7 શ્રેણી અને શ્રેઢી

- **શ્રેણી :** જે વિધેયનો પ્રદેશ N હોય અથવા $\{1, 2, 3, ..., n\}$ હોય તેવા વિધેયને શ્રેણી કહે છે. એટલે કે, વિધેય $f : N \rightarrow R$ અથવા $f : \{1, 2, 3, ..., n\} \rightarrow R$ ને શ્રેણી કહે છે.

  $f : N \rightarrow N$ ને પ્રાકૃતિક સંખ્યાઓની શ્રેણી, $f : N \rightarrow Z$ ને પૂર્ણાંક સંખ્યાઓની શ્રેણી,

  $f : N \rightarrow R$ ને વાસ્તવિક સંખ્યાઓની શ્રેણી, $f : N \rightarrow Q$ ને સંમેય સંખ્યાઓની શ્રેણી કહે છે.

  $f(1), f(2), ..., f(n)...$ ને શ્રેણીનાં પદો કહે છે.

  $f(n)$ ને a_n કે t_n અથવા u_n કે T_n વડે દર્શાવાય છે.

- **શ્રેઢી :** શ્રેણીનાં તમામ n પદોનો સરવાળો એ શ્રેઢી દર્શાવે છે. એટલે કે, કોઈ શ્રેણીનાં પદો $a_1, a_2, a_3, ... a_n$ હોય, તો $a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_n$ એ શ્રેઢી દર્શાવે છે. આ પ્રથમ n પદોના સરવાળાને S_n વડે દર્શાવાય.

  આપેલ શ્રેઢીને સંબંધિત શ્રેણી સૂત્ર $S_n - S_{n-1} = a_n$ તથા $S_1 = a_1$; $n \geq 2$ પરથી મેળવી શકાય.

- **સમાંતર શ્રેણી :** શ્રેણી $f : N \rightarrow R, f(n) = an + b,; a; b \in R; a \neq 0$ ને સમાંતર શ્રેણી કહે છે.

  સમાંતર શ્રેણીનાં બે ક્રમિક પદો વચ્ચેનો તફાવત શૂન્યેતર અચળ હોય. તેને d વડે દર્શાવાય. શ્રેણીનું પ્રથમ પદ a લેતાં, સમાંતર શ્રેણીનું n મું પદ $t_n = f(n) = a_n = a + (n-1)d$ દ્વારા શોધી શકાય.

  એટલે કે, $a, a + d, a + 2d, a + 3d, ..., a + (n-1)d, ...$ સમાંતર શ્રેણીનાં પદો છે.

  નોંધ : (1) જો a, b, c સમાંતર શ્રેણીમાં હોય, તો $2b = a + c$ મળે.

  (2) જો સમાંતર શ્રેણીનાં ત્રણ કે પાંચ કે સાત કે નવ ... ક્રમિક પદો આપેલ હોય ત્યારે 'a' ને મધ્યમ પદ તરીકે લઈ તેની પહેલાંનાં પદોમાં d ઘટાડવા તથા ત્યાર પછીનાં પદોમાં ક્રમશઃ d ઉમેરવા. ટૂંકમાં, $... a - d, a, a + d$ કે $... a - 2d, a - d, a, a + d, a + 2d ...$ જેવાં પદો મળે.

  (3) જો સમાંતર શ્રેણીનાં ચાર કે છ કે આઠ... ક્રમિક પદો આપેલ હોય ત્યારે બે મધ્યમ પદ થાય તથા બે ક્રમિક પદો વચ્ચેનો તફાવત $2d$ રાખીએ તો $... a - 5d, a - 3d, a - d, a + d, a + 3d, a + 5d, ...$ જેવાં પદો મળે.

- **સમાંતર શ્રેઢી :** સમાંતર શ્રેણીને સંબંધિત શ્રેઢીને સમાંતર શ્રેઢી કહે છે એટલે કે, સમાંતર શ્રેણી $a, a + d, a + 2d, ..., a + (n-1)d$ નાં તમામ n પદોનો સરવાળો લઈએ, તો તેને સમાંતર શ્રેઢી કહે છે. તેને S_n વડે દર્શાવાય.

  $\therefore S_n = a + (a + d) + (a + 2d) + ... + (a + (n-1)d)$

  $\therefore S_n = \frac{n}{2} [2a + (n-1)d]$ એ સમાંતર શ્રેણીનાં n પદોનો સરવાળો દર્શાવે છે.

  જો $l = a + (n-1)d$ લઈએ, તો $S_n = \frac{n}{2}(a+l)$ લખાય.

- **સમગુણોત્તર શ્રેણી :** શ્રેણી $f : N \rightarrow R, f(n) = ar^{n-1}; a; r \in R-\{0\}$ ને સમગુણોત્તર શ્રેણી કહે છે.

  સમગુણોત્તર શ્રેણીનાં બે ક્રમિક પદો વચ્ચેનો ગુણોત્તર અચળ હોય તેને r વડે દર્શાવાય. શ્રેણીનું પ્રથમ પદ a, સામાન્ય ગુણોત્તર r લેતાં સમગુણોત્તર શ્રેણીનું nમું પદ $a_n = t_n = f(n) = a.r^{n-1}$ દ્વારા મેળવી શકાય.

  એટલે કે, $a, ar, ar^2, ... ar^{n-1}$ સમગુણોત્તર શ્રેણીમાં છે તેમ કહેવાય.

  નોંધ : (1) a, b, c સમગુણોત્તર શ્રેણીમાં હોય તો, $\frac{b}{a} = \frac{c}{b}$ એટલે કે $b^2 = ac$ મળે. $a, b, c \in R^+$

(2) જો સમગુણોત્તર શ્રેણીનાં ત્રણ કે પાંચ કે સાત ... ક્રમિક પદો આપેલ હોય ત્યારે 'a'ને મધ્યમ પદ તરીકે રાખી, તેની પહેલાંનાં પદોને $\frac{1}{r}$ વડે તથા પછીનાં પદોને r વડે ક્રમશઃ ગુણવા. ટૂંકમાં, ... $\frac{a}{r^2}$, $\frac{a}{r}$, a, ar, ar^2 ... જેવાં પદો મળે. બે, ચાર, છ ... પદ માટે ... $\frac{a}{r^3}$, $\frac{a}{r}$, ar, ar^3 ... જેવા પદો મળે.

- **સમગુણોત્તર શ્રેઢી :** સમગુણોત્તર શ્રેણીને સંબંધિત શ્રેઢીને સમગુણોત્તર શ્રેઢી કહે છે. એટલે કે સમગુણોત્તર શ્રેણીનાં n પદો a, ar, ar^2 ... નો સરવાળો લઈએ, તો તેને સમગુણોત્તર શ્રેઢી કહે છે. તેને S_nથી દર્શાવાય.

  અહીં $S_n = \frac{a(r^n - 1)}{r-1}$, $r > 1$ તથા $S_n = \frac{a(1-r^n)}{1-r}$, $r < 1$ તથા $S_n = n.a$, $r = 1$

- **સ્વરિત શ્રેણી :** જો $a_1, a_2, a_3, ..., a_n$ કોઈ સમાંતર શ્રેણીનાં શૂન્યેતર ક્રમિક પદો હોય, તો $\frac{1}{a_1}, \frac{1}{a_2}, \frac{1}{a_3}, ...,$ $\frac{1}{a_n}$ એ સ્વરિત શ્રેણીમાં છે તેમ કહેવાય. એટલે કે સમાંતર શ્રેણીનું n મું પદ $t_n = a+(n-1)d$ લેતાં, સ્વરિત શ્રેણીનું nમું પદ $\frac{1}{a+(n-1)d}$ મળે. $(a+(n-1)d \neq 0)$

- **સમાંતર મધ્યક :** જો બે સંખ્યાઓ a તથા b માટે a, A તથા b સમાંતર શ્રેણીમાં હોય, તો Aને a તથા bનો સમાંતર મધ્યક કહે છે. $A = \frac{a+b}{2}$

- ***n* સમાંતર મધ્યકો :** જો $a, A_1, A_2, A_3, ..., A_n, b$ સમાંતર શ્રેણીમાં હોય તો $A_1, A_2, A_3, ... A_n$ ને સંખ્યાઓ a તથા b વચ્ચેના n સમાંતર મધ્યકો કહે છે.

  $A_1 = a + d, A_2 = a + 2d, A_3 = a + 3d, ..., A_n = a + nd$ તથા $d = \frac{b-a}{n+1}$

- **ગુણોત્તર મધ્યક :** બે ધન સંખ્યાઓ a તથા b માટે, a, G તથા b સમગુણોત્તર શ્રેણીમાં હોય, તો Gને સંખ્યાઓ a તથા bનો સમગુણોત્તર મધ્યક કહે છે. $G = \sqrt{ab}$

- ***n* સમગુણોત્તર મધ્યકો :** જો $a, G_1, G_2, G_3, ... G_n, b$ એ સમગુણોત્તર શ્રેણીમાં હોય, તો $G_1, G_2, G_3, ... G_n$ ને ધન સંખ્યાઓ a તથા b વચ્ચેના n સમગુણોત્તર મધ્યકો કહે છે.

  જ્યાં, $G_1 = ar, G_2 = ar^2, G_3 = ar^3, ..., G_n = ar^n$. તથા $r = \left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{1}{n+1}}$

- **સ્વરિત મધ્યક :** જો બે સંખ્યાઓ a તથા b માટે, a, H તથા b સ્વરિત શ્રેણીમાં હોય, તો Hને a તથા bનો સ્વરિત મધ્યક કહે છે. $\frac{1}{a}, \frac{1}{H}, \frac{1}{b}$ સમાંતર શ્રેણીમાં છે. $H = \frac{2ab}{a+b}$ સ્વરિત મધ્યક થાય.

- ***n* સ્વરિત મધ્યકો :** બે સંખ્યાઓ a તથા b માટે $a, H_1, H_2, H_3, ..., H_n, b$ એ સ્વરિત શ્રેણીમાં હોય, તો $H_1, H_2, H_3, ..., H_n$ એ સંખ્યાઓ a તથા b વચ્ચેના n સ્વરિત મધ્યકો છે.

  $\therefore \frac{1}{a}, \frac{1}{H_1}, \frac{1}{H_2}, ..., \frac{1}{H_n}, \frac{1}{b}$ સમાંતર શ્રેણીમાં હોય. $d = \frac{a-b}{(n+1)ab}$

  તથા $\frac{1}{H_1} = \frac{1}{a} + d$, $\frac{1}{H_2} = \frac{1}{a} + 2d$, $\frac{1}{H_3} = \frac{1}{a} + 3d$, ..., $\frac{1}{H_n} = \frac{1}{a} + nd$

નોંધ : બે સંખ્યા a તથા b ના સમાંતર મધ્યક, સમગુણોત્તર મધ્યક તથા સ્વરિત મધ્યક અનુક્રમે A, G તથા H હોય, તો $AH = G^2$

$\therefore$ A, G, H સમગુણોત્તર શ્રેણીમાં હોય, તથા $A > G > H$ મળે.

