતિજ) રેખા છે જ્યારે $c = 0$ હોય, તો તે X-અક્ષ દર્શાવે છે. વળી, વિધેય સતત છે.



આકૃતિ 1.6

(4) માનાંક વિધેય : $f : R \to R, f(x) = |x|$; જ્યાં $|x| = \begin{cases} x; x \geq 0 \\ -x; x < 0 \end{cases}$ ને માનાંક વિધેય અથવા નિરપેક્ષ મૂલ્ય વિધેય કહે છે.

- માનાંક વિધેયનો વિસ્તાર $R^+ \cup \{0\}$ છે.
- માનાંક વિધેયને $R^+ \cup \{0\}$ પર મર્યાદિત કરવામાં આવે તો તે તદેવ વિધેય દર્શાવે.



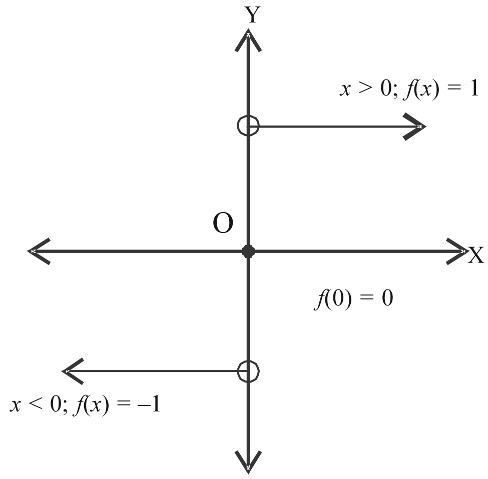
આકૃતિ 1.7

(5) ચિહ્ન વિધેય : $f : R \to R, f(x) = \begin{cases} 1; & x > 0 \\ 0; & x = 0 \\ -1; & x < 0 \end{cases}$ ને ચિહ્ન વિધેય કહે છે.

- આ વિધેયને નીચે મુજબ પણ વ્યાખ્યાયિત કરી શકાય :

$$f : R \to R, f(x) = \begin{cases} 0; & x = 0 \\ \frac{|x|}{x}; & x \neq 0 \end{cases}$$

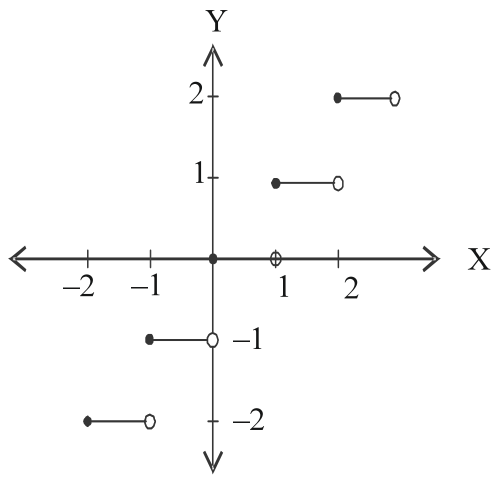
- આ વિધેયનો આલેખ તૂટક છે આથી, તે સતત નથી.
- આ વિધેયનો વિસ્તાર {–1, 0, 1} છે.



આકૃતિ 1.8

(6) મહત્તમ પૂર્ણાંક વિધેય : $f : R \to R, f(x) = [x]$; જ્યાં $[x]$ એ x થી મોટો ન હોય, તેવો મહત્તમ પૂર્ણાંક દર્શાવે છે તેને મહત્તમ પૂર્ણાંક વિધેય કહે છે. આ વિધેયને **ફ્લોર વિધેય** (Floor function) પણ કહે છે. તેને $f(x) = \lfloor x \rfloor$ વડે પણ દર્શાવાય.

- આ વિધેયનો આલેખ પગથિયા જેવો હોવાથી તે સતત નથી.
- આ વિધેયનો વિસ્તાર Z છે.
- $n - 1 \leq x < n \Rightarrow [x] = n - 1$

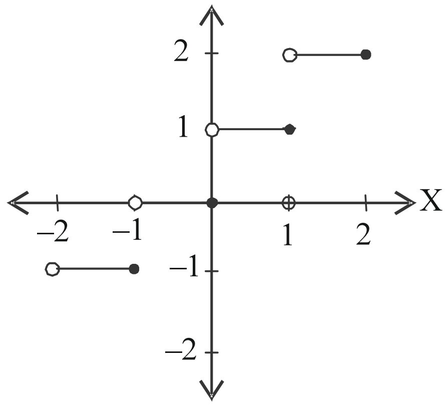


આકૃતિ 1.9

(7) ન્યૂનતમ પૂર્ણાંક વિધેય : $f : R \to R, f(x) = \lceil x \rceil$; જ્યાં x એ x થી નાનો ન હોય તેવો ન્યૂનતમ પૂર્ણાંક દર્શાવે છે. તેને **ન્યૂનતમ પૂર્ણાંક વિધેય** કહે છે.

- આ વિધેયનો વિસ્તાર Z છે. $n - 1 < x \leq n \Rightarrow \lceil x \rceil = n$.

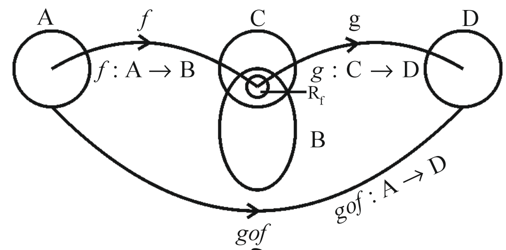
આ વિધેયને **સિલિંગ વિધેય** (Ceiling function) કહે છે.



આકૃતિ 1.10

(8) સંયોજિત વિધેય : ધારો કે બે વિધેયો $f : A \to B$ તથા $g : C \to D$ વ્યાખ્યાયિત છે. જો $R_f \subset C$ (એટલે કે, $R_f \subset D_g$) હોય તો વિધેયો f અને g નું સંયોજિત વિધેય $h : A \to D$, $h(x) = gof(x)$ દ્વારા વ્યાખ્યાયિત કરવામાં આવે છે. ટૂંકમાં, $h = gof$. તેને ચિત્રાત્મક રીતે નીચે પ્રમાણે રજૂ કરી શકાય.

- જો $f : A \to B$ તથા $g : B \to A$ પરનાં વ્યાખ્યાયિત વિધેયો હોય તો fog તથા gof વ્યાખ્યાયિત હોય જ.
- સંયોજિત વિધેય gof ના અસ્તિત્વ માટે, $R_f \subset D_g$ તથા fog ના અસ્તિત્વ માટે $R_g \subset D_f$ થવું જોઈએ.



આકૃતિ 1.11

(9) એક-એક વિધેય : જો વિધેય $f : A \to B$ વ્યાખ્યાયિત હોય તો,

$\forall x_1, x_2 \in A, x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$ થાય તો $f : A \to B$ ને એક-એક વિધેય કહે છે.

અથવા

$f : A \to B$ વિધેય માટે, જો $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$ હોય, તો f ને એક-એક વિધેય કહે છે.

- વિધેય $f : A \to B$ માટે, જો $n(A) = m$ તથા $n(B) = n$ હોય તો મળતા

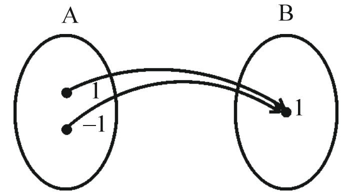
એક-એક વિધેયોની સંખ્યા $= \begin{cases} {}_nP_m ; m \le n \\ 0 \quad ; m > n \end{cases}$

(10) અનેક-એક વિધેય : વિધેય $f : A \to B$ માટે, કોઈક $x_1, x_2 \in A;\ x_1 \neq x_2$ માટે $f(x_1) = f(x_2)$ હોય તો f ને અનેક-એક વિધેય કહે છે.

ઉદાહરણ તરીકે, $A = \{-1, 1\}$

$B = \{1\}$

$f(x) = |x|$ માટે $f(-1) = f(1) = 1$

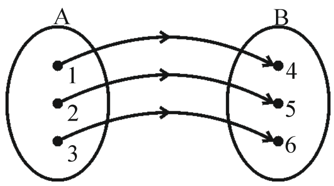


આકૃતિ 1.12

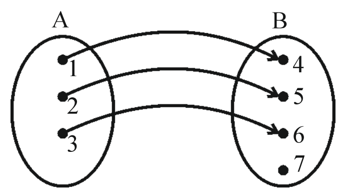
(11) વ્યાપ્ત વિધેય : $f : A \to B$ માટે, વિધેયનો વિસ્તાર તથા સહપ્રદેશ સમાન હોય તો f ને વ્યાપ્ત વિધેય કહે છે.

એટલે કે, $R_f = B$ અથવા

$\forall y; y \in B$ માટે કોઈ $x \in A$ એવો મળે કે જેથી $f(x) = y$ થાય, તો $f : A \to B$ ને વ્યાપ્ત વિધેય કહે છે.



આકૃતિ 1.13



આકૃતિ 1.14

આકૃતિ 1.13 વ્યાપ્ત વિધેય દર્શાવે છે. જ્યારે આકૃતિ 1.14 પરથી સ્પષ્ટ છે કે, સહપ્રદેશ B ના ઘટક 7 ને સંગત પ્રદેશ A માં કોઈ ઘટક નથી જેથી સંગતતા સાધી શકાય. આથી તે વ્યાપ્ત વિધેય નથી.

- A થી B પરનાં વ્યાપ્ત વિધેયોની સંખ્યા $= \sum_{r=1}^{n} (-1)^{n-r} \binom{n}{r} r^m$ જ્યાં $1 \le n \le m$ તથા $m \ge 2$
- A થી B પરનાં એક-એક, વ્યાપ્ત વિધેયોની સંખ્યા $= m! = {}_mP_m$ જ્યાં $n(A) = n(B) = m$

  જો $m \neq n$ હોય તો એક-એક, વ્યાપ્ત વિધેયોની સંખ્યા $= 0$

(12) પ્રતિવિધેય : જો $f: A \to B$ પરનું વિધેય હોય, તો વિધેય $g: B \to A$ એવું મળે છે કે જેથી $gof = I_A$ તથા $fog = I_B$ થાય તો g ને f નું પ્રતિવિધેય કહે છે. તેને સંકેતમાં f^{-1} વડે દર્શાવાય. એટલે કે $g = f^{-1}$

જો વિધેય $f: A \to B$ એ એક-એક અને વ્યાપ્ત હોય તો અને તો જ તેનું પ્રતિવિધેય મળે.

જો વિધેય $f: A \to B$ એ એક-એક અને વ્યાપ્ત હોય, પ્રત્યેક $y \in B$ ને સંગત અનન્ય $x \in A$ એવો મળે કે જેથી $f(x) = y$ હોય તો $f^{-1}: B \to A$ માટે, $x = f^{-1}(y)$ થાય. f^{-1}ને f નું **પ્રતિવિધેય** કહે છે.

(13) અયુગ્મ વિધેય : $f: A \to B$ માટે $\forall\, x, -x \in A,\ f(-x) = -f(x)$ થાય, તો f ને **અયુગ્મ વિધેય** કહે છે.

(14) યુગ્મ વિધેય : $f: A \to B$ માટે $\forall\, x, -x \in A,\ f(-x) = f(x)$ થાય, તો f ને **યુગ્મ વિધેય** કહે છે.

- **અગત્યનાં પરિણામો**

વિધેય $f: A \to B$ તથા $g: B \to C$ માટે,

(1) $gof: A \to C$ એ C માં વ્યાપ્ત વિધેય હોય, તો $g: B \to C$ એ C માં વ્યાપ્ત વિધેય હોય.

(2) $gof: A \to C$ એક-એક વિધેય હોય તો, $f: A \to B$ એક-એક વિધેય હોય.

(3) $gof: A \to C$ વ્યાપ્ત વિધેય હોય અને $g: B \to C$ એક-એક વિધેય હોય, તો $f: A \to B$ વ્યાપ્ત વિધેય હોય.

(4) $gof: A \to C$ એક-એક વિધેય અને $f: A \to B$ એ B માં વ્યાપ્ત વિધેય હોય, તો $g: B \to C$ એક-એક વિધેય હોય.

(5) બે વિધેયો $f: A \to R$ તથા $g: B \to R$ માટે,

$(f \pm g): A \cap B \to R$ માટે, $(f \pm g)(x) = f(x) \pm g(x)$

$(fg) : A \cap B \to R$ માટે, $(fg)(x) = f(x) \cdot g(x)$

$\left(\frac{f}{g}\right) : A \cap B - \{x \mid g(x) = 0\} \to R,\ \left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$

(6) $A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$

(7) $A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$

(8) $A \times (B - C) = (A \times B) - (A \times C)$

(9) પ્રત્યેક વધતું વિધેય એક-એક તથા વ્યાપ્ત હોય જ.

(10) જો $|x| \le a$ હોય, તો $-a \le x \le a$ એટલે કે $x \in [-a, a]$.

તથા જો $|x| \ge a$ હોય, તો $x \in (-\infty, -a] \cup [a, \infty)$ મળે.

આ જ રીતે, $|x| < a$ હોય, તો $x \in (-a, a)$ તથા $|x| > a$ હોય, તો $x \in (-\infty, a) \cup (a, \infty)$ મળે.

: બહુ વિકલ્પી પ્રશ્નો :

(1) $A = \{x \mid 2\sin x - \sqrt{3} = 0;\ 0 < x < \pi\}$ તથા $B = \{x \mid 2\cos x + 1 = 0;\ 0 < x < 2\pi\}$ હોય, તો $A \cap B$ શોધો.

(A) $\emptyset$ (B) $\left\{\frac{\pi}{3}\right\}$ (C) $\left\{\frac{2\pi}{3}\right\}$ (D) $\left\{\frac{5\pi}{6}\right\}$

ઉકેલ : $A = \{x \mid 2\sin x - \sqrt{3} = 0\}$

$\therefore 2 \sin x = \sqrt{3}$

$\therefore \sin x = \frac{\sqrt{3}}{2} > 0$

હવે $x \in (0, \pi)$ હોવાથી

$x = \frac{\pi}{3}$ અથવા $\frac{2\pi}{3}$

$\therefore A = \left\{\frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}\right\}$

$B = \{x \mid 2 \cos x + 1 = 0\}$

$\therefore 2 \cos x = -1$

$\therefore \cos x = \frac{-1}{2} < 0$

વળી, $x \in (0, 2\pi)$ આપેલ છે.

પરંતુ $\cos x < 0$ હોવાથી, $x \in \left(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right)$ મળે.

$\therefore x = \pi - \frac{\pi}{3}$ અથવા $\pi + \frac{\pi}{3}$

$\therefore x = \frac{2\pi}{3}$ અથવા $\frac{4\pi}{3}$

$\therefore B = \left\{\frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}\right\}$

$\therefore A \cap B = \left\{\frac{2\pi}{3}\right\}$

નોંધ : $sinx = \frac{\sqrt{3}}{2} > 0$ તથા $cosx = -\frac{1}{2} < 0$ હોવાથી $P(x)$ બીજા ચરણમાં હોય. $x \in (0, 2\pi)$ હોવાથી

$x = \pi - \frac{\pi}{3} = \frac{2\pi}{3}$.

જવાબ : (C)

(2) જો $U = \{x \mid x^5 - 6x^4 + 11x^3 - 6x^2 = 0 ; x \in R\}$ હોય તથા $A = \{x \mid x^2 - 5x + 6 = 0 ; x \in R\}$ અને $B = \{x \mid x^2 - 3x + 2 = 0 ; x \in R\}$ હોય, તો નીચેના જોડકાં જોડો :

P	Q
(i) $A \cup B$	(*a*) $\{2\}$
(ii) $A \cap B$	(*b*) $\{1, 3\}$
(iii) $A \Delta B$	(*c*) $\{3\}$
(iv) $(A - B)$	(*d*) $\{1, 2, 3\}$

(A) (i) → (*d*), (ii) → (*a*), (iii) → (*b*), (iv) → (*c*)
(B) (i) → (*a*), (ii) → (*b*), (iii) → (*c*), (iv) → (*d*)
(C) (i) → (*c*), (ii) → (*b*), (iii) → (*a*), (iv) → (*d*)
(D) આપેલ પૈકી એકપણ નહિ

ઉકેલ : $x^5 - 6x^4 + 11x^3 - 6x^2 = 0$

$\therefore x^2 (x^3 - 6x^2 + 11x - 6) = 0$

$\therefore x^2 (x - 1) (x^2 - 5x + 6) = 0$ (શેષ પ્રમેય પરથી)

$\therefore x^2 (x - 1) (x - 2) (x - 3) = 0$

$\therefore x = 0$ અથવા $x = 1$ અથવા 2 અથવા 3

$\therefore U = \{0, 1, 2, 3\}$ મળે

હવે, $A = \{x \mid x^2 - 5x + 6 = 0\}$, જ્યાં $x \in R$ છે.

હવે, $x^2 - 5x + 6 = (x - 2) (x - 3) = 0$

$\therefore x = 2$ અથવા $x = 3$ આથી, $A = \{2, 3\}$

વળી, $B = \{x \mid x^2 - 3x + 2 = 0; x \in R\}$ છે.

$\therefore x^2 - 3x + 2 = (x - 2) (x - 1) = 0$

$\therefore x = 1$ અથવા $x = 2$ મળે. આથી, $B = \{1, 2\}$

આથી, (i) $A \cup B = \{1, 2, 3\} \rightarrow (d)$

(ii) $A \cap B = \{2\} \rightarrow (a)$.

(iii) $A \Delta B = (A \cup B) - (A \cap B) = \{1, 2, 3\} - \{2\} = \{1, 3\} \rightarrow (b)$

(iv) $A - B = \{3\} \rightarrow (c)$ મળે. **જવાબ : (A)**

(3) જો $2 \le i \le 4$; $i \in A$, $1 \le j \le 5$; $j \in B$ તથા $2 \le k \le 4$; $k \in C$ હોય તેમજ $S_9 = \{a_i, b_j, c_k) \mid i + j + k = 9\}$ હોય તો S_9 ના કુલ ઘટકોની સંખ્યા ...... હોય.

(A) 6 (B) 7 (C) 9 (D) 10

ઉકેલ : $i \in A$ તથા $2 \le i \le 4$ હોવાથી, $i \ne 1$

જો $i = 2$ હોય તો, $j + k = 7$ થાય.

$\therefore$ $j = 3$ તથા $k = 4$, $j = 4$ તથા $k = 3$ અને $j = 5$ તથા $k = 2$ મળે.

પરંતુ $2 \le k \le 4$ હોવાથી, $j = 2$ અને $k = 5$ શક્ય નથી તથા $j = 1$, $k = 6$ પણ શક્ય નથી.

$\therefore$ S_9 ના શક્ય ઘટકો (2, 3, 4), (2, 4, 3), (2, 5, 2) મળે.

જો $i = 3$ હોય, તો $j + k = 6$ થાય.

$\therefore j = k = 3$ તેમજ $j = 2, k = 4$ અને $j = 4, k = 2$ શક્ય બને, પરંતુ $j = 5$ તથા $k = 1$ શક્ય નથી, $j = 1$ અને $k = 5$ પણ શક્ય નથી.

$\therefore$ S_9 માં (3, 3, 3), (3, 2, 4), (3, 4, 2) મળે.

જો $i = 4$ હોય તો, $j + k = 5$ થાય.

આથી $j = 1, k = 4$ તેમજ $j = 2, k = 3$ તથા $j = 3, k = 2$ શક્ય બને.પરંતુ $j = 4, k = 1$ શક્ય નથી.

$\therefore$ S_9 માં (4, 1, 4), (4, 2, 3) અને (4, 3, 2) મળે.

આમ, S_9 ના કુલ (4, 1, 4), (2, 5, 2), (3, 2, 4), (3, 3, 3), (3, 4, 2), (4, 2, 3), (4, 3, 2) (2, 4, 3), (2, 3, 4) જેવા નવ ઘટકો મળે. **જવાબ : (C)**

(4) ગણિત તથા ભૌતિકવિજ્ઞાનની થયેલ પરીક્ષા પૈકી 15 % વિદ્યાર્થીઓ ભૌતિકવિજ્ઞાનમાં અનુત્તીર્ણ થયેલ છે તથા 75% વિદ્યાર્થીઓ આ બંને વિષયમાં ઉત્તીર્ણ થયેલ છે. જો માત્ર ભૌતિક વિજ્ઞાનમાં ઉત્તીર્ણ થયેલ વિદ્યાર્થીઓની સંખ્યા 120 હોય, તો કુલ ...... વિદ્યાર્થીઓએ પરીક્ષા આપી હશે.

(A) 1000 (B) 1200 (C) 1100 (D) 800

ઉકેલ : ધારો કે x વિદ્યાર્થીઓએ પરીક્ષા આપી છે.

A : ભૌતિકવિજ્ઞાનમાં ઉત્તીર્ણ થયેલ વિદ્યાર્થીઓનો ગણ

B : ગણિતમાં ઉત્તીર્ણ થયેલ વિદ્યાર્થીઓનો ગણ

$A \cap B$: બંને વિષયમાં ઉત્તીર્ણ થયેલ વિદ્યાર્થીઓનો ગણ

હવે 75 % વિદ્યાર્થીઓ બંને વિષયમાં ઉત્તીર્ણ થયેલ છે.

$\therefore n(A \cap B) = \frac{75x}{100}$; આ જ રીતે, $n(A) = \frac{85x}{100}$

માત્ર, ભૌતિક વિજ્ઞાનમાં પાસ થયેલ વિદ્યાર્થીઓની સંખ્યા 120 છે.

$\therefore n(A \cap B') = 120$

$\therefore n(A) - n(A \cap B) = 120$

$\therefore \frac{85x}{100} - \frac{75x}{100} = 120$

$\therefore \frac{10x}{100} = 120$

$\therefore x = 1200$

$\therefore$ 1200 વિદ્યાર્થીઓએ પરીક્ષા આપી હશે.

જવાબ : (B)

(5) વિદ્યાર્થીઓને તેમની પસંદગીના ભિન્ન વિષયો પર કરેલ સર્વેક્ષણ અનુસાર મળેલ પરિણામો નીચે મુજબ છે, જ્યાં $n(U) = 30$ છે.

20 વિદ્યાર્થીઓને ગણિત પસંદ છે, 15 વિદ્યાર્થીઓને ભૌતિકવિજ્ઞાન પસંદ છે, 12 વિદ્યાર્થીઓને રસાયણવિજ્ઞાન પસંદ છે, 9 વિદ્યાર્થીઓને ગણિત તથા રસાયણવિજ્ઞાન પસંદ છે, 6 વિદ્યાર્થીઓને ગણિત તથા ભૌતિકવિજ્ઞાન પસંદ છે, 4 વિદ્યાર્થીઓને રસાયણ વિજ્ઞાન તથા ભૌતિક વિજ્ઞાન પસંદ છે, 2 વિદ્યાર્થીઓને ત્રણેય વિષયો પસંદ છે.

આ સર્વેક્ષણ પરથી નીચેનાં જોડકાં જોડો :

પસંદગીના વિષયો	વિદ્યાર્થીઓની સંખ્યા
(i) ઓછામાં ઓછો 1 વિષય પસંદ હોય	(a) 0
(ii) ઓછામાં ઓછા 2 વિષયો પસંદ હોય	(b) 28
(iii) વધુમાં વધુ 2 વિષયો પસંદ હોય	(c) 30
(iv) એકપણ વિષય પસંદ ન હોય	(d) 15

(A) (i) → (b), (ii) → (c), (iii) → (d), (iv) → (a)

(B) (i) → (c), (ii) → (d), (iii) → (b), (iv) → (a)

(C) (i) → (a), (ii) → (c), (iii) → (b), (iv) → (d)

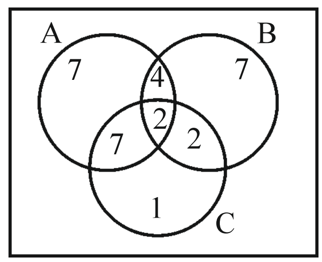
(D) (i) → (a), (ii) → (b), (iii) → (c), (iv) → (d)

ઉકેલ : ધારો કે,

A = ગણિત પસંદ હોય તેવા વિદ્યાર્થીઓનો ગણ

B = ભૌતિકવિજ્ઞાન પસંદ હોય તેવા વિદ્યાર્થીઓનો ગણ

C = રસાયણ વિજ્ઞાન પસંદ હોય તેવા વિદ્યાર્થીઓનો ગણ



આકૃતિ 1.15

અહીં, $n(A) = 20$, $n(B) = 15$; $n(C) = 12$

$n(C \cap A) = 9$, $n(A \cap B) = 6$; $n(B \cap C) = 4$, $n(A \cap B \cap C) = 2$ આપેલ છે, તો ઉપર આપેલી વેન આકૃતિ પરથી સ્પષ્ટ છે કે, જેમને ઓછામાં ઓછો એક વિષય પસંદ હોય તેવા વિદ્યાર્થીઓની સંખ્યા 30 છે. આમ, (i) → (c), (જવાબ (B) નક્કી થયો.)

ઓછામાં ઓછા બે વિષય પસંદ હોય તેવા વિદ્યાર્થીઓની સંખ્યા 15 છે. (ii) → (d)

વધુમાં વધુ 2 વિષય પસંદ હોય તેવા વિદ્યાર્થીઓની સંખ્યા 28 છે. (iii) → (b)

તથા એક પણ વિષય પસંદ ન હોય તેવો કોઈ વિદ્યાર્થી નથી. (iv) → (a)

આમ, (i) → (c), (ii) → (d), (iii) → (b), (iv) → (a) મળે. **જવાબ : (B)**

(6) જો $A = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 = 25; x, y \in R\}$ અને $B = \{(x, y) \mid 9x^2 + y^2 = 144, x, y \in R\}$ હોય તો $A \cap B$ નાં ઘટકોની સંખ્યા ...... મળે.

(A) 2 (B) 3 (C) 4 (D) 1

ઉકેલ : અહીં $x^2 + y^2 = 25$ તથા $9x^2 + y^2 = 144$ આપેલ છે.

$\therefore \ 9x^2 + y^2 = 144$ તથા $9x^2 + 9y^2 = 225$

$\therefore \ 8y^2 = 81$

$\therefore \ y^2 = \frac{81}{8}$ આથી, $y = \pm\frac{9}{2\sqrt{2}}$

સમીકરણ $x^2 + y^2 = 25$ માં $y^2 = \frac{81}{8}$ મૂકતાં, $x^2 + \frac{81}{8} = 25$

$\therefore\ x^2 = 25 - \frac{81}{8} = \frac{119}{8}$ આથી, $x = \pm\frac{\sqrt{119}}{2\sqrt{2}}$

આથી $\left(\frac{\sqrt{119}}{2\sqrt{2}}, \frac{9}{2\sqrt{2}}\right), \left(\frac{-\sqrt{119}}{2\sqrt{2}}, \frac{9}{2\sqrt{2}}\right), \left(\frac{-\sqrt{119}}{2\sqrt{2}}, \frac{-9}{2\sqrt{2}}\right), \left(\frac{\sqrt{119}}{2\sqrt{2}}, \frac{-9}{2\sqrt{2}}\right)$ એમ ચાર ઘટક છેદગણમાં મળે.

જવાબ : (C)

(7) બે અરિક્ત ગણ A તથા B માટે, $4n(A) = 3n(B) = 2n(A \cup B)$ તથા $n(A \cap B) = 15$ હોય, તો $n\,(A \cup B) =$ ......

(A) 45 (B) 90 (C) 135 (D) 180

ઉકેલ : ધારો કે $4n(A) = 3n(B) = 2n(A \cup B) = 12x$

$\therefore\ n(A) = 3x;\ n(B) = 4x$ તથા $n(A \cup B) = 6x$ મળે.

હવે, $n\,(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$

$\therefore\ 6x = 3x + 4x - 15$

$\therefore\ x = 15$

$\therefore\ n(A \cup B) = 6x = 6(15) = 90$ **જવાબ : (B)**

(8) જો $\{x \mid x + \frac{1}{x} \le -2;\ x \in Z - \{0\}\}$ નો ઉકેલ ગણ એ કોઈ ગણ A હોય, તો A' = ... જ્યાં, U = Z

(A) Z (B) Z^- (C) $Z^+ \cup \{0\}$ (D) N

ઉકેલ : $x + \frac{1}{x} \le -2$

$\therefore\ \frac{x^2+1}{x} \le -2$

$\therefore\ \frac{x^2+1}{x} + 2 \le 0$

$\therefore\ \frac{x^2+1+2x}{x} \le 0$

$\therefore\ \frac{(x+1)^2}{x} \le 0$

આ $x < 0$ માટે જ સત્ય બને. $((x+1)^2 \ge 0)$

$\therefore\ A = Z^-$ સત્ય બને. આથી, $A' = Z^+ \cup \{0\}$ **જવાબ : (C)**

(9) ગણ A ના n ઘટકોનો સરવાળો $S_n = n^2$ થાય, જ્યાં $n \in N$ અને ગણ Bના ઘટકો કોઈ સમાંતર શ્રેણીનાં ત્રણ ક્રમિક પદો $k + 2,\ 2k + 5,\ 4k + 6$ હોય તો $A' \cup B' =$ ...... જ્યાં U = N

(A) N – {9} (B) N (C) $N \cup \{0\}$ (D) {1, 3, 4, 5, 7, 9, 14}

ઉકેલ : $S_n = n^2$, જ્યાં $n \in N$ છે.

$\therefore\ t_n = S_n - S_{n-1}$ પરથી, $t_n = n^2 - (n-1)^2$

$= n^2 - (n^2 - 2n + 1)$

$= -1 + 2n$ મળે.

$\therefore$ A = {1, 3, 5, 7,...}

વળી, $k + 2$, $2k + 5$ તથા $4k + 6$ એ ગણ B માટે, કોઈ સમાંતર શ્રેણીનાં ત્રણ ક્રમિક પદો હોય તો,

$2(2k + 5) = k + 2 + 4k + 6$

$\therefore \; 4k + 10 = 5k + 8$

$\therefore \; k = 2$

$\therefore$ B = {4, 9, 14}

આથી, $A \cap B = \{9\}$

$\therefore \; A' \cup B' = (A \cap B)' = N - \{9\}$ **જવાબ :** (A)

(10) 10000 કુટુંબની વસતિ ધરાવતા એક શહેરમાં સર્વેક્ષણ પરથી માલૂમ પડ્યું કે 40 % કુટુંબ વર્તમાનપત્ર P વાંચે છે, 20 % કુટુંબ વર્તમાનપત્ર Q વાંચે છે તથા 10 % કુટુંબ વર્તમાનપત્ર R વાંચે છે તેમજ 5 % કુટુંબ વર્તમાનપત્ર P તથા Q વાંચે છે, 3 % કુટુંબ વર્તમાનપત્ર Q તથા R વાંચે છે તેમજ 4 % કુટુંબ વર્તમાનપત્ર P તથા R વાંચે છે. જ્યારે 2 % કુટુંબ ત્રણેય વર્તમાનપત્ર વાંચે છે તો માત્ર વર્તમાનપત્ર P વાંચતા હોય તેવાં કુટુંબની સંખ્યા ...... હોય.

(A) 3000 (B) 3100 (C) 3200 (D) 3300

ઉકેલ : ધારો કે A = વર્તમાનપત્ર P વાંચનાર કુટુંબોની સંખ્યા

B = વર્તમાનપત્ર Q વાંચનાર કુટુંબોની સંખ્યા

C = વર્તમાનપત્ર R વાંચનાર કુટુંબોની સંખ્યા

$A \cap B$ = વર્તમાનપત્ર P તથા Q વાંચનાર કુટુંબોની સંખ્યા

$B \cap C$ = વર્તમાનપત્ર Q તથા R વાંચનાર કુટુંબોની સંખ્યા

$C \cap A$ = વર્તમાનપત્ર R તથા P વાંચનાર કુટુંબોની સંખ્યા

$A \cap B \cap C$ = ત્રણેય વર્તમાનપત્ર વાંચનાર કુટુંબોની સંખ્યા

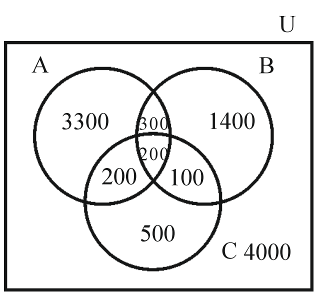
અહીં, $n(U) = 10000$ છે. આથી $n(A) = \dfrac{40\times10000}{100} = 4000$

$n(B) = \dfrac{20\times10000}{100} = 2000$; $n(C) = \dfrac{10\times10000}{100} = 1000$

$n(A \cap B) = \dfrac{5\times10000}{100} = 500$; $n(B \cap C) = \dfrac{3\times10000}{100} = 300$

$n(C \cap A) = \dfrac{4\times10000}{100} = 400$; $n(A \cap B \cap C) = \dfrac{2\times10000}{100} = 200$

આથી, નીચેની વેન આકૃતિ પરથી સ્પષ્ટ છે કે માત્ર વર્તમાનપત્ર P વાંચતા હોય તેવાં કુટુંબોની સંખ્યા 3300 છે.



જવાબ : (D)

આકૃતિ 1.16

બીજી રીત :

વેન આકૃતિની મદદ વગર દાખલો નીચે મુજબ ગણી શકાય :

$n(A \cap B' \cap C') = n[A \cap (B \cup C)'] = n\,[A - (A \cap (B \cup C)] = n(A) - n\,(A \cap (B \cup C))$

$= n(A) - n(A \cap B) - n\,(A \cap C) + n\,(A \cap B \cap C)$

$= 4000 - 500 - 400 + 200 = 3300$ **જવાબ :** (D)

(11) ત્રણ અરિક્ત ગણ A, B તથા C માટે, $A \cap B = A \cap C$ તેમજ $A \cup B = A \cup C$ છે, તો નીચેનામાંથી કયું સત્ય બને ? (IIT : 2009)

(A) $A \cap B = \emptyset$ (B) $A = B$ (C) $A = C$ (D) $B = C$

ઉકેલ : ધારો કે $x \in B$ છે.

વિકલ્પ (i) : $x \in A$

$\therefore x \in A \cap B$ ($x \in B$)

$\therefore x \in A \cap C$ ($A \cap B = A \cap C$)

$\therefore x \in A$ અને $x \in C$

વિકલ્પ (ii) : $x \notin A$

$\therefore x \in A \cup B$ ($x \in B$)

$\therefore x \in A \cup C$ ($A \cup B = A \cup C$)

$\therefore x \in A$ અથવા $x \in C$

પરંતુ $x \notin A$ હોવાથી $x \in C$ મળે.

આમ, $x \in B \Rightarrow x \in C$

$\therefore B \subset C$ (i)

આ જ રીતે, $C \subset B$ મળે. (ii)

પરિણામ (i) તથા (ii) પરથી $B = C$ મળે. **જવાબ :** (D)

(12) જો $X = \{4^n - 3n - 1, n \in N\}$ અને $Y = \{9(n-1); n \in N\}$ જ્યાં N = પ્રાકૃતિક સંખ્યાઓનો ગણ હોય તો $X \cup Y =$ ...... (JEE : 2014)

(A) N (B) Y – X (C) X (D) Y

ઉકેલ : $4^n - 3n - 1 = (1+3)^n - 3n - 1$

$$= 1 + 3n + \binom{n}{2} 9 + \ldots + 3^n - 3n - 1$$

$$= 9\left[\binom{n}{2} + \binom{n}{3}3 + \ldots\right] = 9 \text{ નો ગુણક છે.} \qquad (n \ge 2)$$

$\therefore X \subset Y$ ($n = 1$ માટે શૂન્ય છે, પરિણામ સત્ય છે.)

$\therefore X \cup Y = Y$ **જવાબ :** (D)

(13) જો $f : \{x \,|\, |x| \ge 5; x \in R\} \to R, f(x) = \sqrt{x^2 - 16}$; તથા $g : \{x \,|\, |x| \le 5; x \in R\} \to R, g(x) = \sqrt{25 - x^2}$ હોય, તો નીચેનાં પરિણામો જોડો :

(P)	(Q)
(i) $(f+g)(5)$	(a) અસ્તિત્વ ન ધરાવે
(ii) $(fg)(5)$	(b) 3
(iii) $\left(\frac{f}{g}\right)(-5)$	(c) 0

(A) (i) → (a), (ii) → (b), (iii) → (c)

(B) (i) → (b), (ii) → (a), (iii) → (c)

(C) (i) → (b), (ii) → (c), (iii) → (a)

(D) આપેલ પૈકી એક પણ નહિ

ઉકેલ : અહીં $f : \{x \mid |x| \geq 5; x \in R\} \rightarrow R$ હોવાથી, $D_f = (-\infty, -5] \cup [5, \infty)$ મળે જ્યારે,

$g : \{x \mid |x| \leq 5; x \in R\} \rightarrow R$ હોવાથી, $D_g = -5 \leq x \leq 5 = [-5, 5]$ મળે.

$\therefore D_f \cap D_g = \{-5, 5\}$ થાય.