- **સમાંતર-સમગુણોત્તર શ્રેઢી :** $a + (a + d)r + (a + 2d)r^2 + (a + 3d)r^3 + ...$ ને સમાંતર - સમગુણોત્તર શ્રેઢી કહે છે, જ્યાં $t_n = [a + (n-1)d]r^{n-1}$.

$$S_n = \frac{a}{1-r} + \frac{d \cdot r(1-r^{n-1})}{(1-r)^2} - \frac{[a+(n-1)d]r^n}{(1-r)}$$

જો $|r| < 1$ હોય, તો જેમ $n \to \infty$ હોય તેમ $r^n \to 0$. આથી $S_\infty = \frac{a}{1-r} + \frac{dr}{(1-r)^2}$ થાય.

- **ઘાત શ્રેઢી :** કેટલીક વિશિષ્ટ શ્રેણીઓ માટે, પ્રથમ n પ્રાકૃતિક સંખ્યા, તેમના વર્ગ, તેમના ઘનના સરવાળા ધરાવતી શ્રેઢીઓ માટે આપણે સરવાળાને Σ સંકેતથી દર્શાવીશું.

Σ ના અગત્યનાં પરિણામો :

(1) $\sum_{i=1}^{n} (a_i \pm b_i) = \sum_{i=1}^{n} a_i \pm \sum_{i=1}^{n} b_i$

(2) $\sum_{i=1}^{n} ka_i = k \sum_{i=1}^{n} a_i$

(3) $\sum_{i=1}^{n} 1 = (1 + 1 + 1 + ...\ n$ વખત$) = n = \Sigma 1$

(4) $\sum_{i=1}^{n} i = \Sigma n = \frac{n(n+1)}{2}$

(5) $\sum_{i=1}^{n} i^2 = \Sigma n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

(6) $\sum_{i=1}^{n} i^3 = \Sigma n^3 = \frac{n^2 (n+1)^2}{4}$

નોંધ :

(i) $\sum_{i=1}^{n} (a_i b_i) \neq \sum_{i=1}^{n} a_i \cdot \sum_{i=1}^{n} b_i$; $\forall\ i \in N$

(ii) $\sum_{i=1}^{n} \left(\frac{a_i}{b_i}\right) \neq \frac{\sum_{i=1}^{n} a_i}{\sum_{i=1}^{n} b_i}$; $\forall\ i \in N$

બહુવિકલ્પી પ્રશ્નો

(1) જો $\frac{1}{b+c}, \frac{1}{c+a}, \frac{1}{a+b}$ એ સમાંતર શ્રેણીમાં હોય તો, ...

(A) a^2, b^2, c^2 એ સમાંતર શ્રેણીમાં છે.

(B) a, b, c સમાંતર શ્રેણીમાં છે.

(C) $\frac{1}{a}, \frac{1}{b}, \frac{1}{c}$ એ સમાંતર શ્રેણીમાં છે.

(D) $\frac{1}{a^2}, \frac{1}{b^2}, \frac{1}{c^2}$ એ સમાંતર શ્રેણીમાં છે.

ઉકેલ : અહીં $\frac{2}{c+a} = \frac{1}{b+c} + \frac{1}{a+b} = \frac{a+b+b+c}{(a+b)(b+c)}$

$\therefore \quad \frac{2}{c+a} = \frac{a+c+2b}{ab+ac+b^2+bc}$

$\therefore \quad 2ab + 2ac + 2b^2 + 2bc = ac + a^2 + c^2 + ac + 2bc + 2ab$

$\therefore \quad 2b^2 = a^2 + c^2$

$\therefore \quad a^2, b^2, c^2$ એ સમાંતર શ્રેણીમાં છે.

જવાબ : (A)

(2) જો બે શ્રેઢીઓ 3 + 10 + 17 + ... તથા 63 + 65 + 67 +... ના n મા પદ સમાન હોય તો n = ...

(A) 9 (B) 11 (C) 13 (D) 19

ઉકેલ : અહીં 3, 10, 17,... તથા 63, 65, 67, ... બંને સમાંતર શ્રેણીઓ છે.

પ્રથમ સમાંતર શ્રેણી 3, 10, 17,... માટે $a = 3, d = 7$

$t_n = 3 + (n-1)7 = 7n - 4$

વળી, દ્વિતીય સમાંતર શ્રેણી 63, 65, 67,... માટે $a = 63, d = 2$

$\therefore\ T_n = 63 + (n-1)2 = 2n + 61$

હવે, $t_n = T_n$ હોવાથી, $7n - 4 = 2n + 61$

$\therefore\ 5n = 65$

$\therefore\ n = 13$ **જવાબ :** (C)

(3) જો $\log 2, \log (2^x - 1)$ અને $\log (2^x + 3)$ એ સમાંતર શ્રેણીમાં હોય તો, x = ...

(A) $\frac{2}{5}$ (B) $\log_5 2$ (C) $\log_2 5$ (D) $\log_3 5$

ઉકેલ : $2 \log (2^x - 1) = \log 2 + \log (2^x + 3)$

$\therefore\ \log (2^x - 1)^2 = \log (2 \cdot (2^x + 3))$

$\therefore\ (2^x - 1)^2 = 2 \cdot (2^x + 3)$

$\therefore\ (2^x)^2 - 2 \cdot 2^x + 1 = 2 \cdot 2^x + 6$

$\therefore\ (2^x)^2 - 4 \cdot 2^x - 5 = 0$

$\therefore\ (2^x + 1)(2^x - 5) = 0$

$\therefore\ 2^x = -1$ અથવા $2^x = 5$

પરંતુ $2^x = -1$ અશક્ય છે. આથી $2^x = 5$

$\therefore\ x = \log_2 5$ **જવાબ :** (C)

(4) કોઈ બહિર્મુખ બહુકોણના અંતર્ગત ખૂણાઓ સમાંતર શ્રેણીમાં હોય તથા અંશ માપમાં સામાન્ય તફાવત 5 હોય તેમજ નાનામાં નાના ખૂણાનું અંશમાપ 120 હોય, તો તે બહુકોણને ...... બાજુઓ હોય.

(A) 9, 16 (B) 16 (C) 10 (D) 9

ઉકેલ : અહીં નાનામાં નાના ખૂણાનું અંશમાપ 120 છે. આથી $a = 120$ તથા $d = 5$

ધારો કે બહુકોણને n બાજુઓ છે.

બહુકોણના બધા ખૂણાઓનાં માપનો સરવાળો $(2n - 4) \times 90$ મળે.

$\therefore\ \frac{n}{2}[2(120) + (n-1)5] = (2n-4)90$ આથી $\frac{n}{2}(240 + 5n - 5) = (n-2)180$

$\therefore\ n(235 + 5n) = (n-2)360$ આથી $5n^2 - 125n + 720 = 0$

$\therefore\ n^2 - 25n + 144 = 0$

$\therefore\ (n-16)(n-9) = 0$

$\therefore\ n = 16$ અથવા $n = 9$

હવે $n = 16$ લેતાં, $t_{16} = a + 15d = 120 + 75 = 195$ અશક્ય છે. આથી $n = 9$ **જવાબ :** (D)

(5) $5^{1+x} + 5^{1-x}$; $\frac{a}{2}$; $25^x + 25^{-x}$ એ કોઈ સમાંતર શ્રેણીનાં ત્રણ ક્રમિક પદો હોય તો 'a' ની ન્યૂનતમ કિંમત ...... હોય.

(A) 5 (B) 7 (C) 10 (D) 12

ઉકેલ : અહીં $2\left(\frac{a}{2}\right) = 5^{1+x} + 5^{1-x} + 25^x + 25^{-x} = 5 \cdot 5^x + \frac{5}{5^x} + (5^2)^x + (5^2)^{-x}$

$$= 5 \cdot 5^x + \frac{5}{5^x} + (5^x)^2 + (5^x)^{-2}$$

ધારો કે $5^x = m$

$$\therefore a = 5m + \frac{5}{m} + m^2 + \frac{1}{m^2} = 5\left(m+\frac{1}{m}\right) + \left(m^2+\frac{1}{m^2}\right)$$

$$= 5\left(\sqrt{m} - \frac{1}{\sqrt{m}}\right)^2 + \left(m - \frac{1}{m}\right)^2 + 12 \geq 12$$

$\therefore$ a ની ન્યૂનતમ કિંમત 12 મળે. (જે $x = 0$ને સંગત મળે) **જવાબ :** (D)

(6) $a_1, a_2, a_3, \ldots$ એવી સમાંતર શ્રેણી છે કે જેથી, $a_1 + a_5 + a_{10} + a_{15} + a_{20} + a_{24} = 240$ હોય, તો તે શ્રેણીનાં પ્રથમ 24 પદોનો સરવાળો ...... થાય.

(A) 950 (B) 860 (C) 900 (D) 960

ઉકેલ : કોઈ પણ સમાંતર શ્રેણીમાં શરૂઆત તથા અંતથી સમાન સ્થાને આવેલાં પદોનો સરવાળો એ પ્રથમ તથા અંતિમ પદોનાં સરવાળા જેટલો જ થાય.

અહીં $a_1, a_2, a_3, \ldots a_{24}$ એ સમાંતર શ્રેણીનાં પ્રથમ 24 પદો છે.

હવે $a_1 + a_5 + a_{10} + a_{15} + a_{20} + a_{24} = 240$ આપેલ છે.

$\therefore (a_1 + a_{24}) + (a_5 + a_{20}) + (a_{10} + a_{15}) = 240$

$\therefore (a_1 + a_{24}) + (a_1 + a_{24}) + (a_1 + a_{24}) = 240$

$\therefore 3(a_1 + a_{24}) = 240$

$\therefore a_1 + a_{24} = 80$

હવે $S_{24} = \frac{24}{2}[a_1 + a_{24}] = 12(80) = 960$ **જવાબ :** (D)

બીજી રીત :

$a + a + 4d + a + 9d + a + 14d + a + 19d + a + 23d = 240$

$\therefore 6a + 69d = 240$

$\therefore 2a + 23d = 80$

$\therefore S_{24} = \frac{24}{2}(2a + 23d)$

$= (12)(80) = 960$

(7) જો $<a_n>$ એ સમાંતર શ્રેણી હોય, તો $D = \begin{vmatrix} a_p & a_q & a_r \\ p & q & r \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \ldots\ldots$

(A) 0 (B) -1 (C) 1 (D) pqr

ઉકેલ : અહીં $<a_n>$ એ સમાંતર શ્રેણી છે.