હવે $(f + g)(5) = f(5) + g(5) = \sqrt{25-16} + \sqrt{25-25} = 3$ તેથી (i) $\rightarrow$ (b),

$(fg)(5) = f(5) \cdot g(5) = \left(\sqrt{(5)^2-16}\right)\left(\sqrt{25-(5)^2}\right) = (3)(0) = 0$ (જવાબ (C) નક્કી થયો.)

તથા $\left(\frac{f}{g}\right)(-5)$ માટે, $g(-5) = \left(\sqrt{25-(5)^2}\right) = \sqrt{25-25} = 0$ હોવાથી, $\left(\frac{f}{g}\right)(-5)$ નું અસ્તિત્વ નથી.

આમ, (i) $\rightarrow$ (b), (ii) $\rightarrow$ (c) તથા (iii) $\rightarrow$ (a) સાથે જોડાય છે. **જવાબ :** (C)

(14) જો $P = \{1, 2, 3, 4,\}$, $Q = \{a, b, c, d\}$ હોય તો નીચેનાં જોડકાં જોડો :

(I)	(II)
(i) P થી Q પરના સંબંધોની કુલ સંખ્યા	(a) 256
(ii) P થી Q પરના વિધેયોની કુલ સંખ્યા	(b) 24
(iii) P થી Q પરના એક-એક વિધેયોની સંખ્યા	(c) 2^{16}

(A) (i) $\rightarrow$ (c), (ii) $\rightarrow$ (a), (iii) $\rightarrow$ (b) (B) (i) $\rightarrow$ (b), (ii) $\rightarrow$ (c), (iii) $\rightarrow$ (a)

(C) (i) $\rightarrow$ (a), (ii) $\rightarrow$ (b), (iii) $\rightarrow$ (c) (D) (i) $\rightarrow$ (a), (ii) $\rightarrow$ (c), (iii) $\rightarrow$ (b)

ઉકેલ : અહીં $n(A) = n(B) = 4$ છે.

$\therefore n(A \times B) = n(A) \cdot n(B) = 4(4) = 16$

આથી A થી B પરના સંબંધોની કુલ સંખ્યા $= 2^{n(A \times B)} = 2^{16}$ તેથી (i) $\rightarrow$ (c), (જવાબ (A) નક્કી થયો.)

હવે, A થી B પરનાં વિધેયોની કુલ સંખ્યા = (સહપ્રદેશનાં ઘટકોની સંખ્યા) પ્રદેશનાં ઘટકોની સંખ્યા

$= (4)^4 = (2^2)^4 = 2^8 = 256$ આથી (ii) $\rightarrow$ (a),

એક-એક વિધેયોની કુલ સંખ્યા $= {}_nP_m = {}_4P_4 = 4! = 24$ આથી (iii) $\rightarrow$ (b) **જવાબ :** (A)

(15) જો $f(x) = \sqrt{\log(\sin x)}$ હોય, તો $D_f = ...$.

(A) $\{(2k+1)\frac{\pi}{2} \mid k \in Z\}$ (B) $\{(4k-1)\frac{\pi}{2} \mid k \in Z\}$

(C) $\{(4k+1)\frac{\pi}{2} \mid k \in Z\}$ (D) $\{(4k+3)\frac{\pi}{2} \mid k \in Z\}$

ઉકેલ : $f(x) = \sqrt{\log(\sin x)}$ નું અસ્તિત્વ હોવા માટે, $\log(\sin x) \geq 0$ જરૂરી છે.

$\therefore \log_e(\sin x) \geq \log_e 1$

$\therefore \sin x \geq 1$

પરંતુ $\sin$ વિધેયનો વિસ્તાર $[-1, 1]$ હોવાથી, $\sin x \ngtr 1$

$\therefore \sin x = 1$

$\therefore x = \{(4k+1)\frac{\pi}{2} \mid k \in Z\}$

$\therefore D_f = \{(4k+1)\frac{\pi}{2} \mid k \in Z\}$ **જવાબ :** (C)

(16) વાસ્તવિક વિધેય $f(x) = \sqrt{x^2+6x+10}$ નો વિસ્તાર .... મળે.

(A) $(1, \infty)$ (B) $(-\infty, 1)$ (C) R (D) $[1, \infty)$

ઉકેલ : $f(x) = \sqrt{x^2+6x+10} = \sqrt{(x^2+6x+9)+1} = \sqrt{(x+3)^2+1}$

$\therefore$ $f(x) \geq \sqrt{1}$ કારણ કે $(x+3)^2 \geq 0$

વળી $x = -3$ લેતાં, ન્યૂનતમ કિંમત 1 મળે.

$\therefore$ વિધેય f નો વિસ્તાર $[1, \infty)$ થાય. **જવાબ :** (D)

બીજી રીત :

$x^2 + 6x + 10$ માટે $a = 1, b = 6, c = 10$

$\therefore$ વિસ્તાર $\{y \mid y \geq \frac{4ac-b^2}{4a}, y \in R\} = \{y \mid y \geq 1, y \in R\}$

$\therefore$ $R_f = [1, \infty)$ છે. **જવાબ :** (D)

(17) $f : R-\{-1\} \to R, f(x) = \frac{1-x}{1+x}$ હોય, તો $f\left(\frac{x+y}{1+xy}\right)$ = ...

(A) $f(x) + f(y)$ (B) $(f(x))^2$ (C) $f(x) \cdot f(y)$ (D) $\frac{f(x)}{f(y)}$

ઉકેલ : $f\left(\frac{x+y}{1+xy}\right) = \frac{1-\left(\frac{x+y}{1+xy}\right)}{1+\left(\frac{x+y}{1+xy}\right)}$

$= \frac{1+xy-x-y}{1+xy+x+y}$

$= \frac{(1-x)(1-y)}{(1+x)(1+y)} = \left(\frac{1-x}{1+x}\right)\left(\frac{1-y}{1+y}\right) = f(x) \cdot f(y)$ **જવાબ :** (C)

(18) જો $f(x) = ax^2 + bx + c; x = 1, 2, 3$ તથા $g(x) = \begin{cases} 3x+1; & x=2,3 \\ 3; & x=1 \end{cases}$ હોય તેમજ બંને વિધેયો સમાન હોય,

તો નીચેનામાંથી કયું સત્ય બને ?

(A) $a = b = c = 1$ (B) $a = -\frac{1}{2}, b = \frac{11}{2}, c = -2$ (C) $a = \frac{11}{2}, b = -2, c = \frac{1}{2}$ (D) $a = \frac{1}{2}, b = 2, c = \frac{11}{2}$

ઉકેલ : અહીં $f(x) = g(x)$ આપેલ છે.

$\therefore f(1) = g(1)$

$\therefore a + b + c = 3$ (1)

વળી, $f(2) = g(2) = 3(2) + 1 = 7$ થાય.

$\therefore a(2)^2 + b(2) + c = 7$

$\therefore 4a + 2b + c = 7$ (2)

તેમજ $f(3) = g(3) = 3(3) + 1 = 10$ પરથી,

$a(3)^2 + b(3) + c = 10$

$\therefore 9a + 3b + c = 10$ (3)

સમીકરણ (2) તથા (3) પરથી, $5a + b = 3$ મળે.

$\therefore\ b = 3 - 5a$ સમીકરણ (2)માં મૂકતાં, $c = 1 + 6a$ મળે.

$\therefore$ (1) પરથી, $a + 3 - 5a + 1 + 6a = 3$

$\therefore\ 2a + 4 = 3$

$\therefore\ a = -\frac{1}{2}$

$b = 3 - 5\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{11}{2}$ તથા $c = 1 + 6\left(-\frac{1}{2}\right) = -2$ મળે. **જવાબ :** (B)

(19) જો $f(x) = cos\ (\log x)$ હોય, તો $f(x) \cdot f(y) - \frac{1}{2}\left[f\left(\frac{x}{y}\right) + f(xy)\right] = ...$

(A) 0 (B) 1 (C) x^2 (D) x

ઉકેલ : જો $f(x) = cos\ (\log x)$ હોય, તો $f(y) = cos\ (\log y)$

$f\left(\frac{x}{y}\right) = cos\left(\log\frac{x}{y}\right) = cos\ (\log x - \log y)$ તથા

$f(xy) = cos\ (\log xy) = cos\ (\log x + \log y)$ મળે.

$f(x) \cdot f(y) - \frac{1}{2}\left[f\left(\frac{x}{y}\right) + f(xy)\right]$

$= cos\ (\log x) \cdot cos\ (\log y) - \frac{1}{2}\ [cos\ (\log x - \log y) + cos\ (\log x + \log y)]$

$= cos\ (\log x) \cdot cos\ (\log y) - \frac{1}{2}\left[2cos\left(\frac{\log x - \log y + \log x + \log y}{2}\right)cos\left(\frac{\log x - \log y - \log x - \log y}{2}\right)\right]$

$= cos\ (\log x) \cdot cos\ (\log y) - \frac{1}{2}\ [2\ cos\ (\log x)\ cos\ (-\log y)]$

$= cos\ (\log x)\ cos\ (\log y) - cos\ (\log x)\ cos\ (\log y) = 0$ **જવાબ :** (A)

(20) જો $f(x) = \frac{x-3}{x+1}$, $\boldsymbol{x} \neq -1$ હોય તો $f^{(2016)}(2015) = ...$ જ્યાં $f^{(2016)}(x)$ એ f નું f સાથે 2016 વખત સંયોજિત વિધેય દર્શાવે છે.

(A) 2015 (B) 2016 (C) 2017 (D) 2014

ઉકેલ : $f(x) = \frac{x-3}{x+1}$. આથી $f(f(x)) = f\left(\frac{x-3}{x+1}\right)$

$$= \frac{\frac{x-3}{x+1} - 3}{\frac{x-3}{x+1} + 1} = \frac{x-3-3x-3}{x-3+x+1}$$

$$f^{(2)}(x) = \frac{-2x-6}{2x-2}$$

$$= \frac{-(x+3)}{-(1-x)} = \frac{(x+3)}{(1-x)}$$

આ જ રીતે, $f^{(3)}(x) = f(f^{(2)}(x))$

$$= f\left(\frac{x+3}{1-x}\right)$$

$$= \frac{\frac{x+3}{1-x}-3}{\left(\frac{x+3}{1-x}\right)+1}$$

$$= \frac{x+3-3+3x}{1-x+x+3} \quad = \quad \frac{4x}{4} = x$$

$\therefore f^{(4)}(x) = f(x)$; $f^{(5)}(x) = f^{(2)}(x)$ તથા $f^{(6)}(x) = f^{(3)}(x) = x$ મળે.

આમ, $f^{3k}(x) = x$; $k \geq 1$, $k \in N$ થાય.

$\therefore f^{2016}(x) = f^{3(672)}(x) = x$

$\therefore f^{2016}(2015) = 2015$ **જવાબ :** (A)

(21) જો $f(x)$ એ દ્વિઘાત બહુપદી હોય તથા $f(0) = 4$ હોય તેમજ $f(x+3) - f(x) = 3x + 5$, $\forall x$, હોય, તો તે દ્વિઘાત બહુપદી ...... હોય.

(A) $x^2 + x + 24$ (B) $3x^2 + x + 24$ (C) $\frac{1}{3}(x^2 + 2x + 9)$ (D) $\frac{1}{6}(3x^2 + x + 24)$

ઉકેલ : ધારો કે $f(x) = ax^2 + bx + c$ છે તથા $f(0) = c = 4$ છે

વળી, $f(x + 3) - f(x) = 3x + 5$ છે

$\therefore a(x + 3)^2 + b(x + 3) + c - ax^2 - bx - c = 3x + 5$

$\therefore a(x^2 + 6x + 9) + bx + 3b + c - ax^2 - bx - c = 3x + 5$

$\therefore 6ax + 9a + 3b = 3x + 5, \forall x.$

$\therefore 6a = 3$. તેમ જ $9a + 3b = 5$ મળે.

$\therefore a = \frac{1}{2}$. તેમ જ $\frac{9}{2} + 3b = 5$ પરથી, $3b = 5 - \frac{9}{2} = \frac{1}{2}$. આથી $b = \frac{1}{6}$

$\therefore f(x) = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x + 4 = \frac{3x^2+x+24}{6} = \frac{1}{6}(3x^2 + x + 24)$ મળે. **જવાબ :** (D)

(22) જો વિધેય f એ સમીકરણ $\frac{3}{10}f(x) + \frac{2}{10}f\left(\frac{x+59}{x-1}\right) = x + 3$ નું સમાધાન કરે (જ્યાં, $x \neq 1$) તો $f(21) =$ ......

(A) 106 (B) 116 (C) 110 (D) 96

ઉકેલ : અહીં $\frac{3}{10}f(x) + \frac{2}{10}f\left(\frac{x+59}{x-1}\right) = x + 3$ આપેલ છે.

$\therefore 3f(x) + 2f\left(\frac{x+59}{x-1}\right) = 10x + 30$ (1)

હવે x ને બદલે $\frac{x+59}{x-1}$ લેતાં, $\frac{\frac{x+59}{x-1}+59}{\frac{x+59}{x-1}-1} = x$ હોવાથી,

$3f\left(\frac{x+59}{x-1}\right) + 2f(x) = 10\left(\frac{x+59}{x-1}\right) + 30$ (2)

હવે, સમીકરણ (1)ને 3 તથા સમીકરણ (2)ને 2 વડે ગુણી તે પછી પ્રાપ્ત સમીકરણ (1)માંથી સમીકરણ (2) બાદ

કરતાં, $5f(x) = 30x - 20\left(\frac{x+59}{x-1}\right) + 30$

હવે ઉપર્યુક્ત પરિણામમાં $x = 21$ લેતાં,

$$5f(21) = 30(21) + 30 - \left(\frac{20(21+59)}{20}\right)$$

$$= 30(21) + 30 - 80 = 580$$

$$\therefore f(21) = \frac{580}{5} = 116$$

જવાબ : (B)

(23) જો f એ $[-1, 1]$ થી $R^+ \cup \{0\}$ પર વ્યાખ્યાયિત વિધેય હોય તથા (0, 0) અને $(x, f(x))$ શિરોબિંદુવાળા સમબાજુ ત્રિકોણનું ક્ષેત્રફળ $\frac{\sqrt{3}}{4}$ ચોરસ એકમ હોય તો $f(x)$ = ... થાય.

(A) $\sqrt{x^2-1}$ (B) $\sqrt{1-x^2}$ (C) $\sqrt{1+x^2}$ (D) $-\sqrt{1+x^2}$

ઉકેલ : અહીં ધારો કે ΔABC સમબાજુ ત્રિકોણ છે, જ્યાં A (0, 0) તથા B $(x, f(x))$ છે.

હવે, $AB = BC = CA = p$ લેતાં, $p = \sqrt{x^2 + (f(x))^2}$ થાય.

વળી, સમભુજ ΔABC નું ક્ષેત્રફળ $= \frac{\sqrt{3}}{4}(AB)^2 = \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot p^2$

$$\therefore \frac{\sqrt{3}}{4} = \frac{\sqrt{3}}{4}(x^2 + (f(x))^2)$$

$$\therefore x^2 + (f(x))^2 = 1$$

$$\therefore (f(x))^2 = 1 - x^2$$

$$\therefore f(x) = \sqrt{1-x^2}$$

જવાબ : (B)

(24) $f : (-\infty, 64] \to R$, $f(x) = -\sqrt{64-x}$ તથા $g : [-2\sqrt{2}, 2\sqrt{2}] \to R$, $g(x) = 8x^2$ હોય, તો સંયોજિત વિધેય fog નો મહત્તમ પ્રદેશ ...... તેમજ વિસ્તાર ...... મળે.

(A) $[-2\sqrt{2}, 2\sqrt{2}]$, $[-8, 0]$ (B) $[0, 2\sqrt{2}]$, $(-8, 0)$ (C) $(-2\sqrt{2}, 2\sqrt{2})$, $(0, 8)$ (D) $(-2\sqrt{2}, 2\sqrt{2})$, $(8, 0)$

ઉકેલ : $(fog)(x) = f(g(x)) = f(8x^2)$

$$= -\sqrt{64-8x^2} = -\sqrt{8(8-x^2)} = -2\sqrt{2}\sqrt{8-x^2}$$

આથી, $x \in [-2\sqrt{2}, 2\sqrt{2}]$ લેતાં, સંયોજિત વિધેય (fog) નો મહત્તમ પ્રદેશ $[-2\sqrt{2}, 2\sqrt{2}]$ થાય.

(વળી, સંયોજિત વિધેય fogના અસ્તિત્વ માટે, $R_g \subset D_f$ હોય જ.)

હવે $x \in [-2\sqrt{2}, 2\sqrt{2}]$ લેતાં, વિધેય *fog*ની મહત્તમ કિંમત 0 મળે.

જ્યારે $x = 0$ લેતાં, ન્યૂનતમ કિંમત $-\sqrt{64-0} = -8$ મળે.

આથી, સંયોજિત વિધેય *fog*નો વિસ્તાર $[-8, 0]$ મળે. **જવાબ :** (A)

(25) ધારો કે $f(x) = \dfrac{9^x}{9^x+3}$, $x \in R$ થી વિધેય વ્યાખ્યાયિત હોય, તો

$$f\left(\frac{1}{2017}\right) + f\left(\frac{2}{2017}\right) + f\left(\frac{3}{2017}\right) + ... + f\left(\frac{2016}{2017}\right) = ...$$

(A) 2016 (B) 1008 (C) 504 (D) 4032

ઉકેલ : અહીં $f(x) = \dfrac{9^x}{9^x+3}$; $x \in R$ આપેલ છે. આથી $f(1-x) = \dfrac{9^{1-x}}{9^{1-x}+3}$ મળે.

$$\text{વળી, } f(x) + f(1-x) = \frac{9^x}{9^x+3} + \frac{9^{1-x}}{9^{1-x}+3}$$

$$= \frac{9^x}{9^x+3} + \frac{\frac{9}{9^x}}{\frac{9}{9^x}+3}$$

$$= \frac{9^x}{9^x+3} + \frac{9}{9+3\cdot 9^x}$$

$$= \frac{9^x}{9^x+3} + \frac{3}{3+9^x} = \frac{9^x+3}{9^x+3} = 1 \text{ મળે}$$

આમ, $f(x) + f(1-x) = 1$ (1)

$$\therefore f\left(\frac{1}{2017}\right) + f\left(\frac{2}{2017}\right) + f\left(\frac{3}{2017}\right) + f\left(\frac{4}{2017}\right) + ... + f\left(\frac{2013}{2017}\right) + f\left(\frac{2014}{2017}\right) + f\left(\frac{2015}{2017}\right) + f\left(\frac{2016}{2017}\right)$$

$$= \left[f\left(\frac{1}{2017}\right) + f\left(\frac{2016}{2017}\right)\right] + \left[f\left(\frac{2}{2017}\right) + f\left(\frac{2015}{2017}\right)\right] + ... + \left[f\left(\frac{1008}{2017}\right) + f\left(\frac{1009}{2017}\right)\right]$$

$$= \left[f\left(\frac{1}{2017}\right) + f\left(\frac{2017-1}{2017}\right)\right] + \left[f\left(\frac{2}{2017}\right) + f\left(\frac{2017-2}{2017}\right)\right] + ... + \left[f\left(\frac{1008}{2017}\right) + f\left(\frac{2017-1008}{2017}\right)\right]$$

$$= \left[f\left(\frac{1}{2017}\right) + f\left(1-\frac{1}{2017}\right)\right] + \left[f\left(\frac{2}{2017}\right) + f\left(1-\frac{2}{2017}\right)\right] + ... + \left[f\left(\frac{1008}{2017}\right) + f\left(1-\frac{1008}{2017}\right)\right]$$

$= 1 + 1 + ... + (1008)$ વખત ((1) પરથી)

$= 1008$ **જવાબ :** (B)

(26) જો $f(x) = (a-x^n)^{\frac{1}{n}}$ $0 < x < a^{\frac{1}{n}}$, $a > 0$ હોય, તો $f(f(x)) + f\left(f\left(\frac{1}{x}\right)\right)$ ....