$\therefore a_p = a + (p-1)d$, $a_q = a + (q-1)d$ અને $a_r = a + (r-1)d$

$$\therefore D = \begin{vmatrix} a+(p-1)d & a+(q-1)d & a+(r-1)d \\ p & q & r \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a & a & a \\ p & q & r \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \qquad R_{31}(d),\ R_{21}(-d)$$

$$= a \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ p & q & r \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

જવાબ : (A)

(8) જો $\frac{a+b}{1-ab}$, b, $\frac{b+c}{1-bc}$ એ સમાંતર શ્રેણીમાં હોય, તો $\frac{1}{a}$, b, $\frac{1}{c}$ એ ...... શ્રેણીમાં હોય.

(A) સમાંતર (B) સમગુણોત્તર (C) સ્વરિત (D) સમાંતર-સમગુણોત્તર

ઉકેલ : અહીં $\frac{a+b}{1-ab}$, b, $\frac{b+c}{1-bc}$ એ સમાંતર શ્રેણીમાં છે.

$\therefore\ b - \left(\frac{a+b}{1-ab}\right) = \frac{b+c}{1-bc} - b$

$\therefore\ \frac{b-ab^2-a-b}{1-ab} = \frac{b+c-b+b^2c}{1-bc}$

$\therefore\ \frac{-ab^2-a}{1-ab} = \frac{c+b^2c}{1-bc}$

$\therefore\ \frac{-a(b^2+1)}{1-ab} = \frac{c(1+b^2)}{1-bc}$

$\therefore\ \frac{-a}{1-ab} = \frac{c}{1-bc}$

$\therefore\ -a + abc = c - abc$

$\therefore\ 2\,abc = a + c$

$\therefore\ 2b = \frac{a}{ac} + \frac{c}{ac} = \frac{1}{c} + \frac{1}{a}$

$\therefore\ \frac{1}{a}$, b, $\frac{1}{c}$ એ સમાંતર શ્રેણીમાં છે.

જવાબ : (A)

(9) જો $\log(a+c) + \log(a-2b+c) = 2\log(a-c)$ હોય, તો $\frac{1}{a}, \frac{1}{b}, \frac{1}{c}$ ...... શ્રેણીમાં હોય.

(A) સ્વરિત (B) સમગુણોત્તર (C) સમાંતર (D) સમાંતર-સમગુણોત્તર

ઉકેલ : $\log(a+c) + \log(a-2b+c) = 2\log(a-c)$

$\therefore\ \log\{(a+c)(a-2b+c)\} = \log(a-c)^2$

$\therefore\ (a^2 - 2ab + ac + ac - 2bc + c^2) = (a^2 - 2ac + c^2)$

$\therefore\ (a^2 - 2ab + 2ac - 2bc + c^2) = (a^2 - 2ac + c^2)$

$\therefore\ 4ac = 2ab + 2bc.$ આથી $2ac = ab + bc$

$$\therefore\ \frac{2}{b} = \frac{1}{c} + \frac{1}{a}$$

$\therefore\ \frac{1}{a}, \frac{1}{b}, \frac{1}{c}$ એ સમાંતર શ્રેણીમાં છે. **જવાબ :** (C)

(10) જો $a_1, a_2, a_3, ..., a_n$ એ સમાંતર શ્રેણીમાં હોય તથા $\forall\ i, a_i > 0$ હોય, તો

$$\frac{1}{\sqrt{a_1}+\sqrt{a_2}} + \frac{1}{\sqrt{a_2}+\sqrt{a_3}} + ... + \frac{1}{\sqrt{a_{n-1}}+\sqrt{a_n}} = ...$$

(A) $\frac{1}{\sqrt{a_1}+\sqrt{a_n}}$ (B) $\frac{n}{\sqrt{a_1}+\sqrt{a_n}}$ (C) $\frac{n+1}{\sqrt{a_1}+\sqrt{a_n}}$ (D) $\frac{n-1}{\sqrt{a_1}+\sqrt{a_n}}$

ઉકેલ : ધારો કે સમાંતર શ્રેણીનાં બે ક્રમિક પદો વચ્ચેનો તફાવત d છે.

હવે, $\frac{1}{\sqrt{a_1}+\sqrt{a_2}} + \frac{1}{\sqrt{a_2}+\sqrt{a_3}} + ... + \frac{1}{\sqrt{a_{n-1}}+\sqrt{a_n}}$

$$= \frac{\sqrt{a_1}-\sqrt{a_2}}{a_1-a_2} + \frac{\sqrt{a_2}-\sqrt{a_3}}{a_2-a_3} + ... + \frac{\sqrt{a_{n-1}}-\sqrt{a_n}}{a_{n-1}-a_n}$$

$$= \frac{\sqrt{a_1}-\sqrt{a_2}}{-d} + \frac{\sqrt{a_2}-\sqrt{a_3}}{-d} + ... + \frac{\sqrt{a_{n-1}}-\sqrt{a_n}}{-d}$$

$$= -\frac{1}{d}\left[\sqrt{a_1}-\sqrt{a_2}+\sqrt{a_2}-\sqrt{a_3}+...+\sqrt{a_{n-1}}-\sqrt{a_n}\right]$$

$$= -\frac{1}{d}\left[\sqrt{a_1}-\sqrt{a_n}\right] = -\frac{1}{d}\left(\frac{a_1-a_n}{\sqrt{a_1}+\sqrt{a_n}}\right)$$

$(a_n - a_1) = (n-1)\,d$ કારણ કે $a_n = a_1 + (n-1)d$

$\therefore\ -\frac{1}{d}\left(\frac{-(n-1)d}{\sqrt{a_1}+\sqrt{a_n}}\right) = \frac{(n-1)}{\sqrt{a_1}+\sqrt{a_n}}$ **જવાબ :** (D)

(11) જો કોઈ સમાંતર શ્રેણીનું પ્રથમ પદ m તથા અંતિમ પદ p હોય તેમજ n પદોનો સરવાળો S હોય, તો તે શ્રેણીનો સામાન્ય તફાવત ...... હોય.

(A) $\frac{p+m}{2S}$ (B) $\frac{m^2-p^2}{2S-m+p}$ (C) $\frac{p^2-m^2}{2S-(m+p)}$ (D) $\frac{p^2+m^2}{2S+(m+p)}$

ઉકેલ : અહીં $a = m$ તથા $p = m + (n-1)d$ છે.

તેમજ $S_n = S = \frac{n}{2}(m + p)$ છે.

$\therefore$ $p = m + (n-1)d$ પરથી, $d = \dfrac{p-m}{n-1}$ મળે તથા $n = \dfrac{2S}{m+p}$ મળે.

$\therefore$ $d = \dfrac{p-m}{\dfrac{2S}{m+p}-1} = \dfrac{(p-m)(m+p)}{2S-m-p} = \dfrac{p^2-m^2}{2S-(m+p)}$ **જવાબ :** (C)

(12) $a_1, a_2, a_3, ..., a_n$ એ કોઈ સમાંતર શ્રેણીનાં n પદો હોય, તો
$a_1^2 - a_2^2 + a_3^2 - a_4^2 + ... + a_{2n-1}^2 - a_{2n}^2 = ...$

(A) $\dfrac{n}{(2n-1)}(a_1^2 - a_{2n}^2)$ (B) $\dfrac{1}{(2n-1)}(a_1^2 + a_{2n}^2)$

(C) $\dfrac{1}{(2n-1)}(a_1^2 - a_{2n}^2)$ (D) $\dfrac{2n}{2n+1}(a_1^2 - a_{2n}^2)$

ઉકેલ : ધારો કે આપેલ સમાંતર શ્રેણીનાં બે ક્રમિક પદો વચ્ચેનો તફાવત d છે.

$\therefore$ $a_2 - a_1 = a_3 - a_2 = a_4 - a_3 = ... = a_n - a_{n-1} = d$ (1)

હવે $(a_1^2 - a_2^2) + (a_3^2 - a_4^2) + ... + (a_{2n-1}^2 - a_{2n}^2)$

$= (a_1 - a_2)(a_1 + a_2) + (a_3 - a_4)(a_3 + a_4) + ... + (a_{2n-1} - a_{2n})(a_{2n-1} + a_{2n})$

$= -d[a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + ... + a_{2n-1} + a_{2n}]$

$= -nd[a_1 + a_{2n}]$ $\left(S_{2n} = \frac{1}{2}(2n)(a_1 + a_{2n})\right)$

$= -nd\dfrac{(a_1 + a_{2n})(a_1 - a_{2n})}{(a_1 - a_{2n})}$

$= -nd\dfrac{(a_1^2 - a_{2n}^2)}{(a_1 - a_{2n})} = \dfrac{nd(a_1^2 - a_{2n}^2)}{(a_{2n} - a_1)}$ (2)

$(a_1^2 - a_2^2) + (a_3^2 - a_4^2) + ... + (a_{2n-1}^2 - a_{2n}^2) = \dfrac{nd(a_1^2 - a_{2n}^2)}{(2n-1)d}$ $(a_{2n} = a_1 + (2n-1)d)$

$= \dfrac{n\left(a_1^2 - a_{2n}^2\right)}{(2n-1)}$ **જવાબ :** (A)

(13) જો p, q, r, s, t એ કોઈ સમાંતર શ્રેણી રચે, તો $p - 4q + 6r - 4s + t = ...$

(A) 4 (B) 0 (C) 3 (D) 2

ઉકેલ : p, q, r, s, t સમાંતર શ્રેણીમાં હોય, તો તે અનુક્રમે $p, p + d, p + 2d, p + 3d, p + 4d$ હોય.

અહીં $q - p = r - q = s - r = t - s = d$

$\therefore$ $p - 4q + 6r - 4s + t = p - 4(p + d) + 6(p + 2d) - 4(p + 3d) + p + 4d$

$= p \cdot 0 + d \cdot 0 = 0$ **જવાબ :** (B)

(14) જો કોઈ સમાંતર શ્રેણીના પ્રત્યેક n પદોનો સરવાળો n^2 હોય તો તે શ્રેણીનાં બે ક્રમિક પદો વચ્ચેનો તફાવત ...... હોય.

(A) 1 (B) 2 (C) 4 (D) 6

ઉકેલ : અહીં $S_n = n^2$ છે. આથી $S_{n-1} = (n-1)^2$

$\therefore$ $a_n = S_n - S_{n-1} = n^2 - (n-1)^2 = 2n - 1$. $n \geq 2$ વળી $S_1 = a_1 = 1$

$\therefore$ સમાંતર શ્રેણી 1, 3, 5, 7... મળે.

$\therefore$ સામાન્ય તફાવત $d = 2$ **જવાબ :** (B)

(15) જો કોઈ સમીકરણ $(x + 1) + (x + 4) + (x + 7) + ... + (x + 34) = 216$ સમાંતર શ્રેણીના પ્રથમ n પદનો સરવાળો દર્શાવે, તો x = ...