(A) = 10 (B) ≤ 0 (C) ≥ 2 (D) < 2

ઉકેલ : અહીં $f(x) = (a-x^n)^{\frac{1}{n}}$, $a > 0$, $0 < x < a^{\frac{1}{n}}$ આપેલ છે.

$$\therefore (fof)(x) = f(f(x)) = f\left[(a-x^n)^{\frac{1}{n}}\right]$$

$$= \left[a-\left\{(a-x^n)^{\frac{1}{n}}\right\}^n\right]^{\frac{1}{n}}$$

$$= \left[a-\left\{a-x^n\right\}\right]^{\frac{1}{n}} = \left(a-a+x^n\right)^{\frac{1}{n}} = \left(x^n\right)^{\frac{1}{n}} = x$$ મળે.

$\therefore f\left(f\left(\frac{1}{x}\right)\right) = \frac{1}{x}$ થાય. (ઉપર પ્રમાણે)

$\therefore f(f(x)) + f\left(f\left(\frac{1}{x}\right)\right) = x + \frac{1}{x} = \left(\sqrt{x}-\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^2 + 2 \ge 2$ **જવાબ :** (C)

(27) $f : R \to R, f(x) = x - 1$ હોય તો $\{f^{-1}(-2)\} \cup \{f^{-1}(17)\} =$ ......

(A) $\emptyset$ (B) $\{-1, 18\}$ (C) $\{0\}$ (D) $\{\pm 2\sqrt{3}\}$

ઉકેલ : હવે $f : A \to B, f(x) = y \Rightarrow x = f^{-1}(y)$ પરથી,

જો $f(x) = -2$ હોય, તો $x = f^{-1}(-2)$ તથા જો $f(x) = 17$ હોય તો $x = f^{-1}(17)$ મળે.

જો $f(x) = -2$ તો, $x - 1 = -2$. આથી $x = -1$

$\therefore f^{-1}(-2) = -1$

જો $f(x) = 17$ તો, $x - 1 = 17$. આથી $x = 18$

$\therefore f^{-1}(17) = 18$

$\therefore \{f^{-1}(-2)\} \cup \{f^{-1}(17)\} = \{-1, 18\}$ **જવાબ :** (B)

(28) $f : R \to R, f(x) = \frac{e^{|x|}-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}$ એ ......

(A) એક-એક અને વ્યાપ્ત વિધેય છે. (B) એક-એક વિધેય છે, પરંતુ વ્યાપ્ત વિધેય નથી.

(C) એક-એક વિધેય નથી, પરંતુ વ્યાપ્ત વિધેય છે. (D) એક-એક પણ નથી તથા વ્યાપ્ત વિધેય નથી.

ઉકેલ : અહીં $f(-1) = \frac{e-e^{-(-1)}}{e^{-1}+e} = \frac{e-e}{e+\frac{1}{e}} = 0$ તથા $f(-2) = \frac{e^2-e^2}{e^{-2}+e^2} = 0$

આમ, $-1 \neq -2$, પરંતુ $f(-1) = f(-2)$. આથી f એક-એક વિધેય નથી.

હવે, $x \geq 0$ લેતાં, $f(x) = \dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$ મળે.

જો $f(x) = 1$ લઈએ, તો (i) $x > 0 \Rightarrow e^x - e^{-x} = e^x + e^{-x}$

$\therefore 2e^{-x} = 0$ મળે, જે શક્ય નથી.

(ii) $x < 0 \Rightarrow e^{-x} - e^{-x} = e^x + e^{-x}$ પરથી, $e^x + e^{-x} = 0$ જે શક્ય નથી.

$\therefore f(x) \neq 1$

આમ, વિસ્તાર R ન હોવાથી, વિધેય f વ્યાપ્ત વિધેય નથી.

ટૂંકમાં, આપેલ વિધેય f એક-એક પણ નથી તથા વ્યાપ્ત પણ નથી. **જવાબ :** (D)

(29) વિધેય $f : A \to [1, \infty)$; $f(x) = 1 + x^3$ એ એક-એક વિધેય હોય, તો A = ... શક્ય બને.

(A) R^+ (B) R (C) $[0, \infty)$ (D) $[1, \infty)$

ઉકેલ : અહીં $f(x) = 1 + x^3$ નો સહપ્રદેશ $[1, \infty)$ છે.

એટલે કે, $f(x) \geq 1$ છે. આથી $1 + x^3 \geq 1$

$\therefore x^3 \geq 0$ આથી $x \geq 0$

$\therefore x \in [0, \infty)$ થાય.

હવે $\forall x_1, x_2 \in [0, \infty)$ માટે,

ધારો કે $f(x_1) = f(x_2)$

$\therefore x_1^3 = x_2^3$. તેથી $x_1 = x_2$

$\therefore f$ એક-એક વિધેય થાય.

આથી, $x \in [0, \infty)$ હોય, તો f એક-એક વિધેય બને. **જવાબ :** (C)

(30) $f(x) = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$ તથા $f(g(x)) = x$ હોય, તો $g\left(\dfrac{e^{2016} - 1}{2e^{1008}}\right) = ...$

(A) 2016 (B) 1008 (C) 504 (D) 252

ઉકેલ : $f(g(x)) = x$ આપેલ છે.

$\therefore \dfrac{e^{g(x)} - e^{-g(x)}}{2} = x$

$\therefore e^{g(x)} - e^{-g(x)} = 2x$ (1)

વળી, $(e^{g(x)} + e^{-g(x)})^2 = (e^{g(x)} - e^{-g(x)})^2 + 4 = (2x)^2 + 4 = 4(x^2 + 1)$

$\therefore e^{g(x)} + e^{-g(x)} = 2\sqrt{x^2 + 1}$ $(e^{g(x)} > 0 \Rightarrow e^{-g(x)} > 0)$ (2)

હવે (1) તથા (2) પરથી, $2e^{g(x)} = 2x + 2\sqrt{x^2 + 1}$

$\therefore e^{g(x)} = x + \sqrt{x^2 + 1}$

$\therefore$ $g(x) = \log_e (x + \sqrt{x^2+1})$ મળે.

હવે, $g\left(\frac{e^{2016}-1}{2e^{1008}}\right) = g\left(\frac{e^{1008}-e^{-1008}}{2}\right)$ (3)

$= \log_e \left(\frac{e^{1008}-e^{-1008}}{2} + \sqrt{\left(\frac{e^{1008}-e^{-1008}}{2}\right)^2+1}\right)$

$= \log_e \left(\frac{e^{1008}-e^{-1008}}{2} + \frac{e^{1008}+e^{-1008}}{2}\right)$

$= \log_e (e^{1008})$

$= 1008$

નોંધ : g એ f નું પ્રતિવિધેય છે. (2) પરથી $g(f(1008)) = 1008$ **જવાબ :** (B)

(31) જો $e^{f(x)} = \frac{10+x}{10-x}$; $x \in (-10, 10)$ તથા $f(x) = kf\left(\frac{200x}{100+x^2}\right)$ હોય, તો $k = ...,\ x \neq 0$

(A) $\frac{4}{5}$ (B) $\frac{7}{10}$ (C) $\frac{3}{5}$ (D) $\frac{1}{2}$

ઉકેલ : $e^{f(x)} = \frac{10+x}{10-x}$; $x \in (-10, 10)$ આપેલ છે.

$\therefore f(x) = \log_e \left(\frac{10+x}{10-x}\right)$ (1)

$\therefore f\left(\frac{200x}{100+x^2}\right) = \log_e \left(\frac{10+\frac{200x}{100+x^2}}{10-\frac{200x}{100+x^2}}\right)$

$= \log_e \left(\frac{1000+10x^2+200x}{1000+10x^2-200x}\right)$

$= \log_e \left(\frac{x^2+20x+100}{x^2-20x+100}\right)$

$= \log_e \left(\frac{x+10}{-x+10}\right)^2$

$= 2 \log_e \left(\frac{10+x}{10-x}\right)$ $(-10 < x < 10)$

$= 2f(x)$ ((1) પરથી) (2)

વળી, $f(x) = kf\left(\frac{200x}{100+x^2}\right)$ આપેલ છે.

$\therefore\ f(x) = k\ (2f(x))$ ((2) પરથી)

$\therefore\ 2k = 1$

$\therefore\ k = \frac{1}{2}$ **જવાબ :** (D)

(32) $f : R \to R, f(x) = \frac{x-[x]}{1+x-[x]}$ હોય, તો $f(x) \in$ ...... જ્યાં $[x]$ = મહત્તમ પૂર્ણાંક ભાગ વિધેય.

(A) $\left(0, \frac{1}{2}\right)$ (B) $\left[0, \frac{1}{2}\right]$ (C) $\left[0, \frac{1}{2}\right)$ (D) $\left(0, \frac{1}{2}\right]$

ઉકેલ : $[x]$ = મહત્તમ પૂર્ણાંક ભાગ વિધેય હોવાથી, $x - [x] = \{x\} = x$ નો અપૂર્ણાંક ભાગ

$\therefore\ 0 \le x - [x] < 1$

$\therefore\ x - [x] \le 2\ (x - [x]) < 1 + x - [x]$ ($x - [x]$ દરેક બાજુ ઉમેરતાં)

$\therefore\ 0 \le x - [x] \le 2\ (x - [x]) < 1 + x - [x]$

$\therefore\ 0 \le 2\ (x - [x]) < 1 + x - [x]$

$\therefore\ 0 \le x - [x] < \frac{1+x-[x]}{2}$

$\therefore\ 0 \le \frac{x-[x]}{1+x-[x]} < \frac{1}{2}$

$\therefore\ 0 \le f(x) < \frac{1}{2}$

આમ, $f(x) \in \left[0, \frac{1}{2}\right)$ **જવાબ :** (C)

(33) જો $[x]$ એ મહત્તમ પૂર્ણાંક ભાગ વિધેય હોય અને $\{x\} = x - [x]$ હોય, તો $f(x) = [x] + \sum_{r=1}^{1000} \frac{\{x+r\}}{1000}$ = ...

(A) $\frac{1}{x}$ (B) x^2 (C) $-x$ (D) x

ઉકેલ : $f(x) = [x] + \sum_{r=1}^{1000} \frac{\{x+r\}}{1000}$

$= [x] + \sum_{r=1}^{1000} \frac{(x+r)-[x+r]}{1000}$ ($\{x\} = x - [x]$)

$= [x] + \sum_{r=1}^{1000} \frac{(x+r-[x]-r)}{1000}$

$= [x] + \frac{1}{1000} \sum_{r=1}^{1000} (x-[x])$

$= [x] + \frac{1}{1000} (x - [x]) \sum_{r=1}^{1000} 1$

$= [x] + (x - [x]) \left[\frac{1}{1000}.(1+1+1+....1000 \text{ વખત})\right] = [x] + x - [x] = x$ **જવાબ :** (D)

(34) $f : R \to \{y \mid |y|<1, y \in R\}$, $f(x) = \frac{10^x - 10^{-x}}{10^x + 10^{-x}}$ હોય, તો $f^{-1}(x) =$ ......(સ્વીકારી લો કે f^{-1} નું અસ્તિત્વ છે.)

(A) $\frac{1}{2} \log_{10} \left(\frac{1+x}{1-x}\right)$ (B) $\log_{10} (2-x)$ (C) $\frac{1}{2} \log_{10} (2x-1)$ (D) $\frac{1}{4} \log_{10} \left(\frac{2x}{2-x}\right)$

ઉકેલ : અહીં, $f : R \to \{y \mid |y|<1, y \in R\}$; $\forall x, x \in R$, $f(x) = \frac{10^x - 10^{-x}}{10^x + 10^{-x}}$ આપેલ છે.

$f(x) = \frac{10^x - 10^{-x}}{10^x + 10^{-x}} = y$ લેતાં,

$\therefore \frac{10^x - 10^{-x} + 10^x + 10^{-x}}{10^x + 10^{-x} - 10^x + 10^{-x}} = \frac{1+y}{1-y}$

$\therefore \frac{2(10^x)}{2(10^{-x})} = \frac{1+y}{1-y}$. આથી $10^{2x} = \frac{1+y}{1-y}$, $|y| < 1$.

$\therefore 2x = \log_{10} \left(\frac{1+y}{1-y}\right)$

$\therefore x = \frac{1}{2} \log_{10} \left(\frac{1+y}{1-y}\right)$

$\therefore \forall y, |y| < 1, f(x) = y \Rightarrow x = f^{-1}(y)$

$\therefore f^{-1} : \{y \mid |y|<1, y \in R\} \to R, f^{-1}(y) = \frac{1}{2} \log_{10} \left(\frac{1+y}{1-y}\right)$

$\therefore f^{-1}(x) = \frac{1}{2} \log_{10} \left(\frac{1+x}{1-x}\right)$ **જવાબ :** (A)

(35) વિધેય $f : A \to R$, $f(x) = \log_{\frac{x-2}{x+3}} 2$ તથા $g : B \to R$, $g(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2-9}}$ હોય, તો x ની કઈ કિંમતો માટે વિધેય $\frac{f}{g}$ અસ્તિત્વ ધરાવે ?

(A) $(-3, 2)$ (B) $(-\infty, -3) \cup (3, \infty)$ (C) $[-3, -2]$ (D) $[2, 3]$

ઉકેલ : $f(x) = \log_{\frac{x-2}{x+3}} 2 = \dfrac{\log 2}{\log\left(\dfrac{x-2}{x+3}\right)}$

હવે log વિધેયના અસ્તિત્વ માટે, $\dfrac{x-2}{x+3} > 0$ જરૂરી છે.

$\therefore x > 2$ હોય અથવા $x < -3$ હોય, તો $\dfrac{x-2}{x+3} > 0$ મળે.

$\therefore D_f = (-\infty, -3) \cup (2, \infty)$

વળી, $g(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2-9}}$ ના અસ્તિત્વ માટે, $x^2 - 9 > 0$ જરૂરી છે.

$\therefore x^2 > 9$ એટલે કે, $|x| > 3$

$\therefore x \in (-\infty, -3) \cup (3, \infty)$

$\therefore D_f \cap D_g = (-\infty, -3) \cup (3, \infty)$ **જવાબ :** (B)

(36) બહુપદી વિધેય $f(x) = x^n + 1$ માટે જો $f(12) = 1729$ હોય, તો $f(15) =$ ......, $x \in R$

(A) 1001 (B) 2075 (C) 3357 (D) 3376

ઉકેલ : $f(x) = x^n + 1$ લેતાં, $f(12) = 12^n + 1 = 1729$

$\therefore f(12) = 12^n = 1728 = (12)^3$

$\therefore n = 3$ મળે.

$\therefore f(x) = x^3 + 1$ મળે.

$x = 15$ લેતાં, $f(15) = (15)^3 + 1 = 3376$ મળે. **જવાબ :** (D)

(37) વિધેય $f : R \to R$, $f(x) = x^2 + 5x + 9$ નું પ્રતિવિધેય અસ્તિત્વ ધરાવે, તો $f^{-1}(5) =$ ......

(A) 1 કે 4 (B) –1 કે –4 (C) 0 કે 5 (D) અસ્તિત્વ નથી.

ઉકેલ : અહીં $f(x) = x^2 + 5x + 9$ માટે,

$f(0) = 9 = f(-5)$

$\therefore f$ એ એક-એક વિધેય નથી.

$\therefore f^{-1}$ અસ્તિત્વ ન ધરાવે.

$\therefore f^{-1}(5)$ નું અસ્તિત્વ નથી.

નોંધ : જો $a \in f^{-1}(\{5\})$ શોધવાનો હોય તો, આપણે $\{a \mid f(a) \in \{5\}, a \in D_f\}$ શોધીશું, ત્યારબાદ એવો a શોધીશું કે, $a \in f^{-1}(\{5\})$ મળે.

હવે, $x^2 + 5x + 4 = 0$. આથી $x = -4$ અથવા -1 મળે. આથી $a = -4$ અથવા -1 **જવાબ :** (D)

(38) વિધેય $f(x) = \log_4 [\log_5 \{\log_3 (18x - x^2 - 77\}]$ નો મહત્તમ પ્રદેશ ...... મળે.

(A) (4, 5) (B) (0, 10) (C) (8, 10) (D) (10, 12)

ઉકેલ : $f(x) = \log_4 [\log_5 \{\log_3 (18x - x^2 - 77\}]$ આપેલ છે.

log વિધેયનો પ્રદેશ R^+ હોવાથી, $\log_5 \{\log_3 (18x - x^2 - 77)\} > 0$ જોઈએ.

$\therefore \log_3 (-x^2 + 18x - 77) > 5^\circ = 1$

$\therefore -x^2 + 18x - 77 > 3$

$\therefore x^2 - 18x + 77 < -3$

$\therefore x^2 - 18x + 80 < 0$

$\therefore (x - 8)(x - 10) < 0$

$\therefore (x - 8) < 0$ તથા $(x - 10) > 0$ હોય અથવા $(x - 8) > 0$ અને $(x - 10) < 0$

હોય, તો જ $(x - 8)(x - 10) < 0$ મળે.

$\therefore$ (i) $x < 8$ તથા $x > 10$ મળે અથવા (ii) $x > 8$ તથા $x < 10$ મળે.

પરંતુ $x < 8$ તથા $x > 10$ શક્ય નથી.