(A) 0 (B) $\frac{1}{2}$ (C) 1 (D) 2

ઉકેલ : અહીં $(x + 1) + (x + 4) + (x + 7) + ... + (x + 34) = 216$ છે.

જ્યાં $(x + 34)$ એ અંતિમ પદ છે. આથી, $l = a + (n - 1)d$ પરથી,

$x + 34 = (x + 1) + (n - 1)3$. આથી $33 = (n - 1)3$

$\therefore n - 1 = 11$ આથી $n = 12$ મળે.

હવે આ 12 પદોનો સરવાળો 216 છે.

$\therefore S_{12} = \frac{12}{2} [(x + 1) + (x + 34)] = 216$

$\therefore 6 (2x + 35) = 216$

$\therefore 2x + 35 = 36$. આથી, $2x = 1$. આથી $x = \frac{1}{2}$ **જવાબ :** (B)

(16) જો S_n એ કોઈ સમાંતર શ્રેણીનાં પ્રથમ n પદોનો સરવાળો હોય તથા $S_{3n} = 4S_n$ હોય, તો $\frac{S_{4n}}{S_n}$ = ...

(A) 2 (B) 4 (C) 6 (D) 8

ઉકેલ : અહીં $S_{3n} = 4S_n$ છે.

$\therefore \frac{3n}{2} [2a + (3n - 1)d] = 4 \cdot \frac{n}{2} [2a + (n - 1)d]$

$\therefore 3 [2a + (3n - 1)d] = 4 \cdot [2a + (n - 1)d]$

$\therefore 6a + (9n - 3)d = 8a + (4n - 4)d$

$\therefore 2a = (5n + 1)d$ (1)

હવે $\frac{S_{4n}}{S_n} = \frac{\frac{4n}{2}[2a+(4n-1)d]}{\frac{n}{2}[2a+(n-1)d]} = \frac{4[2a+(4n-1)d]}{[2a+(n-1)d]}$

$= \frac{4[5nd+d+4nd-d]}{5nd+d+nd-d}$ ((1) પરથી)

$= 4\left(\frac{9nd}{6nd}\right) = 6$ **જવાબ :** (C)

(17) સમીકરણ $x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = 0$ નાં ક્રમિક બીજ વચ્ચેનો તફાવત .... હોય.

(A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4

ઉકેલ : અહીં સમીકરણ $x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = 0$ માટે,

$\therefore (x - 1)(x^2 - 5x + 6) = 0$

$\therefore (x - 1)(x - 2)(x - 3) = 0$

$\therefore x = 1, 2$ કે 3 મળે.

આથી બે ક્રમિક બીજ વચ્ચેનો તફાવત 1 મળે. **જવાબ :** (A)

(18) સમીકરણ $\log_{\sqrt{2}} x + \log_{\sqrt[4]{2}} x + \log_{\sqrt[6]{2}} x + ... + \log_{\sqrt[32]{2}} x = 136$ હોય, તો $x =$ ...... મળે.

(A) $\frac{1}{\sqrt{2}}$ (B) $\sqrt{2}$ (C) $\frac{1}{2}$ (D) 2

ઉકેલ : $\log_{\sqrt{2}} x + \log_{\sqrt[4]{2}} x + \log_{\sqrt[6]{2}} x + ... + \log_{\sqrt[32]{2}} x = 136$

$$\therefore \frac{\log x}{\log\sqrt{2}} + \frac{\log x}{\log\sqrt[4]{2}} + \frac{\log x}{\log\sqrt[6]{2}} + ... + \frac{\log x}{\log\sqrt[32]{2}} = 136$$

$$\therefore \frac{\log x}{\frac{1}{2}\log 2} + \frac{\log x}{\frac{1}{4}\log 2} + \frac{\log x}{\frac{1}{6}\log 2} + ... + \frac{\log x}{\frac{1}{32}\log 2} = 136$$

$$\therefore \frac{2\log x}{\log 2} + \frac{4\log x}{\log 2} + \frac{6\log x}{\log 2} + ... + \frac{32\log x}{\log 2} = 136$$

$\therefore (2 + 4 + 6 + 8 + ... + 32)\ \log_2 x = 136$

$\therefore \frac{16}{2}(2+32)\ \log_2 x = 136$

$\therefore 8(34)\ \log_2 x = 136$

$\therefore \log_2 x = \frac{136}{34 \times 8} = \frac{1}{2}$

$\therefore x = 2^{\frac{1}{2}} = \sqrt{2}$ **જવાબ :** (B)

(19) જો કોઈ સમાંતર શ્રેણીનું છઠ્ઠું પદ 2 હોય તથા જો તેના પ્રથમ, ચતુર્થ તથા પાંચમા પદનો ગુણાકાર ન્યૂનતમ હોય, તો તે શ્રેણીનાં બે ક્રમિક પદો વચ્ચેનો તફાવત ...... હોય.

(A) $\frac{8}{5}$ (B) $\frac{2}{3}$ (C) $\frac{3}{2}$ (D) $\frac{5}{8}$

ઉકેલ : ધારો કે સમાંતર શ્રેણીનાં બે ક્રમિક પદો વચ્ચેનો તફાવત d છે તથા તેનું પ્રથમ પદ a છે.

હવે $t_6 = 2$ આથી $a + 5d = 2$ (1)

વળી, $t_4 = a + 3d$ તથા $t_5 = a + 4d$ હોવાથી,

$t_1 \cdot t_4 \cdot t_5 = a(a + 3d)(a + 4d) = F(d)$ ધારતાં,

$F(d) = (2 - 5d)(2 - 5d + 3d)(2 - 5d + 4d)$ ((1) પરથી)

$= (2 - 5d)(2 - 2d)(2 - d)$

$= (2 - 5d)(4 - 6d + 2d^2)$

$= -2(5d^3 - 17d^2 + 16d - 4)$

હવે ન્યૂનતમ કિંમત માટે $F'(d) = 0$

$\therefore -2(15d^2 - 34d + 16) = 0$

$\therefore -2(5d - 8)(3d - 2) = 0$

$\therefore d = \frac{8}{5}$ અથવા $d = \frac{2}{3}$

હવે $F''(d) = -2(30d - 34)$

$d = \frac{8}{5}$ લેતાં, $F''(d) = -2(30d - 34) = -28 < 0$

$\therefore F(d)$ સ્થાનીય મહત્તમ થાય.

$\therefore d = \frac{2}{3}$ લેતાં $F''(d) = 28 > 0$. આથી $F(d)$ એ $d = \frac{2}{3}$ માટે સ્થાનીય ન્યૂનતમ છે. **જવાબ :** (B)

(20) જો $\dfrac{a-x}{px} = \dfrac{a-y}{qy} = \dfrac{a-z}{rz}$ હોય તથા p, q, r સમાંતર શ્રેણીમાં હોય, તો x, y, z એ ...... શ્રેણીમાં હોય.

(A) સમગુણોત્તર (B) સમાંતર-સમગુણોત્તર (C) સમાંતર (D) સ્વરિત

ઉકેલ : અહીં p, q, r સમાંતર શ્રેણીમાં છે.

$\therefore 2q = p + r$ (1)

હવે, $\dfrac{a-x}{px} = \dfrac{a-y}{qy} = \dfrac{a-z}{rz} = k$ લેતાં,

$\dfrac{a-x}{kx} = p, \dfrac{a-y}{ky} = q, \dfrac{a-z}{kz} = r$ મળે.

$\therefore$ (1) પરથી, $2\left(\dfrac{a-y}{ky}\right) = \left(\dfrac{a-x}{kx}\right) + \left(\dfrac{a-z}{kz}\right)$ આથી $2\left(\dfrac{a-y}{y}\right) = \left(\dfrac{a-x}{x}\right) + \left(\dfrac{a-z}{z}\right)$

$\therefore \dfrac{2a-2y}{y} = \dfrac{az-zx+ax-zx}{zx}$ આથી $\dfrac{2a}{y} = \dfrac{a}{x} + \dfrac{a}{z}$

$\therefore \dfrac{2}{y} = \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{z}$ આથી x, y, z સ્વરિત શ્રેણીમાં છે. **જવાબ :** (D)

(21) કોઈ વધતી સમાંતર શ્રેણીનાં ત્રણ ક્રમિક પદોનો સરવાળો 51 છે તથા તેના પ્રથમ અને ત્રીજા પદનો ગુણાકાર 273 હોય, તો તે શ્રેણીનું ત્રીજું પદ ...... હોય.

(A) 9 (B) 13 (C) 17 (D) 21

ઉકેલ : ધારો કે વધતી સમાંતર શ્રેણીનાં ત્રણ ક્રમિક પદો $a - d, a, a + d$ છે. તેમનો સરવાળો 51 છે.

$\therefore 3a = 51$, આથી $a = 17$

હવે, $(a - d)(a + d) = 273$

$\therefore a^2 - d^2 = 273$

$\therefore 289 - 273 = d^2$. આથી $d^2 = 16$. આથી $d = \pm 4$.

$d = 4$ લેતાં, $a - d = 13, a = 17, a + d = 21$ મળે. (વધતી શ્રેણી માટે $d = 4$ લેવું જરૂરી છે.) **જવાબ :** (D)

(22) જો $x^2 (y + z), y^2 (z + x), z^2 (x + y)$ એ સમાંતર શ્રેણીમાં હોય, તો x, y, z એ ...... શ્રેણીમાં હોય $(xy + yz + zx = 0)$

(A) સ્વરિત (B) સમાંતર (C) સમગુણોત્તર (D) સમાંતર-સમગુણોત્તર

ઉકેલ : $2y^2 (z + x) = z^2 (x + y) + x^2 (y + z)$

$\therefore z^2 x + z^2y + x^2y + x^2z - 2y^2z - 2y^2x = 0$

$\therefore xz (x + z - 2y) + y (z^2 + x^2 + 2xz - 4y^2) - 2y^2(z + x - 2y) = 0$

$\therefore xz(x + z - 2y) + y (z + x - 2y) (z + x + 2y) - 2y^2(z + x - 2y) = 0$

$\therefore (z + x - 2y) (zx + yz + xy + 2y^2 - 2y^2)$

$\therefore z + x = 2y$ અથવા $xy + yz + zx = 0$

જો $xy + yz + zx \neq 0$ હોય તો $z + x = 2y$

$\therefore x, y, z$ સમાંતર શ્રેણીમાં છે. **જવાબ :** (B)

(23) કોઈ સમાંતર શ્રેણી $\{a_n\}$ માટે, $a_1^2 - a_2^2 + a_3^2 - a_4^2 + ... + a_{99}^2 - a_{100}^2 = ...$