$\therefore x \in (8, 10)$ માટે $f(x)$ વ્યાખ્યાયિત થાય. **જવાબ :** (C)

(39) વિધેય $f(x) = 9^x - 3^x + 1$ નો વિસ્તાર .... હોય.

(A) $(-\infty, \infty)$ (B) $(0, \infty)$ (C) $(-\infty, 0)$ (D) $\left[\frac{3}{4}, \infty\right)$

ઉકેલ : $f(x) = 9^x - 3^x + 1 = (3^2)^x - 3^x + 1 = (3^x)^2 - 3^x + 1$

$$= \left(3^x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} \geq \frac{3}{4}$$

$$3^x = \frac{1}{2} \text{ માટે, } f(x) = \frac{3}{4}$$

$$\therefore R_f = \left[\frac{3}{4}, \infty\right)$$

બીજી રીત :

દ્વિઘાત વિધેય $f(x) = (3^x)^2 - 3^x + 1$ માટે, $a = 1 = c$, $b = -1$

$R_f = \{y \mid y \geq \frac{4ac - b^2}{4a}; y \in R\} = \{y \mid y \geq \frac{4-1}{4}; y \in R\} = \{y \mid y \geq \frac{3}{4}; y \in R\}$ છે.

નોંધ : $f(x) = 3^x$ નો વિસ્તાર R^+ છે, $3^x = \frac{-b}{2a} = \frac{1}{2}$ માટે, $f(x) = \frac{3}{4}$ થાય. **જવાબ :** (D)

(40) જો $f : R \rightarrow R$, $f(x) = \sin x$ અને $g : (1, \infty) \rightarrow R$, $g(x) = \sqrt{x^2-1}$ હોય, તો $(gof)(x) =$ ...... (IIT 1996)

(A) $\sin\sqrt{x^2-1}$ (B) $\sqrt{\sin(x^2-1)}$ (C) $\cos x$ (D) અવ્યાખ્યાયિત

ઉકેલ : અહીં $\sin x \in [-1, 1]$ હોવાથી, $R_f = [-1, 1]$

$Dg = (1, \infty)$

$\therefore R_f \not\subset D_g$

$\therefore$ gof અસ્તિત્વ ધરાવતું નથી.

$\therefore (gof)(x)$ અવ્યાખ્યાયિત થાય. **જવાબ :** (D)

(41) જો $f(x) = \sin^2 x + \sin^2\left(x+\frac{\pi}{3}\right) + \cos x \cdot \cos\left(x+\frac{\pi}{3}\right)$ તથા $g\left(\frac{5}{4}\right) = 1$ હોય તો $(gof)(x) =$ ......

(IIT 1996)

(A) 1 (B) $\frac{5}{4}$ (C) $\frac{4}{5}$ (D) અવ્યાખ્યાયિત

ઉકેલ : અહીં $f(x) = \sin^2 x + \sin^2\left(x+\frac{\pi}{3}\right) + \cos\left(x+\frac{\pi}{3}\right)\cos x$

$= \sin^2 x + \sin^2\left(x+\frac{\pi}{3}\right) + \frac{1}{2}\left[2\cos\left(x+\frac{\pi}{3}\right)\cos x\right]$

$= \sin^2 x + \sin^2\left(x+\frac{\pi}{3}\right) + \frac{1}{2}\left[\cos\left(2x+\frac{\pi}{3}\right) + \cos\frac{\pi}{3}\right]$

$= 1 - \cos^2 x + \sin^2\left(x+\frac{\pi}{3}\right) + \frac{1}{2}\cos\left(2x+\frac{\pi}{3}\right) + \frac{1}{2}\cos\frac{\pi}{3}$

$= 1 - \left(\cos^2 x - \sin^2\left(x+\frac{\pi}{3}\right)\right) + \frac{1}{2}\cos\left(2x+\frac{\pi}{3}\right) + \frac{1}{4}$

$= 1 - \left(\cos\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right) + \frac{1}{2}\cos\left(2x+\frac{\pi}{3}\right) + \frac{1}{4}$

$= 1 - \frac{1}{2}\cos\left(2x+\frac{\pi}{3}\right) + \frac{1}{2}\cos\left(2x+\frac{\pi}{3}\right) + \frac{1}{4}$ $(\cos(-\theta) = \cos\theta)$

$= 1 + \frac{1}{4} = \frac{5}{4}$

$\therefore (gof)(x) = g(f(x)) = g\left(\frac{5}{4}\right) = 1$ **જવાબ :** (A)

(42) વાસ્તવિક વિધેય $\sqrt{\log_3\left(\frac{x^2-3x}{4}\right)}$ નો પ્રદેશ ...... છે. (IIT : 1997)

(A) $(-1, 4)$ (B) $[-1, 4]$ (C) $(-\infty, -1] \cup [4, \infty)$ (D) $(-\infty, -1) \cup (4, \infty)$

ઉકેલ : વાસ્તવિક વિધેય માટે $\forall\ x \in R$,

$\log_3\left(\frac{x^2-3x}{4}\right) \geq 0$ હોવું જોઈએ. (log વિધેયનો પ્રદેશ R^+ છે.)

$\therefore \frac{x^2-3x}{4} \geq 3^0 = 1$

$\therefore x^2 - 3x - 4 \geq 0$

$\therefore (x-4)(x+1) \geq 0$

$\therefore x \leq -1$ અથવા $x \geq 4$ હોય, તો $(x-4)(x+1) \geq 0$ થાય.

આથી $x \in (-\infty, -1] \cup [4, \infty)$ મળે. **જવાબ :** (C)

(43) જો $f : R - \{-3\} \to R - \{1\}$ પર વ્યાખ્યાયિત વિધેય, $f(x) = \frac{x+2}{x+3}$ નું પ્રતિવિધેય અસ્તિત્વ ધરાવે, તો

$x \in$......... માટે, $f^{-1}(x) > 0$ મળે.

(A) $\left(-\infty, \frac{2}{3}\right)$ (B) $\left(\frac{2}{3}, 1\right)$ (C) $(1, \infty)$ (D) શક્ય નથી.

.**ઉકેલ :** અહીં $f(x) = \frac{x+2}{x+3}$ માટે,

$\forall x_1, x_2 \in R - \{-3\}, f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow \frac{x_1+2}{x_1+3} = \frac{x_2+2}{x_2+3}$

$\therefore\ x_1x_2 + 3x_1 + 2x_2 + 6 = x_1x_2 + 2x_1 + 3x_2 + 6$

$\therefore x_1 = x_2$

$\therefore\ f$ એક એક વિધેય છે.

વળી $\forall y,\ y \in R-\{1\}$, $x = \frac{3y-2}{1-y} \in R - \{-3\}$, એવો મળે કે જેથી

$$f\left(\frac{3y-2}{1-y}\right) = \frac{\frac{3y-2}{1-y}+2}{\frac{3y-2}{1-y}+3} = \frac{3y-2+2-2y}{3y-2+3-3y} = y$$

$\therefore\ f$ વ્યાપ્ત વિધેય છે.

$\therefore\ f^{-1}$ અસ્તિત્વ ધરાવે છે.

$\forall x,\ f(x) = y \Rightarrow x = f^{-1}(y)$

$\therefore f^{-1}(y) = \frac{3y-2}{1-y} \Rightarrow f^{-1}(x) = \frac{3x-2}{1-x},\ x \neq 1$

હવે $f^{-1}(x) > 0$ હોવાથી, $\frac{3x-2}{1-x} > 0$

આ ત્યારે જ સત્ય બને જો $x > \frac{2}{3}$ તથા $x < 1$ હોય

$\therefore \quad x \in \left(\frac{2}{3}, 1\right)$ માટે $f^{-1}(x) > 0$ મળે **જવાબ :** (B)

(44) $\{-2, 2\} \to \{1, 3\}$ પર એક-એક સંગતતા ધરાવતા બે ભિન્ન સુરેખ વિધેયો નીચેનામાંથી કયા હોઈ શકે ?

(A) $y = \pm x + 4$ (B) $y = \pm \frac{x}{2} + 2$ (C) $y = x \pm 2$ (D) $y = \pm x \pm 2$

ઉકેલ : ધારો કે બે સુરેખ વિધેયો $y = ax + b$ તથા $y = cx + d$ છે.

$x = -2$ હોય ત્યારે $y = 1$ તથા $x = 2$ હોય ત્યારે $y = 3$ લેતાં,

$1 = -2a + b$ તથા $3 = 2a + b$ મળે.

આથી, $-2a + b = 1$ તથા $2a + b = 3$ સમીકરણોમાં a નો લોપ કરતાં, $2b = 4$.

આથી $b = 2$ મળે.

$b = 2$ સમીકરણ $2a + b = 3$માં મૂકતાં, $2a = 1$; $a = \frac{1}{2}$ મળે.

$\therefore y = \frac{1}{2}x + 2$ એક વિધેય મળે.

આ જ રીતે, $x = -2$ હોય ત્યારે $y = 3$ તથા $x = 2$ હોય ત્યારે $y = 1$ લેતાં, $y = cx + d$ પરથી,

$3 = -2c + d$ તેમજ $1 = 2c + d$ મળે.

$\therefore 2d = 4$

$\therefore d = 2$ મળે, તેમજ $2c = -1$ પરથી, $c = -\frac{1}{2}$ મળે.

$\therefore y = -\frac{1}{2}x + 2$

$y = \pm \frac{x}{2} + 2$ સુરેખ વિધેયો અસ્તિત્વ ધરાવે. **જવાબ :** (B)

નોંધ : (A) માં $x = 2 \Rightarrow y = 6$ અથવા 2 થાય જે શક્ય નથી. (B)માં $x = \pm 2$ લેતાં $y = 1$ તથા $y = 3$ મળે. (C) પણ શક્ય નથી. (D) પણ શક્ય નથી.

(45) $f : [-1, \infty)$ પર $f(x) = (x + 1)^2 - 1$ દ્વારા વ્યાખ્યાયિત વિધેય માટે જો $S = \{x \mid f(x) = f^{-1}(x)\}$ હોય, તો $x = ...$ મળે.

(A) $\left\{0, -1, \frac{-\sqrt{3}+\sqrt{31}}{2}, \frac{-\sqrt{3}-\sqrt{31}}{2}\right\}$ (B) $\{0, 1, -1\}$ (C) $\{0, -1\}$ (D) $\emptyset$

(IIT : 1995)

ઉકેલ : $x_1, x_2 \in R$ માટે, જો $f(x_1) = f(x_2)$ લઈએ, તો

$(x_1 + 1)^2 - 1 = (x_2 + 1)^2 - 1$ (જ્યાં $x_1, x_2 \geq -1$)

$\therefore (x_1 + 1)^2 = (x_2 + 1)^2$

$\therefore x_1 + 1 = x_2 + 1$ અથવા $x_1 + 1 = -x_2 - 1$

$\therefore x_1 = x_2$ અથવા $x_1 + x_2 = -2$ પરંતુ $x_1, x_2 \geq -1$ હોવાથી $x_1 + x_2 = -2$ થવા માટે, $x_1 = x_2 = -1$ મળે.

આમ, $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$ હોવાથી, f એક-એક વિધેય છે.

હવે, $\forall y, y \geq -1, f(x) = (x + 1)^2 - 1 = y$ લેતાં,

$(x + 1)^2 = y + 1$

$\therefore x + 1 = \sqrt{y+1}$ $(x \geq -1)$

$\therefore x = -1 + \sqrt{y+1}$ મળે. (1)

$\therefore f(x) = f(-1 + \sqrt{y+1}) = [-1 + \sqrt{(y+1)} + 1]^2 - 1 = y$

આમ, f વ્યાપ્ત વિધેય હોવાથી, $f^{-1}(x)$ અસ્તિત્વ ધરાવે.

હવે, $f(x) = f^{-1}(x)$ હોવાથી,

$(x + 1)^2 - 1 = -1 + \sqrt{x+1}$ $(f(x) = y \Rightarrow x = f^{-1}(y))$

$\therefore (x + 1)^2 = \sqrt{x+1}$

$\therefore (x + 1)^2 - \sqrt{x+1} = 0$

$\therefore \sqrt{x+1}\left[(x+1)^{\frac{3}{2}} - 1\right] = 0$

$\therefore \sqrt{x+1} = 0$ અથવા $(x+1)^{\frac{3}{2}} = 1$

$\therefore x + 1 = 0$ અથવા $(x + 1)^3 = 1 \Rightarrow x = 0$

આમ $x = 0$ અથવા -1 મળે.

$S = \{x \mid f(x) = f^{-1}(x)\}$ હોય, તો $S = \{0, -1\}$ મળે. **જવાબ :** (C)

(46) જો $g(f(x)) = |\sin x|$ તથા $f(g(x)) = (\sin \sqrt{x})^2$ હોય, તો ...... (IIT : 1998)

(A) $f(x) = \sin^2 x,\ g(x) = \sqrt{x}$ (B) $f(x) = \sin x,\ g(x) = |x|$

(C) $f(x) = x^2,\ g(x) = \sin\sqrt{x}$ (D) f અને g નિશ્ચિત ન કરી શકાય.

ઉકેલ : વિકલ્પ (A) માટે, $f(x) = sin^2x$ તથા $g(x) = \sqrt{x}$ પરથી,

$f(g(x)) = f(\sqrt{x}) = sin^2\sqrt{x} = (sin\ \sqrt{x})^2$ તથા $g(f(x)) = g(sin^2 x) = \sqrt{sin^2 x} = |sin\ x|$

આમ, આપેલ બંને સંયોજિત વિધેય વિકલ્પ (A) માટે યથાર્થ છે. **જવાબ :** (A)

(47) $f: [1, \infty) \rightarrow [1, \infty)$ $f(x) = 2^{x(x-1)}$ હોય, તો $f^{-1}(x) = ...$ (IIT : 1999)

(A) $\sqrt{1+4\log_2 x}$ (B) $1 + \sqrt{4\log_2 x}$

(C) $\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{1+4\log_2 x}$ (D) અસ્તિત્વ ધરાવતું નથી

ઉકેલ : અહીં $f(x) = 2^{x(x-1)} = 2^{x^2-x}$ નું x પ્રત્યે વિકલન કરતાં,

$f'(x) = 2^{x^2-x} \log_e 2\ (2x - 1)$

વળી, $\log_e 2 > 0$. આથી $2^{x(x-1)} \log_e 2 > 0$ મળે.

હવે, $x \geq 1$ હોવાથી, $2x \geq 2$

$\therefore 2x - 1 \geq 1 > 0$ મળે.

$f'(x) = 2^{x(x-1)} \quad \log_e 2 \cdot (2x - 1) > 0$

$\therefore f$ એક-એક અને વ્યાપ્ત વિધેય છે.

$\therefore f^{-1}(x)$ અસ્તિત્વ ધરાવે.

હવે, $\forall x, x \in [1, \infty), f(x) = y \Rightarrow x = f^{-1}(y)$ પરથી,

$2^{x^2-x} = y > 1$ આથી, $(x^2 - x) = \log_2 y$

$\therefore x^2 - x + \frac{1}{4} = \frac{1}{4} + \log_2 y$

$\therefore \left(x-\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4} + \log_2 y = \frac{1+4\log_2 y}{4}$

$\therefore x - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}\sqrt{1+4\log_2 y}$. આથી $x = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{1+4\log_2 y} = f^{-1}(y)$

$\therefore f^{-1}(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{1+4\log_2 x}$

નોંધ : $x > 1$ હોવાથી વર્ગમૂળ $x - \frac{1}{2}$ લીધું છે. **જવાબ :** (C)

(48) $f: [0, \infty) \rightarrow [0, 1)$ દ્વારા વ્યાખ્યાયિત વિધેય $f(x) = \frac{x}{1+x}$ હોય, તો f એ ...... (AIEEE 2002)

(A) એક-એક તથા વ્યાપ્ત વિધેય છે (B) એક-એક વિધેય છે પરંતુ વ્યાપ્ત વિધેય નથી

(C) એક-એક વિધેય નથી પરંતુ વ્યાપ્ત વિધેય છે (D) એક-એક નથી તથા વ્યાપ્ત વિધેય પણ નથી

ઉકેલ : $\forall\ x_1, x_2 \in [0, \infty)$, જો $f(x_1) = f(x_2)$ હોય, તો $\frac{x_1}{1+x_1} = \frac{x_2}{1+x_2}$

$\therefore\ x_1 + x_1x_2 = x_2 + x_1x_2$

$\therefore\ x_1 = x_2$

$\therefore\ f$ એક-એક વિધેય છે.

હવે, $\forall\ y, y \in [0, \infty)$, $\frac{x}{1+x} = y$ લેતાં,

$x = y + xy$

$\therefore\ x - xy = y \qquad \forall\ y, y \in [0, \infty)$

$\therefore\ x\,(1-y) = y$ આથી, $y \in [0, 1)$. $x = \frac{y}{1-y}$ મળે. જેથી $y = f(x)$

કોઈપણ $x \in [0, 1)$ માટે, $f(x) = \frac{x}{1+x} = 1 - \frac{1}{1+x} \neq 1$. આથી $1 \neq R_f$.

$\therefore\ R_f \neq [0, 1]$

$\therefore\ f$ વ્યાપ્ત વિધેય નથી.

f એક-એક વિધેય છે પરંતુ વ્યાપ્ત વિધેય નથી. **જવાબ :** (B)

(49) $f : N \to Z$, દ્વારા, વ્યાખ્યાયિત વિધેય $f(n) = \begin{cases} \frac{n-1}{2}, & n \text{ યુગ્મ} \\ \frac{-n}{2}, & n \text{ યુગ્મ હોય તો } f \end{cases}$ (AIEEE : 2003)

(A) એક-એક નથી તથા વ્યાપ્ત વિધેય પણ નથી. (B) એક-એક વિધેય છે પરંતુ વ્યાપ્ત વિધેય નથી.

(C) વ્યાપ્ત વિધેય છે પરંતુ એક-એક વિધેય નથી. (D) એક-એક તથા વ્યાપ્ત વિધેય છે.

ઉકેલ : $\forall\ n_1, n_2 \in N$,

(i) n_1 તથા n_2 અયુગ્મ માટે, ધારો કે $f(n_1) = f(n_2)$

$\therefore\ \frac{n_1-1}{2} = \frac{n_2-1}{2}$

$\therefore\ n_1 = n_2$

(ii) n_1 તથા n_2 યુગ્મ માટે, ધારો કે $f(n_1) = f(n_2)$

$\therefore\ \frac{-n_1}{2} = \frac{-n_2}{2}$

$\therefore\ n_1 = n_2$

(iii) હવે જોઈએ કે n_1 તથા n_2 પૈકી કોઈ એક યુગ્મ તથા અન્ય અયુગ્મ હોય, તે શક્ય નથી.

n_1 અયુગ્મ તથા n_2 યુગ્મ હોય, તો

$f(n_1) = f(n_2)$ માટે, $\frac{n_1-1}{2} = \frac{-n_2}{2}$

$\therefore$ $n_1 + n_2 = 1$ શક્ય નથી. કારણકે $n_1 + n_2 \geq 3$ $\qquad n_1, n_2 \in N$

તે જ રીતે n_1 યુગ્મ તથા n_2 અયુગ્મ પણ શક્ય નથી.