(A) $\dfrac{50}{99} (a_1^2 - a_{100}^2)$ (B) $\dfrac{100}{99} (a_{100}^2 - a_1^2)$ (C) $\dfrac{50}{51} (a_1^2 - a_{100}^2)$ (D) $\dfrac{51}{50} (a_1^2 - a_{50}^2)$

ઉકેલ : સમાંતર શ્રેણી $a_1, a_2, a_3, ..., a_{100}$ માટે,

$$a_2 - a_1 = a_3 - a_2 = a_4 - a_3 = ... = a_{100} - a_{99} = d \quad (1)$$

$\therefore (a_1^2 - a_2^2) + (a_3^2 - a_4^2) + ... + (a_{99}^2 - a_{100}^2)$

$= (a_1 - a_2)(a_1 + a_2) + (a_3 - a_4)(a_3 + a_4) + ... + (a_{99} - a_{100})(a_{99} + a_{100})$

$= (-d)(a_1 + a_2) + (-d)(a_3 + a_4) + ... + (-d)(a_{99} + a_{100})$

$= -d(a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_{100})$

$= -d \cdot \frac{100}{2}[a_1 + a_{100}]$

$= -50d\ \frac{(a_1 + a_{100})(a_1 - a_{100})}{(a_1 - a_{100})}$

$= \frac{-50d(a_1^2 - a_{100}^2)}{a_1 - (a_1 + 99d)} = \frac{-50d(a_1^2 - a_{100}^2)}{-99d} = \frac{50}{99}(a_1^2 - a_{100}^2)$ **જવાબ :** (A)

(24) જો દ્વિઘાત સમીકરણ $ax^2 + bx + c = 0$ નાં બે બીજનો સરવાળો એ બીજના વર્ગના વ્યસ્તના સરવાળા બરાબર હોય, તો bc^2, ca^2, ab^2 ...... શ્રેણીમાં હોય.

(A) સમાંતર (B) સમગુણોત્તર (C) સ્વરિત (D) સમાંતર-સમગુણોત્તર

ઉકેલ : ધારો કે દ્વિઘાત સમીકરણ $ax^2 + bx + c = 0$ નાં બીજ α અને β છે.

અહીં $\alpha + \beta = \frac{1}{\alpha^2} + \frac{1}{\beta^2}$ છે.

$$\therefore \alpha + \beta = \frac{\alpha^2 + \beta^2}{(\alpha\beta)^2} = \frac{(\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta}{(\alpha\beta)^2} \quad (1)$$

હવે $\alpha + \beta = \frac{-b}{a}$ તથા $\alpha\beta = \frac{c}{a}$ હોવાથી, (1) પરથી,

$$\frac{-b}{a} = \frac{\frac{b^2}{a^2} - 2\left(\frac{c}{a}\right)}{\frac{c^2}{a^2}} = \frac{b^2 - 2ac}{c^2}$$

$\therefore -bc^2 = ab^2 - 2a^2c$

$\therefore 2a^2c = ab^2 + bc^2$

$\therefore bc^2, ca^2, ab^2$ એ સમાંતર શ્રેણીમાં છે. **જવાબ :** (A)

(25) જો $a_1, a_2, ..., a_{10}$ સમાંતર શ્રેણીમાં હોય તથા $\frac{1}{h_1}, \frac{1}{h_2}, ..., \frac{1}{h_{100}}$ સમાંતર શ્રેણીમાં હોય તથા $a_1 = h_1 = 2$ તેમજ $a_{10} = h_{10} = 3$ હોય, તો $a_4h_7 =$ ......

(A) $\frac{1}{6}$ (B) 6 (C) 3 (D) 2

ઉકેલ : $a_1, a_2, a_3, ..., a_{10}$ સમાંતર શ્રેણીમાં છે. જ્યાં $a_1 = 2, a_{10} = 3$ છે.

$\therefore a_{10} = a_1 + 9d.$ આથી, $3 = 2 + 9d.$ આથી, $d = \frac{1}{9}$

$\therefore\ a_4 = a_1 + 3d = 2 + \frac{3}{9} = 2 + \frac{1}{3} = \frac{7}{3}$

હવે $\frac{1}{h_1}, \frac{1}{h_2}, ..., \frac{1}{h_{10}}$ સમાંતર શ્રેણીમાં છે, જ્યાં $h_1 = 2$ તથા $h_{10} = 3$ છે.

$\therefore\ \frac{1}{h_{10}} = \frac{1}{h_1} + 9D.$ આથી $9D = \frac{1}{3} - \frac{1}{2} = \frac{-1}{6}$. આથી $D = \frac{-1}{54}$

$\therefore\ \frac{1}{h_7} = \frac{1}{h_1} + 6D = \frac{1}{2} - \frac{6}{54} = \frac{1}{2} - \frac{1}{9} = \frac{7}{18}$. આથી $h_7 = \frac{18}{7}$

$\therefore\ a_4 \cdot h_7 = \frac{7}{3} \cdot \frac{18}{7} = 6$ **જવાબ :** (B)

(26) $3 \cdot \overline{537} = ...$

(A) $\frac{333}{1178}$ (B) $\frac{1187}{333}$ (C) $\frac{1178}{333}$ (D) $\frac{1871}{333}$

ઉકેલ : $3 \cdot \overline{537} = 3.537537537....$

$= 3 + (0.537 + 0.000537 + 0.000000537 + ...)$

$= 3 + \left[\frac{0.537}{1-0.001}\right]$ $(a = 0.537, r = 0.001)$

$= 3 + \left(\frac{537}{999}\right) = 3 + \left(\frac{179}{333}\right) = \frac{999+179}{333} = \frac{1178}{333}$

નોંધ : $3 + \left(\frac{537}{999}\right)$ = અનાવૃત્ત સંખ્યા + આવૃત્ત અંકોના જૂથના છેદમાં તેટલા જ નવડા. **જવાબ :** (C)

(27) કોઈ સમગુણોત્તર શ્રેણીનાં ત્રણ ક્રમિક પદોનો સરવાળો 38 છે. તેમાં પ્રથમ તથા દ્વિતીય પદમાં 1 ઉમેરવામાં આવે તથા તૃતીય પદમાંથી 1 બાદ કરવામાં આવે તો મળતી સંખ્યાઓ સમાંતર શ્રેણીમાં હોય, તો ત્રણેય સંખ્યાઓમાંથી નાનામાં નાની સંખ્યા ...... હોય.

(A) 6 (B) 8 (C) 12 (D) 18

ઉકેલ : ધારો કે a, ar, ar^2 એ કોઈ સમગુણોત્તર શ્રેણીનાં ત્રણ ક્રમિક પદો છે.

$\therefore\ a + ar + ar^2 = 38$ (1)

હવે, પ્રથમ તથા દ્વિતીય પદમાં 1 ઉમેરવામાં આવે તથા તૃતીય પદમાંથી 1 બાદ કરવામાં આવે, તો મળતી સંખ્યાઓ $a + 1$, $ar + 1$ તથા $ar^2 - 1$ એ સમાંતર શ્રેણીમાં છે.

$\therefore\ 2(ar + 1) = a + 1 + ar^2 - 1$

$\therefore\ 2ar + 2 = 38 - ar$ ((1) પરથી)

$\therefore\ 3ar = 36.$ આથી $ar = 12$ (2)

હવે, (1) પરથી, $a + 12 + 12r = 38.$ આથી $a + 12r = 26$

$\therefore\ a + 12\left(\frac{12}{a}\right) = 26$ $\left(r = \frac{12}{a}\right)$

$\therefore\ a^2 - 26a + 144 = 0.$ આથી $(a - 18)(a - 8) = 0$

$\therefore\ a = 8$ અથવા $a = 18.$ આથી નાનામાં નાની સંખ્યા 8 મળે. (સંખ્યાઓ 8, 12, 16) **જવાબ :** (B)

(28) જો a, b, c સમગુણોત્તર શ્રેણીમાં હોય અને દ્વિઘાત સમીકરણો $ax^2 + 2bx + c = 0$ અને $dx^2 + 2ex + f = 0$ ને એક બીજ સમાન હોય તો $\frac{d}{a}, \frac{e}{b}, \frac{f}{c}$ એ ...... શ્રેણીમાં હોય. $(a, b, c \in R^+)$

(A) સમાંતર (B) સમગુણોત્તર (C) સ્વરિત (D) સમાંતર-સમગુણોત્તર

ઉકેલ : a, b, c સમગુણોત્તર શ્રેણીમાં હોવાથી, $b^2 = ac$

હવે, $ax^2 + 2bx + c = 0$

$\therefore ax^2 + 2\sqrt{ac}\,x + c = 0$ $(b^2 = ac)$

$\therefore (\sqrt{a}\,x + \sqrt{c})^2 = 0$

$\therefore$ એક બીજ $= -\sqrt{\frac{c}{a}}$

હવે, $x = -\sqrt{\frac{c}{a}}$ દ્વિઘાત સમીકરણ $dx^2 + 2ex + f = 0$ નું એક બીજ છે.

$$\therefore d\left(\frac{c}{a}\right) - 2e\sqrt{\frac{c}{a}} + f = 0$$

$$\therefore \frac{dc}{a} - 2e\sqrt{\frac{c}{a}} + f = 0$$

$$\therefore \frac{dc}{a} + f = 2e\sqrt{\frac{c}{a}}$$

$$\therefore \left(\frac{d}{a} + \frac{f}{c}\right) = 2e\sqrt{\frac{1}{ac}} = 2e\left(\sqrt{\frac{1}{b^2}}\right) = \frac{2e}{b}$$

$\therefore \frac{d}{a}, \frac{e}{b}, \frac{f}{c}$ એ સમાંતર શ્રેણીમાં છે. **જવાબ :** (A)

(29) શ્રેણી $\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 + \left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right)^2 + \left(x^3 + \frac{1}{x^3}\right)^2 + \ldots$ નાં પ્રથમ 20 પદોનો સરવાળો ...... મળે.