$\forall\ n_1, n_2 \in N; f(n_1) = f(n_2) \Rightarrow n_1 = n_2$

$\therefore f$ એક-એક વિધેય છે.

હવે, $\forall\ y, y \in Z$, જો y અનૃણ હોય તો, $2y+1$ અયુગ્મ હોવાથી, $f(2y+1) = \dfrac{2y+1-1}{2} = y$

તથા y ઋણ હોય તો, $2y$ યુગ્મ હોવાથી, $\dfrac{-n}{2} = y$ લેતાં, $n = -2y$ મળે. વળી $f(-2y) = -\left(\dfrac{-2y}{2}\right) = y$

આથી, 2y +1 અયુગ્મ પૂર્ણાંક હોવાથી, તથા $2y$ યુગ્મ પૂર્ણાંક હોવાથી, $f(n) = y$ થાય જ.

આથી f વ્યાપ્ત વિધેય છે.

$\therefore$ f એક-એક તથા વ્યાપ્ત વિધેય છે. **જવાબ :** (D)

(50) વિધેય $f(x) = \log\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)$ એ ...... (AIEEE : 2003)

(A) યુગ્મ કે અયુગ્મ વિધેય નથી. (B) યુગ્મ વિધેય છે.

(C) અયુગ્મ વિધેય છે. (D) આવર્તી વિધેય છે.

ઉકેલ : $\forall\ x$, $\quad f(-x) = \log\left(-x+\sqrt{(-x)^2+1}\right) = \log\left(-x+\sqrt{x^2+1}\right)$

હવે, $\quad f(x) + f(-x) = \log\left(x+\sqrt{x^2+1}\right) + \log\left(-x+\sqrt{x^2+1}\right)$

$$= \log\left\{\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)\right\}$$

$$= \log\{x^2+1-x^2\} = \log 1 = 0$$

$$\therefore f(-x) = -f(x)$$

$\therefore f$ અયુગ્મ વિધેય છે. **જવાબ :** (C)

(51) $sin^{-1}\left[\log_3\left(\frac{x}{3}\right)\right]$ નો મહત્તમ પ્રદેશ ...... છે. (AIEEE : 2003)

(A) [–1, 9] (B) [9, 1] (C) (1, 9) (D) [1, 9]

ઉકેલ : $sin^{-1} : [-1, 1] \rightarrow \left[\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ વ્યાખ્યાયિત વિધેય છે.

$\therefore \log_3\left(\frac{x}{3}\right) \in [-1, 1]$ જરૂરી છે.

$\therefore -1 \leq \log_3\left(\frac{x}{3}\right) \leq 1$ (1)

$\therefore \frac{1}{3} \leq \frac{x}{3} \leq 3$ ($\log_3$ વધતું વિધેય છે.)

$\therefore\ 1 \le x \le 9$

આમ, $x \in [1, 9]$

$\therefore\ sin^{-1}\left[\log_3\left(\frac{x}{3}\right)\right]$ નો પ્રદેશ [1, 9] મળે. **જવાબ :** (D)

(52) $f(x) = \frac{sin^{-1}(x-3)}{\sqrt{9-x^2}}$ નો મહત્તમ પ્રદેશ ...... હોય. (AIEEE 2004)

(A) [1, 2] (B) [2, 3) (C) [3, 2] (D) [2, 1]

ઉકેલ : $sin^{-1} : [-1, 1] \to \left[\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ વ્યાખ્યાયિત વિધેય હોવાથી $-1 \le x - 3 \le 1$

$\therefore\ 2 \le x \le 4$ મળે.

ધારો કે $f(x) = \frac{g(x)}{h(x)}$ લઈએ જ્યાં $g(x) = sin^{-1}(x-3)$ તથા $h(x) = \sqrt{9-x^2}$ તો

$h(x)$ હંમેશાં શૂન્યેતર વાસ્તવિક સંખ્યા મળે, તે માટે $x^2 < 9$ જરૂરી છે.

$\therefore\ -3 < x < 3$

$D_f = [2, 4] \cap (-3, 3) = [2, 3)$ મળે. **જવાબ :** (B)

(53) $f(x) = \frac{x^2+x+2}{x^2+x+1}$, $x \in R$ નો વિસ્તાર ...... હોય. (AIEEE : 2003)

(A) $(1, \infty)$ (B) $\left(1, \frac{1}{7}\right)$ (C) $\left(1, \frac{7}{3}\right]$ (D) $\left(1, \frac{7}{5}\right]$

ઉકેલ : $f(x) = \frac{x^2+x+2}{x^2+x+1} = \frac{(x^2+x+1)+1}{(x^2+x+1)}$

$$= 1 + \frac{1}{x^2+x+1}$$

$$= 1 + \frac{1}{x^2+x+\frac{1}{4}+\frac{3}{4}}$$

$$= 1 + \frac{1}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}$$

હવે $f(x)$ એ $\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}$ ન્યૂનતમ કિંમત ધારણ કરે ત્યારે મહત્તમ બને. આથી, જ્યારે $x+\frac{1}{2} = 0$ હોય, તો $f(x)$ મહત્તમ કિંમત ધારણ કરે. વળી, $\frac{1}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}} \neq 0$ આથી $f(x) > 1$ જ થાય.

$\therefore f(x) < 1 + \dfrac{1}{0+\frac{3}{4}} = 1 + \frac{4}{3} = \frac{7}{3}$

$\therefore R_f = \left(1, \frac{7}{3}\right]$ **જવાબ :** (C)

બીજી રીત : ધારો કે $\dfrac{x^2+x+2}{x^2+x+1} = y$ $\quad y \in R$

$\therefore (y-1)x^2 + (y-1)x + y - 2 = 0$ નાં વાસ્તવિક બીજ મળે.

$\therefore \Delta \geq 0$

$(y-1)^2 - 4(y-1)(y-2) \geq 0$

$\therefore y^2 - 2y + 1 - 4(y^2 - 3y + 2) \geq 0$

$\therefore -3y^2 + 10y - 7 \geq 0$

$\therefore 3y^2 - 10y + 7 \leq 0$

$\therefore (y-1)(3y-7) \leq 0$

$\therefore y \in \left(1, \frac{7}{3}\right]$ કારણ કે $y = 1$ શક્ય નથી. **જવાબ :** (C)

(54) $f(x) = sin\ x + cos\ x$; $g(x) = x^2 - 1$ હોય, તો $g(f(x))$ એ $x \in$..... માટે પ્રતિવિધેય ધરાવે. (AIEEE : 2004)

(A) $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ (B) $\left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right]$ (C) $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ (D) $[0, \pi]$

ઉકેલ : $g(f(x)) = g(sin\ x + cos\ x)$

$= (sin\ x + cos\ x)^2 - 1$

$= sin^2 x + 2sin\ x\ cos\ x + cos^2 x - 1$

$= sin\ 2x$

હવે પ્રતિવિધેય માટે $\frac{-\pi}{2} \leq 2x \leq \frac{\pi}{2}$ હોવાથી, $\frac{-\pi}{4} \leq x \leq \frac{\pi}{4}$ મળે.

$x \in \left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right]$ માટે $(gof)(x)$ પ્રતિવિધેય ધરાવે. **જવાબ :** (B)

(55) જો $S = \{(1, 3), (4, 2), (2, 4), (2, 3), (3, 1)\}$ એ ગણ $A = \{1, 2, 3, 4\}$ પરનો સંબંધ દર્શાવે તો S એ ......

(AIEEE : 2004)

(A) સ્વવાચક સંબંધ છે. (B) સંમિત સંબંધ નથી. (C) પરંપરિત સંબંધ છે. (D) કોઈ સંબંધ જ નથી.

ઉકેલ : અહીં $(4, 2) \in S$ છે તથા $(2, 4) \in S$ છે. તે જ રીતે, $(1, 3), (3, 1) \in S$ છે. પરંતુ $(2, 3) \in S$ છે, જ્યારે $(3, 2) \notin S$ હોવાથી, S સંમિત સંબંધ નથી. **જવાબ :** (B)

(56) જો S = {(3, 3), (6, 6), (9, 9), (12, 12), (6, 12), (3, 9), (3, 12), (3, 6)} એ ગણ A = {3,6, 9, 12} પરનો સંબંધ દર્શાવે તો S એ ...... (AIEEE : 2005)

(A) સામ્ય સંબંધ છે. (B) માત્ર સ્વવાચક અને સંમિત સંબંધ છે.

(C) માત્ર સ્વવાચક અને પરંપરિત સંબંધ છે. (D) માત્ર સ્વવાચક સંબંધ છે.

ઉકેલ : અહીં (3, 3), (6, 6), (9, 9), (12, 12) $\in$ S છે.

$\therefore$ $(x, x) \in$ S હોવાથી S સ્વવાચક સંબંધ છે.

વળી, (3, 6) $\in$ S છે પરંતુ (6, 3) $\notin$ S હોવાથી સંમિત સંબંધ નથી.

તેમ છતાં પણ, (3, 6) $\in$ S, (6, 12) $\in$ S $\Rightarrow$ (3, 12) $\in$ S હોવાથી S પરંપરિત સંબંધ છે. **જવાબ :** (C)

(57) $f : \mathrm{R} \to \mathrm{R},\ f(x) = \begin{cases} 0; x \text{ સંમેય} \\ x; x \text{ અસંમેય} \end{cases}$ તથા $g : \mathrm{R} \to \mathrm{R},\ g(x) = \begin{cases} 0; x \text{ અસંમેય} \\ x; x \text{ સંમેય} \end{cases}$

તો $f - g$ એ (AIEEE 2005)

(A) એક-એક વિધેય છે પરંતુ વ્યાપ્ત વિધેય નથી. (B) વ્યાપ્ત વિધેય છે પરંતુ એક-એક વિધેય નથી

(C) એક-એક તથા વ્યાપ્ત વિધેય છે. (D) એક-એક નથી તથા વ્યાપ્ત વિધેય નથી.

ઉકેલ : અહીં f તથા g બંને R પરનાં વ્યાખ્યાયિત વિધેયો છે. આથી $f - g : \mathrm{R} \to \mathrm{R}$ નું વ્યાખ્યાયિત વિધેય થાય.

$$\therefore \forall\ x, x \in \mathrm{R},\ (f-g)(x) = f(x) - g(x) = \begin{cases} 0 - x & ; x \text{ સંમેય} \\ x - 0 & ; x \text{ અસંમેય} \end{cases}$$

$$= \begin{cases} -x; & x \text{ સંમેય} \\ x\ ; & x \text{ અસંમેય} \end{cases}$$

વિકલ્પ : 1 $\forall\ x_1, x_2 \in R$, જો x_1, x_2 સંમેય સંખ્યા હોય તો,

$(f - g)(x_1) = (f - g)(x_2) \Rightarrow -x_1 = -x_2$

$\Rightarrow x_1 = x_2$

વિકલ્પ : 2 $\forall\ x_1, x_2 \in \mathrm{R}$, જો x_1 તથા x_2 બંને અસંમેય સંખ્યા હોય તો

$(f - g)(x_1) = (f - g)(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$

વિકલ્પ : 3 $\forall\ x_1, x_2 \in \mathrm{R}$, x_1 સંમેય સંખ્યા હોય તથા x_2 અસંમેય સંખ્યા હોય તો $x_1 \neq \pm x_2$

(સંમેય સંખ્યા $\neq$ અસંમેય સંખ્યા)

વળી, $(f - g)(x_2) = x_2$ અસંમેય સંખ્યા છે તથા $(f - g)(x_1) = -x_1$

$\therefore x_1 \neq x_2 \Rightarrow (f - g)(x_1) \neq (f - g)(x_2)$

$\therefore (f - g)$ એક-એક વિધેય છે.

હવે, $\forall\ y, y \in \mathrm{R}$

વિકલ્પ : 1 જો y સંમેય સંખ્યા હોય, તો $-y$ પણ સંમેય છે. આથી $x = -y \in \mathrm{R}$ એવો મળે, કે

જેથી $(f - g)(-y) = -(-y) = y$

વિકલ્પ : 2 જો y અસંમેય સંખ્યા હોય, તો $x = y \in \mathrm{R}$ એવો મળે કે જેથી

$(f - g)(y) = y$

$\therefore f - g$ એ વ્યાપ્ત વિધેય છે.

ટૂંકમાં, $f - g$ એ એક-એક તથા વ્યાપ્ત વિધેય છે. **જવાબ :** (C)

(58) W એ અંગ્રેજી શબ્દકોશના શબ્દો દર્શાવે છે. $S = \{(x, y) \in W \times W \mid$ શબ્દો x અને y માં ઓછામાં ઓછો એક મૂળાક્ષર સામાન્ય છે$\}$ એ સંબંધ દર્શાવે તો S ...... (AIEEE : 2006)

(A) સ્વવાચક સંબંધ છે પરંતુ સંમિત નથી અને પરંપરિત છે.

(B) સ્વવાચક સંબંધ નથી પરંતુ સંમિત અને પરંપરિત છે.

(C) સ્વવાચક અને સંમિત સંબંધ છે પરંતુ પરંપરિત સંબંધ નથી.

(D) સ્વવાચક છે, સંમિત નથી અને પરંપરિત નથી.

ઉકેલ : બે સમાન શબ્દોમાં બધા મૂળાક્ષરો સામાન્ય હોવાથી, $(x, x) \in S,\ x \in W$ મળે.

$\therefore$ S સ્વવાચક સંબંધ છે.

વળી, $(x, y) \in S$ માટે, શબ્દો x તથા y માં ઓછામાં ઓછો એક મૂળાક્ષર સામાન્ય હોય, તો શબ્દો y તથા x માં પણ ઓછામાં ઓછો એક મૂળાક્ષર સામાન્ય હોય જ.

$\therefore (x, y) \in S$ હોય, તો $(y, x) \in S$ મળે જ.

$\therefore$ S સંમિત સંબંધ છે.

વળી, (and, all) $\in S$ તથા (all, love) $\in S$ લઈએ, તો (and, love) $\notin S$

કારણ કે and તથા love માં કોઈ પણ મૂળાક્ષર સામાન્ય નથી.

$\therefore$ S પરંપરિત સંબંધ નથી.

S સ્વવાચક અને સંમિત સંબંધ છે. પરંતુ પરંપરિત સંબંધ નથી. **જવાબ :** (C)

(59) જો $n(A) = 2$ તથા $n(B) = 4$ હોય, તો $A \times B$ ના ત્રણ કે તેથી વધુ ઘટકોવાળા ઉપગણની સંખ્યા ...... હોય. (JEE : 2013, 2015)

(A) 256 (B) 220 (C) 219 (D) 211

ઉકેલ : અહીં $n(A) = 2, n(B) = 4$ છે.

$\therefore n(A \times B) = n(A) \cdot n(B) = 2\ (4) = 8$

હવે, ત્રણ કે તેથી વધુ ઘટકોવાળા ઉપગણની સંખ્યા શોધવા માટે કુલ ઉપગણની સંખ્યામાંથી ત્રણથી ઓછા ઘટકોવાળા ઉપગણની સંખ્યા બાદ કરવી પડે.

$\therefore$ કુલ ઉપગણની સંખ્યા $= 2^n = 2^{n(A \times B)} = 2^{n(A) \cdot n(B)} = 2^8 = 256$

હવે શૂન્ય ઘટકવાળા ઉપગણની સંખ્યા $= \binom{8}{0} = 1$, એક ઘટકવાળા ઉપગણની સંખ્યા $= \binom{8}{1} = 8$

તથા બે ઘટકવાળા ઉપગણની સંખ્યા $= \binom{8}{2} = \frac{56}{2} = 28$

$\therefore$ ત્રણ કે તેથી વધુ ઘટકવાળા ઉપગણની સંખ્યા $= 256 - 1 - 8 - 28 = 256 - 37 = 219$ **જવાબ :** (C)

(60) $S \subset (R \times R), T \subset (R \times R)$ માટે, $S = \{(x, y) \mid y = x + 1, 0 < x < 2\}$ તથા $T = \{(x, y) \mid x - y$ એ પૂર્ણાંક છે$\}$ તો નીચેનામાંથી કયું સત્ય છે ? (AIEEE : 2008)

(A) T સામ્ય સંબંધ છે પરંતુ S સામ્ય નથી. (B) S અને T માંથી કોઈ સામ્ય સંબંધ નથી.

(C) S અને T બંને સામ્ય સંબંધ છે. (D) S સામ્ય સંબંધ છે. પરંતુ T સામ્ય નથી.

ઉકેલ : $S = \{(x, y) \mid y = x + 1, 0 < x < 2\}$ માટે,

$x = x + 1$ અશક્ય છે. આથી, $(x, x) \notin S$

$\therefore$ S સ્વવાચક નથી. આથી, S સામ્ય નથી.

હવે T = $\{(x, y) \mid x - y$ એ પૂર્ણાંક છે$\}$ માટે, $\forall\ x, x \in R$ લેતાં, $x - x = 0$ એ પૂર્ણાંક છે.

$\therefore (x, x) \in T$

વળી, $x–y$ કોઈ પૂર્ણાંક હોય, તો $y–x$ પણ કોઈ પૂર્ણાંક જ મળે. આથી, $(x, y) \in T \Rightarrow (y, x) \in T$

$\therefore$ T સંમિત છે.

હવે, $(x, y) \in T$ તથા $(y, z) \in T$ હોય, તો $x - y$ એ કોઈ પૂર્ણાંક મળે તથા $y - z$ કોઈ પૂર્ણાંક મળે.

$\therefore x - z = x - y + y - z$ પણ કોઈ પૂર્ણાંક જ થાય. આથી, $(x, z) \in T$

$\therefore$ T પરંપરિત છે.

આમ, T સામ્ય સંબંધ છે.

S સામ્ય નથી પરંતુ T સામ્ય સંબંધ છે. **જવાબ :** (A)

(61) $S = \{(x, y) \mid x, y \in R$ તથા $x = wy;\ w$ કોઈ સંમેય સંખ્યા છે$\}$ તથા

$T = \left\{\left(\frac{m}{n}, \frac{p}{q}\right) \middle|\ m, n, p, q\right.$ એવા પૂર્ણાંક છે કે જેથી $\left. qm = pn;\ n, q \neq 0\right\}$ હોય, તો નીચેનામાંથી કયું સત્ય બને ?