(A) $\frac{(x^{40}-1)}{x^2-1} + 40$ (B) $\left(\frac{x^{42}+1}{x^{40}}\right) - 40$ (C) $\frac{(x^{40}-1)}{x^2-1}\left(\frac{x^{42}+1}{x^{40}}\right) + 40$ (D) $\left(\frac{x^{40}-1}{x^2-1}\right)\left(\frac{x^{42}+1}{x^{40}}\right)$

ઉકેલ : $\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 + \left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right)^2 + \left(x^3 + \frac{1}{x^3}\right)^2 + \ldots + \left(x^{20} + \frac{1}{x^{20}}\right)^2$

$$= (x^2 + x^4 + x^6 + \ldots + x^{40}) + \left(\frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^4} + \frac{1}{x^6} + \ldots + \frac{1}{x^{40}}\right) + 40$$

$$= \frac{x^2[(x^2)^{20} - 1]}{x^2 - 1} + \frac{\frac{1}{x^2}\left(1 - \frac{1}{(x^2)^{20}}\right)}{\left(1 - \frac{1}{x^2}\right)} + 40$$

$$= \frac{x^2(x^{40} - 1)}{x^2 - 1} + \frac{(x^{40} - 1)}{(x^2 - 1)x^{40}} + 40$$

$$= \left(\frac{x^{40} - 1}{x^2 - 1}\right)\left(x^2 + \frac{1}{x^{40}}\right) + 40 = \left(\frac{x^{40} - 1}{x^2 - 1}\right)\left(\frac{x^{42} + 1}{x^{40}}\right) + 40$$

જવાબ : (C)

(30) જો ΔABC ની બાજુઓનાં માપ a, b, c સમગુણોત્તર શ્રેણીમાં હોય અને $\log a - \log 2b, \log 2b - \log 3c, \log 3c - \log a$ સમાંતર શ્રેણીમાં હોય તો ΔABC નો પ્રકાર...... હોય

(A) કાટકોણ (B) લઘુકોણ (C) ગુરુકોણ (D) સમબાજુ

ઉકેલ : ΔABC ની બાજુઓનાં માપ a, b, c સમગુણોત્તર શ્રેણીમાં છે.

$\therefore b^2 = ac$ (1)

હવે, $\log a - \log 2b, \log 2b - \log 3c, \log 3c - \log a$ સમાંતર શ્રેણીમાં છે એટલે કે,

$\therefore \log\left(\frac{a}{2b}\right), \log\left(\frac{2b}{3c}\right), \log\left(\frac{3c}{a}\right)$ સમાંતર શ્રેણીમાં છે.

$\therefore 2\log\left(\frac{2b}{3c}\right) = \log\left(\frac{a}{2b}\right) + \log\left(\frac{3c}{a}\right)$

$\therefore \log\left(\frac{2b}{3c}\right)^2 = \log\left(\frac{a}{2b} \times \frac{3c}{a}\right)$

$\therefore \frac{4b^2}{9c^2} = \frac{3c}{2b}$

$\therefore 8b^3 = 27c^3$

$\therefore \left(\frac{b}{c}\right)^3 = \frac{27}{8} = \left(\frac{3}{2}\right)^3$

$\therefore \frac{b}{c} = \frac{3}{2}$. હવે, $\frac{b}{c} = \frac{a}{b}$. આથી $\frac{a}{b} = \frac{3}{2}$

$\therefore a = 9k, b = 6k, c = 4k$

હવે, $\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{k^2[36+16-81]}{k^2(2)(6)(4)} = \frac{-29}{48} < 0$

$\therefore A \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$

$\therefore \Delta ABC$ ગુરુકોણ ત્રિકોણ હોય. **જવાબ :** (C)

(31) જો $a_1, a_2, a_3, ..., a_9$ સમગુણોત્તર શ્રેણીમાં હોય તો $\begin{vmatrix} \log a_1 & \log a_2 & \log a_3 \\ \log a_4 & \log a_5 & \log a_6 \\ \log a_7 & \log a_8 & \log a_9 \end{vmatrix} = ...$

(A) 0 (B) –1 (C) $\log a_1 a_9 - 2\log a_5$ (D) $\log a_1 a_9 - 2\log a_1 + 4$

ઉકેલ : ધારો કે $D = \begin{vmatrix} \log a_1 & \log a_2 & \log a_3 \\ \log a_4 & \log a_5 & \log a_6 \\ \log a_7 & \log a_8 & \log a_9 \end{vmatrix}$

હવે $a_2 = ar, a_3 = ar^2, ..., a_9 = ar^8$.

$$D = \begin{vmatrix} \log a & \log a + \log r & \log a + 2\log r \\ \log a + 3\log r & \log a + 4\log r & \log a + 5\log r \\ \log a + 6\log r & \log a + 7\log r & \log a + 8\log r \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} \log a & \log r & \log r \\ \log a + 3\log r & \log r & \log r \\ \log a + 6\log r & \log r & \log r \end{vmatrix} \quad C_{12}(-1), C_{23}(-1) \quad = 0$$

જવાબ : (A)

(32) (444 .... n વખત 4) + (6666 .... n વખત $6)^2$ = ...

(A) $\frac{4}{9}(10^n - 1)$ (B) $\frac{4}{9}(10^n - 1)^2$ (C) $\frac{9}{4} \cdot 10^n(10^n - 1)^2$ (D) $\frac{4}{9} \cdot 10^n(10^n - 1)$

ઉકેલ : (444 .... n વખત 4) $= (4 + 40 + 400 + 4000 + ... + 400 ... 0$ ($n-1$) વખત) $= \frac{4[10^n - 1]}{9}$

(666 .... n વખત 6) $= (6 + 60 + 600 + 6000 + ... + 600 ... 0$ ($n-1$) વખત)

$$= \frac{6[10^n - 1]}{9} = \frac{2}{3}(10^n - 1)$$

$\therefore$ (666 .... n વખત 6)$^2 = \frac{4}{9}(10^n - 1)^2$

$\therefore$ (444 .... n વખત 4) + (666 .... n વખત 6)$^2 = \frac{4}{9}(10^n - 1) + \frac{4}{9}(10^n - 1)^2$

$$= \frac{4}{9}(10^n - 1)[1 + 10^n - 1]$$

$$= \frac{4}{9} \cdot 10^n (10^n - 1)$$

જવાબ : (D)

(33) જો દ્વિઘાત સમીકરણ $x^2 - 3x + p = 0$ નાં બીજ a તથા b હોય અને દ્વિઘાત સમીકરણ $x^2 - 12x + q = 0$ નાં બીજ c તથા d હોય જ્યાં a, b, c, d એ વધતી સમગુણોત્તર શ્રેણી રચે, તો $\frac{q+p}{q-p}$ = ...

(A) $\frac{7}{8}$ (B) $\frac{10}{11}$ (C) $\frac{15}{17}$ (D) $\frac{17}{15}$

ઉકેલ : a તથા b એ સમીકરણ $x^2 - 3x + p = 0$ નાં બીજ હોવાથી, $a + b = 3$ તથા $ab = p$ મળે. (1)
આ જ રીતે સમીકરણ $x^2 - 12x + q = 0$ નાં બીજ c તથા d હોવાથી, $c + d = 12$ તથા $cd = q$ મળે. (2)
હવે a, b, c, d સમગુણોત્તર શ્રેણીમાં છે.
$b = ar,\ c = ar^2,\ d = ar^3$
હવે $a(r+1) = 3,\ ar^2(r+1) = 12,$ (3)
(1) પરથી $a + ar = 3$ અને (2) પરથી $ar^2 + ar^3 = 12$
$\therefore r^2 = 4$

$\therefore ab = a^2r = p,\ cd = a^2r^5 = q$ આથી $\frac{q}{p} = r^4 = \frac{16}{1}$ (3) પરથી

$\therefore \frac{q+p}{q-p} = \frac{17}{15}$ **જવાબ :** (D)

(34) જો ત્રિઘાત સમીકરણ $px^3 + qx^2 + rx + s = 0$ નાં બીજ સમગુણોત્તર શ્રેણીમાં હોય, તો નીચેનામાંથી કયું સત્ય બને ?

(A) $pr^3 = q^3s$ (B) $p^3r = qs^3$ (C) $p^3q = r^3s$ (D) $pq^3 = rs^3$

ઉકેલ : ધારો કે $\frac{a}{r}, a, ar$ એ ત્રિઘાત સમીકરણ $px^3 + qx^2 + rx + s = 0$ નાં બીજ છે.

$\therefore \therefore \frac{a}{r} \cdot a \cdot ar = \frac{-s}{p}$. આથી $a^3 = \frac{-s}{p}$

હવે a એ આપેલ ત્રિઘાત સમીકરણનું બીજ હોવાથી, સમીકરણનું સમાધાન કરે.

$$\therefore p\left\{\left(-\frac{s}{p}\right)^{\frac{1}{3}}\right\}^3 + q\left\{\left(-\frac{s}{p}\right)^{\frac{1}{3}}\right\}^2 + r\left(-\frac{s}{p}\right)^{\frac{1}{3}} + s = 0$$

$$\therefore p\left(-\frac{s}{p}\right) + q\left(-\frac{s}{p}\right)^{\frac{2}{3}} + r\left(-\frac{s}{p}\right)^{\frac{1}{3}} + s = 0$$

$$\therefore q\left(-\frac{s}{p}\right)^{\frac{2}{3}} + r\left(-\frac{s}{p}\right)^{\frac{1}{3}} = 0$$

$$\therefore \frac{q^3s^2}{p^2} = r^3\left(\frac{s}{p}\right)$$

$\therefore\ pr^3 = q^3s$ **જવાબ :** (A)

(35) $x^{\frac{1}{2}} \cdot x^{\frac{1}{4}} \cdot x^{\frac{1}{8}} \cdot x^{\frac{1}{16}} \ldots = \ldots\ldots$

(A) 0 (B) 1 (C) x (D) $\frac{1}{x}$

ઉકેલ : $x^{\frac{1}{2}} \cdot x^{\frac{1}{4}} \cdot x^{\frac{1}{8}} \cdot x^{\frac{1}{16}} \ldots = x^{\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\ldots} = x^{\left[\frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}}\right]} = x^{\frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}}} = x$ **જવાબ :** (C)

(36) કોઈ સમગુણોત્તર શ્રેણીનાં ત્રણ ભિન્ન ક્રમિક પદોના વર્ગોનો સરવાળો s^2 હોય તથા તે ત્રણ સંખ્યાઓનો સરવાળો ps હોય, તો $p^2 \in$ ...... જ્યાં $r \neq \pm 1$

(A) (1, 3) (B) $\left(\frac{1}{3}, 3\right)$ (C) $\left(\frac{1}{3}, 1\right)$ (D) (0, 3)

ઉકેલ : ધારો કે $\frac{a}{r}$, a, ar એ કોઈ સમગુણોત્તર શ્રેણીનાં ત્રણ ક્રમિક પદો છે.