(AIEEE : 2010)

(A) S તથા T સામ્ય સંબંધ નથી.

(B) T સામ્ય સંબંધ છે. પરંતુ S સામ્ય સંબંધ નથી.

(C) S અને T બંને સામ્ય સંબંધ છે.

(D) S સામ્ય સંબંધ છે. પરંતુ T સામ્ય સંબંધ નથી.

ઉકેલ : $x = 0$, $y = 2$, $w = 0$ લેતાં, $0 = 0 \times 2$ થાય.

ટૂંકમાં, $(0, 2) \in S$ મળે. પરંતુ $(2, 0) \notin S$ થાય. આથી S સંમિત નથી.

$\therefore$ S સામ્ય સંબંધ નથી.

હવે, $nm = mn \Rightarrow \left(\frac{m}{n}, \frac{m}{n}\right) \in T$. આથી T સ્વવાચક છે.

$qm = pn \Rightarrow np = mq$

$\therefore \left(\frac{m}{n}, \frac{p}{q}\right) \in T \Rightarrow \left(\frac{p}{q}, \frac{m}{n}\right) \in T$. આથી T સંમિત છે.

વળી, $\left(\frac{m}{n}, \frac{p}{q}\right) \in T$ તથા $\left(\frac{p}{q}, \frac{r}{s}\right) \in T$ હોય, તો $qm = pn$ તથા $sp = rq$ પરથી, $qmsp = pnrq$

$\therefore ms = rn$ થાય. $(p, q \neq 0)$ (જો $p = 0$ તો $m = r = 0$)

$\therefore \left(\frac{m}{n}, \frac{r}{s}\right) \in T$. આથી T પરંપરિત છે.

$\therefore$ T સામ્ય સંબંધ છે.

S સામ્ય સંબંધ નથી પરંતુ T સામ્ય સંબંધ છે. **જવાબ :** (B)

(62) $A = \{1, 2, 3, 4\}$ હોય તથા સંબંધ $S : A \to A$ એ $S = \{(1, 1), (2, 3), (3, 4), (4, 2)\}$ થી વ્યાખ્યાયિત હોય, તો નીચેનામાંથી કયું વિધાન સત્ય છે ? (online : 2013)

(A) S ને વ્યસ્ત સંબંધ ન હોય.

(B) S એ એક-એક વિધેય નથી.

(C) S વ્યાપ્ત વિધેય છે.

(D) S એ વિધેય નથી.

ઉકેલ : અહીં, $R_s = \{1, 2, 3, 4\} = A$ = સહપ્રદેશ. તેથી S એ વ્યાપ્ત વિધેય છે. **જવાબ :** (C)

(63) S = {(3, 3), (5, 5), (9, 9), (12, 12), (5, 12), (3, 9), (3, 12), (3, 5)} થી વ્યાખ્યાયિત સંબંધ ગણ A = {3, 5, 9, 12} પર હોય, તો S એ ...... (online : 2013)

(A) સ્વવાચક છે પરંતુ સંમિત કે પરંપરિત નથી. (B) સંમિત તથા પરંપરિત છે પરંતુ સ્વવાચક નથી.

(C) સામ્ય સંબંધ છે. (D) સ્વવાચક તથા પરંપરિત છે પરંતુ સંમિત નથી.

ઉકેલ : અહીં, $A \to A$ પર વ્યાખ્યાયિત સંબંધ માટે, $(3, 3), (5, 5), (9, 9), (12, 12) \in S$ છે.

$\therefore$ S સ્વવાચક છે.

વળી, $(5, 12) \in S$ છે, પરંતુ $(12, 5) \notin S$. આથી S સંમિત નથી.

આ જ રીતે, $(3, 5) \in S$, $(5, 12) \in S$ લેતાં, $(3, 12) \in S$ છે.

$\therefore$ S પરંપરિત છે.

ટૂંકમાં S સ્વવાચક તથા પરંપરિત છે પરંતુ સંમિત નથી. **જવાબ :** (D)

(64) $S = \{(x, y) \mid x, y \in N$ તથા $x^2 - 4xy + 3y^2 = 0\}$ થી વ્યાખ્યાયિત સંબંધ માટે S એ ...... જ્યાં N = પ્રાકૃતિક સંખ્યાઓનો ગણ (online : 2013)

(A) સ્વવાચક છે પરંતુ સંમિત કે પરંપરિત નથી. (B) સંમિત તથા પરંપરિત છે.

(C) સ્વવાચક અને સંમિત છે. (D) સ્વવાચક તથા પરંપરિત છે.

ઉકેલ : $S = \{(x, y) \mid x, y \in N$ તથા $x^2 - 4xy + 3y^2 = 0\}$ માટે, $x^2 - 4xy + 3y^2 = 0$

$\therefore (x - y)(x - 3y) = 0$. આથી $x - y = 0$ અથવા $x - 3y = 0$

$\therefore x = y$ અથવા $x = 3y$

$\therefore x = y$ હોય, તો $(x, x) \in S$

$\therefore$ S સ્વવાચક છે.

$x = 3$ તથા $y = 1$ લેતાં, $x = 3y$ સત્ય બને.

$(3, 1) \in S$, પરંતુ $(1, 3) \notin S$ કારણ કે $x^2 - 4xy + 3y^2 = 1 - 12 + 27 \neq 0$

$\therefore$ S સંમિત નથી.

આ જ રીતે, $x = 9$, $y = 3$ લેતાં, $(9, 3) \in S$ મળે. વળી, $(3, 1) \in S$ છે જ.

પરંતુ $(9, 1) \notin S$ હોવાથી, S પરંપરિત નથી. $(81 - 36 + 3 \neq 0)$

$\therefore$ S સ્વવાચક છે, પરંતુ સંમિત કે પરંપરિત નથી. **જવાબ :** (A)

(65) વાસ્તવિક સંખ્યાઓના ગણ પર વ્યાખ્યાયિત સંબંધ એવો મળે કે જેથી $S = \{(x, y) \mid sec^2x - tan^2y = 1\}$ હોય, તો S એ ...... (online : 2014)

(A) સ્વવાચક અને સંમિત છે પરંતુ પરંપરિત નથી. (B) સ્વવાચક તથા પરંપરિત છે પરંતુ સંમિત નથી.

(C) સંમિત તથા પરંપરિત છે પરંતુ સ્વવાચક નથી. (D) સામ્ય સંબંધ છે.

ઉકેલ : આપણે જાણીએ છીએ કે $sec^2\theta - tan^2\theta = 1$ જ્યાં $\theta \in R$

$\therefore x = y$ લઈએ તો $sec^2x - tan^2x = 1$ થાય. આથી $(x, x) \in S$

$\therefore$ S સ્વવાચક છે.

વળી, ધારો કે $(x, y) \in S$. આથી $sec^2x - tan^2y = 1$

$\therefore 1 + tan^2x - (sec^2y - 1) = 1$

$\therefore$ $1 + tan^2x - sec^2y + 1 = 1$

$\therefore$ $sec^2y - tan^2x = 1$ આથી $(y, x) \in S$

આમ, $(x, y) \in S \Rightarrow (y, x) \in S$ આથી S સંમિત છે.

હવે, $(x, y) \in S$ તથા $(y, z) \in S$ લઈએ, તો $sec^2x - tan^2y = 1$ તથા $sec^2y - tan^2z = 1$

$\therefore$ $sec^2x - 1 = tan^2y$ તથા $sec^2y - 1 = tan^2z$

$\therefore$ $tan^2x = tan^2y$ તથા $tan^2y = tan^2z$

$\therefore$ $tan^2x = tan^2z$ મળે.

$\therefore$ $sec^2x - 1 = tan^2z$

$\therefore$ $sec^2x - tan^2z = 1$

$\therefore$ $(x, z) \in S$

$\therefore$ $(x, y) \in S$ અને $(y, z) \in S \Rightarrow (x, z) \in S$

$\therefore$ S પરંપરિત છે.

આમ, S સ્વવાચક, સંમિત અને પરંપરિત સંબંધ છે.

$\therefore$ S સામ્ય સંબંધ છે. **જવાબ :** (D)

(66) બે અરિક્ત ગણ X તથા Y માટે, $f : X \to Y$ એ એક-એક વિધેય છે જો $A \subset X$ તથા $B \subset Y$ માટે, $f(A) = \{f(x) \mid x \in A\}$ અને $f^{-1}(B) = \{x \in X \mid f(x) \in B\}$ હોય, તો ...... (IIT 2005)

(A) $f(f^{-1}(B)) = B$ (B) $f(f^{-1}(B)) \subset B$ (C) $f^{-1}(f(A)) = A$ (D) $f^{-1}(f(A)) \not\subset A$

ઉકેલ : અહીં $A \subset X$ તથા $B \subset Y$ છે.

ધારો કે $x \in A$. આથી $f(x) \in f(A)$

$\therefore$ $x \in f^{-1}(f(A))$

$\therefore$ $A \subset f^{-1}(f(A))$ (i)

ધારો કે $x \in f^{-1}(f(A))$

$\therefore$ $f(x) \in f(A)$

$\therefore$ $x \in A$ (f એક-એક વિધેય છે.)

$\therefore$ $f^{-1}(f(A)) \subset A$ (ii)

(i) તથા (ii) પરથી, $f^{-1}(f(A)) = A$

જવાબ : (C)

(67) જો $f : R \to S$, $f(x) = sin\, x - \sqrt{3}\, cos\, x + 1$ વ્યાપ્ત વિધેય હોય, તો S = ... (AIEEE : 2004)

(A) [–1, 3] (B) [–1, 1] (C) [0, 1] (D) [0, 3]

ઉકેલ : $sin\, x - \sqrt{3}\, cos\, x$ ને $a\, cos\, x + b\, sin\, x$ સાથે સરખાવતાં, $a = -\sqrt{3}$, b = 1 મળે.

$\therefore$ $-\sqrt{3}\, cos\, x + sin\, x$ નો વિસ્તાર $\left[-\sqrt{a^2+b^2}, \sqrt{a^2+b^2}\right]$ પરથી, $\left[-\sqrt{3+1}, \sqrt{3+1}\right] = [-2, 2]$ મળે.

$\therefore$ $-\sqrt{3}\, cos\, x + sin\, x + 1$ નો વિસ્તાર $[-2 + 1, 2 + 1] = [-1, 3]$ મળે

$\therefore$ S = [–1, 3] (f વ્યાપ્ત વિધેય છે.) **જવાબ :** (A)

(68) $f : (-1, 1) \to B$, $f(x) = tan-1 \dfrac{2x}{1-x^2}$ એ એક-એક તથા વ્યાપ્ત વિધેય હોય તો B = ... (AIEEE 2005)

(A) $\left(0, \dfrac{\pi}{2}\right)$ (B) $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$ (C) $\left[\dfrac{-\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right]$ (D) $\left(\dfrac{-\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right)$

ઉકેલ : $f(x) = tan^{-1} \dfrac{2x}{1-x^2}$, $x \in (-1, 1)$ આપેલ છે.

ધારોકે, $x = tan\ \theta$, જ્યાં $\theta \in \left(\dfrac{-\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right)$. આથી, $\theta = tan^{-1} x$

પરંતુ $x \in (-1, 1)$ હોવાથી, $\theta \in \left(\dfrac{-\pi}{4}, \dfrac{\pi}{4}\right)$ મળે.

હવે $f(x) = tan^{-1} \left(\dfrac{2tan\theta}{1-tan^2\theta}\right)$

$= tan^{-1} (tan\ 2\theta)$

વળી, $\dfrac{-\pi}{4} < \theta < \dfrac{\pi}{4}$, આથી $\dfrac{-\pi}{2} < 2\theta < \dfrac{\pi}{2}$

$\therefore f(x) = 2\theta = 2\ tan^{-1} x$

$\therefore R_f = (2\ tan^{-1} (-1), 2tan^{-1} 1) = \left(2\left(\dfrac{-\pi}{4}\right), 2\left(\dfrac{\pi}{4}\right)\right) = \left(\dfrac{-\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right)$ (tan^{-1} વિધેય છે.)

$\therefore B = \left(\dfrac{-\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right)$ મળે. **જવાબ :** (D)

(69) વિધેય $f(x) = 4^{-x^2} + cos^{-1}\left(\dfrac{x}{2}-1\right) + \log (cos\ x)$ એ ...... અંતરાલમાં વ્યાખ્યાયિત થાય. (AIEEE 2007)

(A) $(0, \pi]$ (B) $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right)$ (C) $(0, \pi)$ (D) $\left(\dfrac{-\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right)$

ઉકેલ : $\forall x \in R$, 4^{-x^2} વ્યાખ્યાયિત છે તથા log વિધેયનો પ્રદેશ R^+ હોવાથી $\cos x > 0$ જ હોય.

$\therefore x \in \left(\dfrac{-\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right)$ મળે. (વિકલ્પો અનુસાર) (1)

હવે, $cos^{-1} : [-1, 1] \to [0, \pi]$ પર વ્યાખ્યાયિત હોવાથી, $\dfrac{x}{2} - 1 \in [-1, 1]$

એટલે કે, $\dfrac{x}{2} \in [-1+1, 1+1] = [0, 2]$

$\therefore x \in [0, 4]$ મળે. (2)

આમ, $x \in [0, 4]$ તથા $x \in \left(\dfrac{-\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right)$ હોવાથી, $D_f \cap D_g$ અનુસાર $[0, 4] \cap \left(\dfrac{-\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right) = \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right)$

$\therefore x \in \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right)$ માં $f(x)$ વ્યાખ્યાયિત થાય. **જવાબ :** (B)

JEE Main તથા Advanced માં પૂછાયેલા પ્રશ્નો :
એક કરતાં વધુ વિકલ્પો સાચા હોય તેવા પ્રશ્નો

(70) જો $3^x = 4^{x-1}$ હોય, તો $x =$ ...... (Advanced 2013)

(A) $\frac{2\log_3 2}{2\log_3 2-1}$ (B) $\frac{2}{2-\log_2 3}$ (C) $\frac{1}{1-\log_4 3}$ (D) $\frac{2\log_2 3}{2\log_2 3-1}$

ઉકેલ : અહીં $3^x = 4^{x-1}$ આપેલ છે.

$\therefore \log_2 3^x = \log_2 4^{x-1}$

$\therefore x\log_2 3 = (x-1)\log_2 4$

$= (x-1)\log_2 2^2 = 2(x-1)\log_2 2 = 2(x-1) = 2x-2$

$\therefore 2 = 2x - x\log_2 3 = x(2-\log_2 3)$

$\therefore x = \frac{2}{2-\log_2 3}$ **જવાબ :** (B)

$= \frac{2}{2-\frac{1}{\log_3 2}}$

$\therefore x = \frac{2\log_3 2}{2\log_3 2-1}$ **જવાબ :** (A)

$\therefore x = \frac{\log_3 2^2}{\log_3 2^2-1} = \frac{\log_3 4}{\log_3 4-1} = \frac{1/\log_4 3}{\frac{1}{\log_4 3}-1} = \frac{1}{1-\log_4 3}$ **જવાબ :** (C)

જવાબ : (A), (B), (C)

(71) જો $f(x) = sin\left\{\frac{\pi}{6}sin\left(\frac{\pi}{2}sin\,x\right)\right\}$; $\forall\ x \in R$ તથા $g(x) = \frac{\pi}{2}\ sinx$; $\forall\ x \in R$, $(fog)(x)$ તથા $(gof)(x)$ ને અનુક્રમે $f(g(x))$ તથા $g(f(x))$ થી દર્શાવીએ તો નીચેનામાંથી શું સત્ય બને ? (Advanced : 2015)

(A) f નો વિસ્તાર $\left[\frac{-1}{2},\frac{1}{2}\right]$ છે

(B) fog નો વિસ્તાર $\left[\frac{-1}{2},\frac{1}{2}\right]$ છે

(C) $\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\pi}{6}$

(D) કોઈ $x \in R$ એવો મળે કે જેથી $(gof)(x) = 1$

ઉકેલ : $(fog)(x) = f(g(x))$

$= f\left(\frac{\pi}{2}sin\,x\right)$

$= sin\left(\frac{\pi}{6}sin\left\{\frac{\pi}{2}sin\left(\frac{\pi}{2}sin\,x\right)\right\}\right)$

હવે $-1 \le sin\,x \le 1$ હોવાથી, $-\frac{\pi}{2} \le \frac{\pi}{2}\ sin\,x \le \frac{\pi}{2}$

$\Leftrightarrow sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) \le sin\left(\frac{\pi}{2}sin\,x\right) \le sin\frac{\pi}{2}$ $(sin\uparrow)$

$\Leftrightarrow -1 \le sin\left(\frac{\pi}{2}sin\,x\right) \le 1$

$$\Leftrightarrow\ -\frac{\pi}{2} \le \frac{\pi}{2}\ sin\left(\frac{\pi}{2} sin\ x\right) \le \frac{\pi}{2}$$

$$\Leftrightarrow\ sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) \le sin\left\{\frac{\pi}{2} sin\left(\frac{\pi}{2} sin\ x\right)\right\} \le sin\left(\frac{\pi}{2}\right)$$

$$\Leftrightarrow\ -1 \le sin\left\{\frac{\pi}{2} sin\left(\frac{\pi}{2} sin\ x\right)\right\} \le 1$$

$$\Leftrightarrow\ -\frac{\pi}{6} \le \frac{\pi}{6} sin\left\{\frac{\pi}{2} sin\left(\frac{\pi}{2} sin\ x\right)\right\} \le \frac{\pi}{6}$$

$$\Leftrightarrow\ sin\left(-\frac{\pi}{6}\right) \le sin\left(\frac{\pi}{6} sin\left\{\frac{\pi}{2} sin\left(\frac{\pi}{2} sin\ x\right)\right\}\right) \le sin\frac{\pi}{6}$$

$$\Leftrightarrow\ \frac{-1}{2} \le sin\left(\frac{\pi}{6} sin\left\{\frac{\pi}{2} sin\left(\frac{\pi}{2} sin\ x\right)\right\}\right) \le \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow\ \frac{-1}{2} \le (fog)\ (x) = f(g(x)) \le \frac{1}{2}$$

$\Leftrightarrow\ R_{fog} = \left[\frac{-1}{2}, \frac{1}{2}\right]$ **જવાબ** : (B)

હવે $f(x) = sin\left(\frac{\pi}{6} sin\left(\frac{\pi}{2} sin\ x\right)\right)$ આપેલ છે.