હવે $\frac{a^2}{r^2} + a^2 + a^2r^2 = s^2$ (1)

તથા $\frac{a}{r} + a + ar = ps$ (2)

ધારો કે $r + \frac{1}{r} = x$ જ્યાં $r \neq \pm 1$ હોવાથી $x \neq \pm 2$

હવે (1) પરથી, $a^2\left(r^2 + 1 + \frac{1}{r^2}\right) = s^2$

$\therefore a^2\left[\left(r + \frac{1}{r}\right)^2 - 1\right] = s^2$. આથી $a^2(x^2 - 1) = s^2$ (3)

(2) પરથી, $a\left(r + 1 + \frac{1}{r}\right) = ps$. આથી $a(x + 1) = ps$

$\therefore a^2(x + 1)^2 = p^2s^2$ (4)

$\therefore p^2(x^2 - 1) = (x + 1)^2$ $(p^2s^2 = p^2a^2(x^2 - 1) = a^2(x + 1)^2)$

$$\therefore p^2 = \frac{(x+1)^2}{x^2 - 1} = \frac{x+1}{x-1}$$

$\therefore x = \dfrac{p^2+1}{p^2-1}$.   આથી $r + \dfrac{1}{r} = \dfrac{p^2+1}{p^2-1}$

$\therefore (p^2-1)\,r^2 - (p^2+1)r + (p^2-1) = 0$. આથી $b^2 - 4ac = (p^2+1)^2 - 4\,(p^2-1)^2 \geq 0$

$\therefore (p^2 + 1 - 2\,(p^2-1))\,(p^2 + 1 + 2\,(p^2-1)) \geq 0$ એટલે કે $(3 - p^2)\,(3p^2 - 1) \geq 0$

$\therefore p^2 \leq 3$ તથા $p^2 \geq \dfrac{1}{3}$

પરંતુ $x \neq \pm 2$. આથી $p^2 \neq \dfrac{1}{3}; 3$

$\therefore \dfrac{1}{3} < p^2 < 3$ આથી $p^2 \in \left(\dfrac{1}{3}, 3\right)$ **જવાબ :** (B)

(37) જો a, b, c અને d સમગુણોત્તર શ્રેણીમાં હોય, તો $(a-c)^2 + (b-c)^2 + (b-d)^2 - (a-d)^2 = ...$

(A) 0 (B) $a\,(1-r)$ (C) 1 (D) $a^2\,(1-r^2)$

ઉકેલ : a, b, c, d સમગુણોત્તર શ્રેણીમાં હોવાથી,

$\therefore b = ar,\ c = ar^2;\ d = ar^3$

$\therefore (a-c)^2 + (b-c)^2 + (b-d)^2 - (a-d)^2$

$= (a-ar^2)^2 + (ar-ar^2)^2 + (ar-ar^3)^2 - (a-ar^3)^2$

$= a^2\,[(1-r^2)^2 + r^2(1-r)^2 + r^2(1-r^2)^2 - (1-r^3)^2\,]$

$= a^2\,(1-r)^2\,[(1+r)^2 + r^2 + r^2\,(1+r)^2 - (1+r+r^2)^2\,]$

$= a^2\,(1-r)^2\,[1 + 2r + r^2 + r^2 + 2r^3 + r^4 - 1 - r^2 - r^4 - 2r - 2r^3 - 2r^2]$

$= a^2\,(1-r)^2\,(0) = 0$ **જવાબ :** (A)

બીજી રીત : a, b, c, d સમગુણોત્તર શ્રેણીમાં છે.

$\therefore b^2 = ac,\ c^2 = bd;\ ad = bc$ (1)

$\therefore (a-c)^2 + (b-c)^2 + (b-d)^2 - (a-d)^2$

$= a^2 - 2ac + c^2 + b^2 - 2bc + c^2 + b^2 - 2bd + d^2 - a^2 + 2ad - d^2$

$= a^2 - 2b^2 + c^2 + b^2 - 2bc + c^2 + b^2 - 2c^2 + d^2 - a^2 + 2bc - d^2$ ((1) પરથી)

$= 0$

(38) જો $1 + a + a^2 + a^3 + ... + a^{x-1} = (1+a)\,(1+a^2)\,(1+a^4)$ હોય તો $x = ...$

(A) 6 (B) 7 (C) 8 (D) 9

ઉકેલ : $1 + a + a^2 + a^3 + ... + a^{x-1} = (1+a)\,(1+a^2)\,(1+a^4)$

$\therefore \dfrac{1\cdot[a^x - 1]}{a-1} = (1+a)\,(1+a^2)\,(1+a^4)$

$\therefore 1 - a^x = (1-a)\,(1+a)\,(1+a^2)\,(1+a^4) = 1 - a^8$

$\therefore x = 8$ **જવાબ :** (C)

(39) જો કોઈ સમગુણોત્તર શ્રેણીના p, q તથા r માં પદો અનુક્રમે a, b, c હોય તો $\left(\dfrac{c}{b}\right)^p \left(\dfrac{b}{a}\right)^r \left(\dfrac{a}{c}\right)^q = ...$

(A) 0 (B) 1 (C) abc (D) $\dfrac{1}{abc}$

ઉકેલ : અહીં $t_p = A \cdot R^{p-1} = a$

$t_q = A \cdot R^{q-1} = b$ તથા $t_r = A \cdot R^{r-1} = c$

$\therefore \ \frac{c}{b} = R^{r-1-q+1} = R^{r-q}$ તથા $\frac{b}{a} = R^{q-1-p+1} = R^{q-p}$ તથા $\frac{a}{c} = R^{p-1-r+1} = R^{p-r}$

$\therefore \left(\frac{c}{b}\right)^p \left(\frac{b}{a}\right)^r \left(\frac{a}{c}\right)^q = (R^{r-q})^p (R^{q-p})^r (R^{p-r})^q = R^0 = 1$ **જવાબ :** (B)

(40) કોઈ અનંત ધન સમગુણોત્તર શ્રેણીનાં તમામ પદોનો સરવાળો 7 હોય અને આ તમામ પદોના ઘનનો સરવાળો 49 હોય, તો તે સમગુણોત્તર શ્રેણીનાં બે ક્રમિક પદો વચ્ચેનો સામાન્ય ગુણોત્તર ...... હોય.

(A) $\frac{1}{2}$ (B) $\frac{1}{3}$ (C) $\frac{3}{2}$ (D) $\frac{5}{2}$

ઉકેલ : ધારો કે $a, ar, ar^2, \ldots$ અનંત સમગુણોત્તર શ્રેણી છે.

હવે, $S_\infty = \frac{a}{1-r} = 7$ (1)

વળી, આ સમગુણોત્તર શ્રેણીના તમામ પદોના ઘનનો સરવાળો 49 છે.

$a^3 + a^3r^3 + a^3r^6 + \ldots = 49$

$\therefore S'_\infty = \frac{a^3}{1-r^3} = 49$

$\therefore \frac{a}{1-r} \ \frac{a^2}{(1+r+r^2)} = 49$

$\therefore \frac{7 \cdot a^2}{1+r+r^2} = 49.$ આથી $\frac{a^2}{1+r+r^2} = 7$ (2)

વળી, (1) પરથી, $a^2 = 49(1-r)^2 = 49(1-2r+r^2)$

$\therefore 49(1-2r+r^2) = 7(1+r+r^2)$ ((2) પરથી)

$\therefore \ 7 - 14r + 7r^2 = 1 + r + r^2$

$\therefore 2r^2 - 5r + 2 = 0$

$\therefore r = 2$ અથવા $r = \frac{1}{2}$. પરંતુ $|r| < 1$

$\therefore r = \frac{1}{2}$ **જવાબ :** (A)

(41) જો $0 < x, y, a, b < 1$ હોય, તો $\sqrt{x}\left(\sqrt{a}+\sqrt{x}\right) + \sqrt{x}\left(\sqrt{ab}+\sqrt{xy}\right) + \sqrt{x}\left(b\sqrt{a}+y\sqrt{x}\right) + \ldots = \ldots\ldots$

(A) $\frac{\sqrt{x}}{1+\sqrt{b}} + \frac{\sqrt{x}}{1+\sqrt{y}}$ (B) $\frac{\sqrt{ax}}{1-\sqrt{b}} + \frac{x}{1-\sqrt{y}}$ (C) $\frac{ax}{1-\sqrt{b}} + \frac{\sqrt{x}}{1+\sqrt{y}}$ (D) $\frac{\sqrt{ax}}{1+\sqrt{b}} + \frac{x}{1+\sqrt{y}}$

ઉકેલ : $\sqrt{x}\left(\sqrt{a}+\sqrt{x}\right) + \sqrt{x}\left(\sqrt{ab}+\sqrt{xy}\right) + \sqrt{x}\left(b\sqrt{a}+y\sqrt{x}\right) + \ldots$

$= \left(\sqrt{ax}+\sqrt{abx}+\sqrt{ab^2x}+\ldots\right) + \left(x+x\sqrt{y}+xy+\ldots\right)$

$= \left(\frac{\sqrt{ax}}{1-\sqrt{b}}\right) + \left(\frac{x}{1-\sqrt{y}}\right)$ **જવાબ :** (B)

(42) જો $a = 0.2$, $b = \sqrt{5}$ તથા $x = \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \ldots \infty$ હોય, તો $a^{\log_b x} = \ldots\ldots$

(A) 0 (B) 2 (C) 4 (D) $\frac{1}{2}$

ઉકેલ : $a^{\log_b x} = (0.2)^{\log_{\sqrt{5}}(\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+...)}$

$$= \left(\frac{1}{5}\right)^{\log_{\sqrt{5}}\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+.....\infty\right)}$$

$$= (\sqrt{5})^{-2\log_{\sqrt{5}}\left(\frac{\frac{1}{4}}{1-\frac{1}{2}}\right)}$$

$$= (\sqrt{5})^{-2\log_{\sqrt{5}}\left(\frac{1}{2}\right)}$$

$$= \left(\frac{1}{2}\right)^{-2} = 4$$

જવાબ : (C)

(43) જો x, y, z એ સ્વરિત શ્રેણીમાં હોય, તો નીચેનામાંથી કયું સત્ય બને ?

(A) $x + z = 2y$ (B) $y^2 = zx$ (C) $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{z}$ (D) $\sqrt{zx} > y$

ઉકેલ : x, y, z એ સ્વરિત શ્રેણીમાં છે.

$\therefore \frac{1}{x}, \frac{1}{y}, \frac{1}{z}$ સમાંતર શ્રેણીમાં છે. $\frac{1}{y}$ એ $\frac{1}{x}$ તથા $\frac{1}{z}$ નો સમાંતર મધ્યક છે.

હવે A > G હોવાથી $\frac{1}{y} > \frac{1}{\sqrt{zx}}$

$\therefore y < \sqrt{zx}$

જવાબ : (D)

નોંધ : G > H. આથી $\sqrt{xz} > y$.

(44) જો x, y, z એ સ્વરિત શ્રેણીમાં હોય, તો $\frac{x}{y+z}, \frac{y}{z+x}, \frac{z}{x+y}$ ...... શ્રેણીમાં હોય.

(A) સમાંતર (B) સમગુણોત્તર (C) સ્વરિત (D) સમાંતર-સમગુણોત્તર

ઉકેલ : x, y, z એ સ્વરિત શ્રેણીમાં છે.