$$-\frac{\pi}{2} \le \frac{\pi}{2} sin\ x \le \frac{\pi}{2}$$

$$\Leftrightarrow\ sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) \le sin\left(\frac{\pi}{2} sin\ x\right) \le sin\frac{\pi}{2}$$

$$\Leftrightarrow\ -1 \le sin\left(\frac{\pi}{2} sin\ x\right) \le 1$$

$$\Leftrightarrow\ -\frac{\pi}{6} \le \frac{\pi}{6}\ sin\left(\frac{\pi}{2} sin\ x\right) \le \frac{\pi}{6}$$

$$\Leftrightarrow\ sin\left(-\frac{\pi}{6}\right) \le sin\left(\frac{\pi}{6} sin\left(\frac{\pi}{2} sin\ x\right)\right) \le sin\frac{\pi}{6}$$

$$\Leftrightarrow\ \frac{-1}{2} \le f(x) \le \frac{1}{2}$$

$\Leftrightarrow\ R_f = \left[\frac{-1}{2}, \frac{1}{2}\right]$ **જવાબ** : (A)

હવે $\lim\limits_{x \to 0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x \to 0} \frac{sin\left[\frac{\pi}{6} sin\left(\frac{\pi}{2} sinx\right)\right]}{\left[\frac{\pi}{6} sin\left(\frac{\pi}{2} sinx\right)\right]} \lim\limits_{x \to 0} \frac{\frac{\pi}{6} sin\left(\frac{\pi}{2} sinx\right)}{\frac{\pi}{2} sinx}$

(જેમ $x \to 0$ તેમ $\frac{\pi}{2}\ sin\ x \to 0$ આથી $sin\left(\frac{\pi}{2} sin\ x\right) \to 0$, તેથી $\frac{\pi}{6}\ sin\left(\frac{\pi}{2} sin\ x\right) \to 0$)

$= (1) \cdot \frac{\pi}{6} \lim\limits_{x \to 0} \frac{sin\left(\frac{\pi}{2} sin\ x\right)}{\frac{\pi}{2} sin\ x} = \frac{\pi}{6}$ **જવાબ** : (C)

વળી, $\frac{\pi}{6}\ sin\left(\frac{\pi}{2} sin\ x\right) \in \left[-\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6}\right]$

$\therefore\ sin\left[\frac{\pi}{6}sin\left(\frac{\pi}{2}sin\,x\right)\right] \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$

$\therefore\ sin\left[sin\left\{\frac{\pi}{6}\,sin\left(\frac{\pi}{2}sin\,x\right)\right\}\right] \in \left[sin\left(-\frac{1}{2}\right), sin\left(\frac{1}{2}\right)\right]$

$\frac{2}{\pi} \notin \left[sin\left(-\frac{1}{2}\right), sin\left(\frac{1}{2}\right)\right]$ $\left(0 < sin\frac{1}{2} < \frac{1}{2} < \frac{2}{\pi}\right)$

$\therefore \frac{\pi}{2}\ sin\left[sin\left\{\frac{\pi}{6}\,sin\left(\frac{\pi}{2}sin\,x\right)\right\}\right] \neq 1$

જ્યાં $(gof)\,(x) = g(f(x)) = \frac{\pi}{2}\left[sin\left(sin\left\{\frac{\pi}{6}\,sin\left(\frac{\pi}{2}sin\,x\right)\right\}\right)\right]$

આથી $(gof)\,(x) = 1$ કોઈપણ $x \in R$ માટે શક્ય નથી. **જવાબ :** (A), (B), (C)

(72) જો X = {1, 2, 3, 4, 5}, Y = {1, 3, 5, 7, 9} હોય, તો નીચેનામાંથી શું સત્ય છે ?

(A) $S_1 = \{(x, a) \mid a = x + 2, x \in X, a \in Y\}$ સંબંધ દર્શાવે પરંતુ X થી Y પરનું વિધેય નથી

(B) S_2 = {(1, 1), (2, 1), (3, 3), (4, 3), (5, 5)} એ X થી Y પરનો સંબંધ દર્શાવે તથા વિધેય છે.

(C) S_3 = {(1, 1), (1, 3), (3, 5), (3, 7), (5, 7)} એ X થી Y પરનો સંબંધ દર્શાવે તથા પરંતુ વિધેય નથી.

(D) S_4 = {(1, 3), (2, 5), (4, 7), (5, 9), (3, 1)} એ X થી Y પરનો સંબંધ દર્શાવે તથા વિધેય છે.

ઉકેલ : $S_1 = \{(x, a) \mid a = x + 2, x \in X, a \in Y\}$ માટે,

$x = 1$ લેતાં, $a = 3 \in Y$ છે.

$x = 2$ લેતાં, $a = 4, 4 \notin Y$,

$x = 3$ લેતાં, $a = 5 \in Y$ છે.

$x = 4$ લેતાં, $a = 6, 6 \notin Y$,

$x = 5$ લેતાં, $a = 7, \in Y$ છે

$\therefore$ S_1 = {(1, 3), (3, 5), (5, 7)} એ X થી Y પરનો સંબંધ દર્શાવે પરંતુ X થી Y પરનું વિધેય ન દર્શાવે કારણ કે પ્રદેશ X નો ઘટક 2 એ સહપ્રદેશ Y ના કોઈ ઘટક સાથે સંગતતા ધરાવતો નથી. **જવાબ :** (A)

હવે, S_2 = {(1, 1), (2, 1), (3, 3), (4, 3), (5, 5)} માટે પ્રદેશ X નો પ્રત્યેક ઘટક સહપ્રદેશ Y ના ઘટક સાથે અનેક એક સંગતતા ધરાવે છે. આથી તે X થી Y પરના સંબંધ ઉપરાંત X થી Y પરનું વિધેય પણ છે. **જવાબ :** (B)

(1, 1), (1, 3) $\in S_3$ છે. આથી તે X થી Y પરનું વિધેય ન બને, સંબંધ શક્ય બને. **જવાબ :** (C)

વળી, S_4 = {(1, 3), (2, 5), (3, 1), (4, 7), (5, 9)} માટે X નો પ્રત્યેક ઘટક Y ના અનન્ય ઘટક સાથે સંગતતા ધરાવે છે. આથી તે સંબંધ ઉપરાંત વિધેય પણ છે. **જવાબ :** (D)

જવાબ : (A), (B), (C), (D)

(73) જો $f(x) = cos\,[\pi^2]\,x + cos\,[-\pi^2]\,x$; જ્યાં $[x]$ એ પૂર્ણાંક ભાગ વિધેય દર્શાવે છે, તો નીચેનામાંથી કયું સત્ય છે ?

(A) $f(\pi) = 1$ (B) $f(-\pi) = 0$ (C) $f\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1$ (D) $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = -1$

ઉકેલ : અહીં, $f(x) = cos\,[\pi^2]\,x + cos\,[-\pi^2]\,x$ આપેલ છે.

$9 < \pi^2 < 10$, તેથી $[\pi^2] = 9$

$-10 < -\pi^2 < -9$. તેથી $[-\pi^2] = -10$

$\therefore f(x) = cos\ 9x + cos\ (-10)x$

$\therefore f(x) = cos\ 9x + cos\ 10x$ (1)

હવે સમીકરણ (1)માં $x = \pi$ લેતાં,

$f(\pi) = cos\ 9\pi + cos\ 10\pi = -1 + 1 = 0 \neq 1$ આથી વિકલ્પ (A) સત્ય નથી.

વળી, $f(-\pi) = cos\ (-9\pi) + cos\ (-10\pi) = cos\ 9\pi + cos\ 10\pi = -1 + 1 = 0$

$\therefore$ વિકલ્પ (B) સત્ય છે.

હવે, $f\left(\frac{\pi}{4}\right) = cos\ \frac{9\pi}{4} + cos\ \frac{10\pi}{4} = cos\ \left(2\pi+\frac{\pi}{4}\right) + cos\ \frac{5\pi}{2} = \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + 0 = \frac{1}{\sqrt{2}} \neq 1$

$\therefore$ વિકલ્પ (C) સત્ય નથી.

તથા $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = cos\ \frac{9\pi}{2} + cos\ \frac{10\pi}{2} = 0 + cos\ 5\pi = 0 - 1 = -1$

$\therefore$ વિકલ્પ (D) સત્ય છે. **જવાબ :** (B), (D)

પૂર્ણાંક જવાબ આવતો હોય તેવા પ્રશ્નો

(74) કોઈ રિક્ત ગણ માટે, $n\ [P\{P\{P(P(\emptyset))\}\}] = ...$

(A) 4 (B) 8 (C) 12 (D) 16

ઉકેલ : P એ ઘાત ગણનો સંકેત છે.

$\therefore P(\emptyset) = \{\emptyset\}$

$\therefore n\ [P(\emptyset)] = 1$

$\therefore n\ [P(P(\emptyset))] = 2^1 = 2$

$\therefore n\ [P\{P(P(\emptyset))\}] = 2^2 = 4$

$\therefore n\ [P\{P\{P(P(\emptyset))\}\}] = 2^4 = 16$ **જવાબ :** (D)

(75) જો A = {1, 2, 3, 4}, B = {3, 4, 5} હોય, તો A થી B પરના એક-એક વિધેયોની સંખ્યા તથા વ્યાપ્ત વિધેયોની સંખ્યા અનુક્રમે ....અને...... મળે. જો A = {3, 4, 5}, B = {1, 2, 3, 4} હોય, તો વ્યાપ્ત વિધેયોની સંખ્યા ...... મળે.

(A) 36, 0, 0 (B) 0, 0, 36 (C) 0, 36, 0 (D) 36, 6, 0

ઉકેલ : અહીં A = {1, 2, 3, 4}. આથી $n(A) = 4 = m$ તેમજ B = {3, 4, 5}. આથી $n(B) = 3 = n$ છે.

હવે, $1 \leq n(B) \leq n\ (A)$ હોવાથી,

વ્યાપ્ત વિધેયોની સંખ્યા $= \sum_{r=1}^{n} (-1)^{n-r} \binom{n}{r} r^m$ પરથી,

$$= \sum_{r=1}^{3} (-1)^{3-r} \binom{3}{r} r^4$$ ($m = 4$, $n = 3$ હોવાથી)

$= (-1)^{3-1} \binom{3}{1} (1)^4 + (-1)^{3-2} \binom{3}{2} (2)^4 + (-1)^{3-3} \binom{3}{3} (3)^4$

$= (-1)^2 (3)(1) + (-1)(3)(16) + (-1)^0 (1)(81)$

$= 3 - 48 + 81 = 36$

એક-એક વિધેયની સંખ્યા = 0 મળે. કારણ કે A નો કોઈ એક ઘટક B ના કોઈ ઘટક સાથે એકથી વધુ વખત સંકળાય.

હવે જો A = {3, 4, 5}, B = {1, 2, 3, 4} લઈએ, તો એક-એક વિધેયની સંખ્યા ${}_4P_3 = 24$ મળે.

પરંતુ વ્યાપ્ત વિધેયની સંખ્યા = 0 થાય કારણ કે $n < m$ નથી. **જવાબ :** (C)

નિષ્કર્ષ તથા કારક પ્રકારના પ્રશ્નો

આ પ્રકારના પ્રશ્નોમાં ચાર વિકલ્પો અને બે વિધાનો હોય છે.

વિધાન 1 નિષ્કર્ષ તથા વિધાન 2 કારક કહેવાય છે. વિકલ્પો (A), (B), (C) તથા (D) નીચે પ્રમાણે હોય છે.

(A) વિધાન 1 તથા વિધાન 2 બંને સત્ય છે તથા વિધાન 2 એ વિધાન 1ની યોગ્ય સમજૂતી માટે પર્યાપ્ત છે.

(B) વિધાન 1 તથા વિધાન 2 બંને સત્ય છે તથા વિધાન 2 એ વિધાન 1ની યોગ્ય સમજૂતી માટે પર્યાપ્ત નથી.

(C) વિધાન 1 સત્ય છે તથા વિધાન 2 અસત્ય છે.

(D) વિધાન 1 અસત્ય છે તથા વિધાન 2 સત્ય છે.

(76) વાસ્તવિક વિધેય $f(x) = (x + 1)^2 - 1;\ x \geq -1,\ f(x) \geq 1$ માટે,

વિધાન : 1 $\{x \mid f(x) = f^{-1}(x)\} = \{-1, 0\}$

વિધાન : 2 f એ એક-એક તથા વ્યાપ્ત વિધેય છે તેમજ $f^{-1}(x) = \sqrt{x+1} - 1$ (AIEEE : 2008)

ઉકેલ : $(x + 1)^2 \geq 0$

$\therefore (x + 1)^2 - 1 \geq -1$

$\therefore f(x) \geq -1$. તેથી $R_f = [-1, \infty)$ ($y \geq -1$ હોય તો $x \in R$ મળે જેથી $y = f(x)$)

$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow (x_1+1)^2 - 1 = (x_2+1)^2 - 1 \Rightarrow x_1 = x_2$ $(x_1, x_2 \geq -1)$

$\therefore f$ એક-એક છે.

$R_f = [-1, \infty)$ હોવાથી f વ્યાપ્ત છે

હવે, ધારો કે $(x + 1)^2 - 1 = y$

$\therefore (x + 1) = \sqrt{y+1}$ $(x + 1 \geq 0)$

$\therefore x = \sqrt{y+1} - 1 = f^{-1}(y)$

$\therefore f^{-1}(x) = \sqrt{x+1} - 1$

$f(x) = f^{-1}(x) \Leftrightarrow (x+1)^2 - 1 = \sqrt{x+1} - 1+$

$\therefore (x+1)^2 = \sqrt{x+1}$. આથી $(x+1)^{\frac{3}{2}} = 1$ જ્યાં $x \neq -1$

$\therefore x = -1$ અથવા $x + 1 = 1$

$\therefore x = -1$ અથવા 0

$\therefore$ વિધાન 1 સત્ય છે.

$\therefore$ વિધાન 1 તથા વિધાન 2 બંને સત્ય છે તથા વિધાન 2 એ વિધાન 1ની યોગ્ય સમજૂતી માટે પર્યાપ્ત છે. **જવાબ :** (A)

(77) **વિધાન : 1** $A = \{(x, y) \in R \times R \mid y - x$ પૂર્ણાંક છે$\}$ R પરનો સામ્ય સંબંધ છે.

વિધાન : 2 $B = \{(x, y) \in R \times R \mid x = \alpha y, \alpha$ કોઈ સંમેય સંખ્યા છે$\}$ R પરનો સામ્ય સંબંધ છે. $(\alpha \neq 1)$

ઉકેલ : $A = \{(x, y) \in R \times R \mid y - x$ પૂર્ણાંક છે.$\}$

આથી $x - x = 0 \in Z$ થાય જ. આથી $(x, x) \in A$ થાય.

$\therefore$ A સ્વવાચક છે.

હવે, $y - x \in Z$ હોય, તો $x - y \in Z$ થાય જ.

$\therefore (x, y) \in A \Rightarrow (y, x) \in A$ થાય.

$\therefore$ A સંમિત છે.

વળી, $(x, y) \in$A તથા $(y, z) \in$ A હોય, તો $y - x$ કોઈ પૂર્ણાંક હોય અને $z - y$ પણ કોઈ પૂર્ણાંક હોય.

$\therefore y - x + z - y = z - x$ કોઈ પૂર્ણાંક જ થાય.

$(x, y) \in A, (y, z) \in A \Rightarrow (x, z) \in A$

$\therefore$ A પરંપરિત છે.

$\therefore$ A સામ્ય સંબંધ છે.

હવે, $B = \{(x, y) \in R \times R \mid x = \alpha y, \alpha$ કોઈ સંમેય સંખ્યા છે.$\}$

જો $x = \alpha, y = 1$ લઈએ, તો $\alpha = \alpha .1$ સત્ય બને. $(\alpha, 1) \in$B થાય.

પરંતુ $(1, \alpha) \notin$B હોવાથી, B સંમિત નથી. $(\alpha \neq 1)$

$\therefore$ B સામ્ય સંબંધ નથી.

વિધાન 1 સત્ય છે પરંતુ વિધાન 2 અસત્ય છે. **જવાબ :** (C)

નોંધ : $\alpha = 1$ હોય તો $x = y$ સામ્ય સંબંધ દર્શાવે. $\alpha = -1$હોય તો $x = -y \Rightarrow y = -x$. B સંમિત બને.
પરંતુ $x = -y, y = -z \Rightarrow x = z$. આથી B પરંપરિત ના બને. B સામ્ય સબંધ નથી.

(78) $f : [1, \infty) \to [1, \infty)$ દ્વારા વ્યાખ્યાયિત વિધેય $f(x) = (x-1)^2 + 1, x \geq 1, y = f(x) \geq 1$ માટે,

વિધાન : 1 $\{x \mid f(x) = f^{-1}(x)\} = \{1, 2\}$

વિધાન : 2 f એ એક-એક અને વ્યાપ્ત વિધેય છે તથા $f^{-1}(x) = x + \sqrt{x-1}, x \geq 1$

ઉકેલ : $(x-1)^2 \geq 0$

$\therefore (x-1)^2 + 1 \geq 1$ એટલે કે, $f(x) \geq 1$. આથી $R_f = [1, \infty)$

$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow (x_1 - 1)^2 + 1 = (x_2 - 1)^2 + 1 \Rightarrow x_1 - 1 = x_2 - 1 \Rightarrow x_1 = x_2$

કારણ કે, $(x_1 - 1 = 1 - x_2 \Rightarrow x_1 = x_2 = 1)$

$\therefore$ f એ એક-એક છે.

વળી $R_f = [1, \infty)$ = સહપ્રદેશ. આથી f એ વ્યાપ્ત છે.

હવે, $f(x) = (x-1)^2 + 1 = y$ લેતાં, $(x-1)^2 = y - 1$

$\therefore x - 1 = \sqrt{y-1}$

$\therefore x = 1 + \sqrt{y-1} = f^{-1}(y)$

$\therefore f^{-1}(x) = 1 + \sqrt{x-1} \neq x + \sqrt{x-1}$. આથી વિધાન 2 અસત્ય છે.

વળી, $f(x) = f^{-1}(x)$ આપેલ હોવાથી,

$(x-1)^2 + 1 = 1 + \sqrt{x-1}$

$\therefore (x-1)^2 = \sqrt{x-1}$ $(x - 1 \geq 0)$

$\therefore (x-1)^2 - \sqrt{x-1} = 0$

$\therefore (x-1)^{\frac{1}{2}} \left[(x-1)^{\frac{3}{2}} - 1\right] = 0$

$\therefore$ $x = 1$ અથવા $x - 1 = 1$

$\therefore$ $x = 1$ અથવા 2

આમ, $\{x \mid f(x) = f^{-1}(x)\} = \{1, 2\}$

$\therefore$ વિધાન 1 સત્ય છે.

વિધાન 1 સત્ય છે અને વિધાન 2 અસત્ય છે. **જવાબ :** (C)

●