$\therefore \frac{1}{x}, \frac{1}{y}, \frac{1}{z}$ સમાંતર શ્રેણીમાં છે.

$\therefore \frac{2}{y} = \frac{1}{x} + \frac{1}{z} = \frac{z+x}{xz}$. આથી $2zx = xy + yz$ (1)

$$\frac{y+z}{x} + \frac{x+y}{z} = \frac{yz+z^2+x^2+xy}{zx}$$

$$= \frac{z^2+x^2+2zx}{zx} \text{ ((1) પરથી) } = \frac{(z+x)^2}{zx} = (z+x)\left(\frac{z+x}{zx}\right) = \frac{2(z+x)}{y}$$

$\therefore \frac{y+z}{x}, \frac{z+x}{y}, \frac{x+y}{z}$ સમાંતર શ્રેણીમાં છે.

$\therefore \frac{x}{y+z}, \frac{y}{z+x}, \frac{z}{x+y}$ સ્વરિત શ્રેણીમાં છે.

જવાબ : (C)

બીજી રીત : $\frac{1}{x}, \frac{1}{y}, \frac{1}{z}$ સમાંતર શ્રેણીમાં છે.

$\therefore \frac{x+y+z}{x}, \frac{x+y+z}{y}, \frac{x+y+z}{z}$ સમાંતર શ્રેણીમાં છે.

$\therefore \quad 1 + \frac{y+z}{x}, 1 + \frac{z+x}{y}, 1 + \frac{x+y}{z}$ સમાંતર શ્રેણીમાં છે.

$\therefore \quad \frac{y+z}{x}, \frac{z+x}{y}, \frac{x+y}{z}$ સમાંતર શ્રેણીમાં છે.

$\therefore \quad \frac{x}{y+z}, \frac{y}{z+x}, \frac{z}{x+y}$ સ્વરિત શ્રેણીમાં છે.

(45) જો a, b, c સમાંતર શ્રેણીમાં હોય, b, c, d સમગુણોત્તર શ્રેણીમાં હોય તથા c, d, e સ્વરિત શ્રેણીમાં હોય, તો a, c, e ...... શ્રેણીમાં હોય.

(A) સમાંતર (B) સમગુણોત્તર (C) સ્વરિત (D) સમાંતર-સમગુણોત્તર

ઉકેલ : a, b, c સમાંતર શ્રેણીમાં છે.

$\therefore 2b = a + c$ (1)

b, c, d સમગુણોત્તર શ્રેણીમાં છે.

$\therefore c^2 = bd$ (2)

c, d, e સ્વરિત શ્રેણીમાં છે.

આથી $d = \frac{2ce}{c+e}$

(1) તથા (2) પરથી,

$c^2 = \left(\frac{a+c}{2}\right)\left(\frac{2ce}{c+e}\right) = \frac{ce(a+c)}{(c+e)}$. આથી $c = \frac{e(a+c)}{c+e}$ (3)

$\therefore \quad c^2 + ce = ae + ec$

$\therefore c^2 = ae$

$\therefore a, c, e$ સમગુણોત્તર શ્રેણીમાં છે.

બીજી રીત : (3) થી

$\frac{c}{e} = \frac{a+c}{c+e} = \frac{a+c-c}{c+e-e}$

$= \frac{a}{c}$

$\therefore c^2 = ae$

જવાબ : (B)

(46) જો x, y, z એ સ્વરિત શ્રેણીમાં હોય, તો $\frac{x+y}{y-x} + \frac{y+z}{y-z} = ...$

(A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4

ઉકેલ : x, y, z સ્વરિત શ્રેણીમાં છે. આથી $y = \frac{2zx}{z+x}$ (1)

$\therefore \frac{y}{x} = \frac{2z}{z+x}$

$\therefore \frac{y+x}{y-x} = \frac{2z+z+x}{2z-z-x} = \frac{3z+x}{z-x}$ (યોગ-વિયોગ પ્રમાણ) (2)

હવે (1) પરથી, $\frac{y}{z} = \frac{2x}{z+x}$

$\therefore \frac{y+z}{y-z} = \frac{2x+z+x}{2x-z-x} = \frac{3x+z}{x-z}$ (યોગ-વિયોગ પ્રમાણ) (3)

$\therefore$ (2) તથા (3) પરથી,

$\frac{y+x}{y-x} + \frac{y+z}{y-z} = \frac{3z+x}{z-x} + \frac{3x+z}{x-z}$

$= \frac{3z+x}{z-x} - \frac{3x+z}{z-x} = \frac{2z-2x}{z-x} = 2$

જવાબ : (B)

(47) જો કોઈ સ્વરિત શ્રેણીના p, q, r માં પદો અનુક્રમે x, y, z હોય, તો $\begin{vmatrix} yz & xz & xy \\ p & q & r \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$ = ...

(A) 0 (B) 1 (C) $\dfrac{1}{xyz}$ (D) xyz

ઉકેલ : અહીં t_p, t_q, t_r સ્વરિત શ્રેણીમાં છે.

$$\begin{vmatrix} yz & xz & xy \\ p & q & r \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = xyz \begin{vmatrix} \frac{1}{x} & \frac{1}{y} & \frac{1}{z} \\ p & q & r \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \qquad R_1\left(\frac{1}{xyz}\right)$$

$$= xyz \begin{vmatrix} a+(p-1)d & a+(q-1)d & a+(r-1)d \\ p & q & r \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

જવાબ : (A)

(48) જો a, b, c એ સમાંતર શ્રેણીમાં હોય p, q, r સ્વરિત શ્રેણીમાં હોય અને pa, qb, cr એ સમગુણોત્તર શ્રેણીમાં હોય, તો $\dfrac{p}{r} + \dfrac{r}{p}$ = ...

(A) $\dfrac{a}{c} - \dfrac{c}{a}$ (B) $\dfrac{a}{b} - \dfrac{b}{c}$ (C) $\dfrac{a}{c} + \dfrac{c}{a}$ (D) $\dfrac{p}{q} + \dfrac{q}{r}$

ઉકેલ : a, b, c એ સમાંતર શ્રેણીમાં છે. આથી $2b = a + c$ (1)

p, q, r સ્વરિત શ્રેણીમાં છે. આથી $\dfrac{2}{q} = \dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{r} = \dfrac{p+r}{pr}$

આથી $p + r = \dfrac{2pr}{q}$ (2)

pa, qb, rc સમગુણોત્તર શ્રેણીમાં છે.

$\therefore q^2b^2 = pacr$ (3)

હવે, $\dfrac{p}{r} + \dfrac{p}{p}$ —

$$\frac{p}{r} + \frac{r}{p} = \frac{p^2+r^2}{pr} = \frac{(p+r)^2-2pr}{pr}$$

$$= \frac{\frac{4p^2r^2}{q^2}-2pr}{pr} \qquad \text{((2) પરથી)}$$

$$= \frac{4pr}{q^2} - 2$$

$$= \frac{4b^2}{ac} - 2 \qquad \text{((3) પરથી)}$$

$$= \frac{(a+c)^2}{ac} - 2 = \frac{a^2+c^2}{ac} = \frac{a}{c} + \frac{c}{a}$$

જવાબ : (C)

(49) જો $\dfrac{a^n+b^n}{a^{n-1}+b^{n-1}}$ એ સંખ્યાઓ a અને b નો સમાંતર મધ્યક હોય, તો n = ... $(a \neq b)$

(A) 0 (B) – 1 (C) 1 (D) 2

ઉકેલ : સમાંતર મધ્યક $A = \dfrac{a+b}{2} = \dfrac{a^n+b^n}{a^{n-1}+b^{n-1}}$

$\therefore a^n + ab^{n-1} + ba^{n-1} + b^n = 2a^n + 2b^n$

$\therefore ab^{n-1} + ba^{n-1} = a^n + b^n$

$\therefore ab^{n-1} - b^n = a^n - ba^{n-1}$

$\therefore b^{n-1}(a-b) = a^{n-1}(a-b)$

જો $a \neq b$ તો $a^{n-1} = b^{n-1}$

હવે $a \neq b$ હોવાથી $n - 1 = 0$. આથી $n = 1$ **જવાબ :** (C)

(50) સંખ્યાઓ 2 અને 23 વચ્ચે કુલ છ સમાંતર મધ્યકો આવેલાં હોય, તો આ તમામ સમાંતર મધ્યકોનો સરવાળો ...... થાય.

(A) 57 (B) 63 (C) 70 (D) 75

ઉકેલ : $a = 2, b = 23; n = 6, d = \dfrac{b-a}{n+1} = \dfrac{21}{7} = 3$

ધારો કે $a + d, a + 2d, a + 3d, a + 4d, a + 5d, a + 6d$ આ છ સમાંતર મધ્યકો સંખ્યાઓ 2 અને 23 ની વચ્ચે આવેલાં છે.

$\therefore$ છ સમાંતર મધ્યકોનો સરવાળો $= 6a + 21d = 6(2) + 21(3) = 12 + 63 = 75$ **જવાબ :** (D)

(51) સંખ્યાઓ 5 અને 21 ની વચ્ચે n સમાંતર મધ્યકો ઉમેરતાં બનતી સમાંતર શ્રેણીનાં તમામ પદોનો સરવાળો 117 થાય તો n = ...

(A) 5 (B) 6 (C) 7 (D) 8

ઉકેલ : અહીં $a = 5, b = 21$ તથા $d = \dfrac{b-a}{n+1}$

અહીં $S_{n+2} = \dfrac{n+2}{2}(a+b)$

$\therefore 117 = \dfrac{n+2}{2}(a+b) = \dfrac{n+2}{2}(26) = 13(n+2)$

$\therefore 9 = n + 2$ આથી $n = 7$ **જવાબ :** (C)

(52) કોઈ બે ભિન્ન સંખ્યાઓ a અને b નો સમાંતર મધ્યક 2, ગુણોત્તર મધ્યક 4 હોય તો તે બે સંખ્યાઓનો સ્વરિત મધ્યક ...... મળે.

(A) 4 (B) 2 (C) 6 (D) 8

ઉકેલ : અહીં $A = \dfrac{a+b}{2} = 2.$ આથી $a + b = 4$ (1)

$G = \sqrt{ab} = 4.$ આથી $ab = 16$ (2)

$\therefore H = \dfrac{2ab}{a+b} = \dfrac{2(16)}{4} = 8$

અથવા $AH = G^2$ પરથી $H = \dfrac{G^2}{A} = \dfrac{16}{2} = 8$ **જવાબ :** (D)

(53) બે સંખ્યાઓ a અને b વચ્ચે સમાંતર મધ્યકો A, તથા A_2. સમગુણોત્તર મધ્યકો G_1, G_2 તથા સ્વરિત મધ્યકો H_1 અને H_2 હોય, તો $\frac{A_1+A_2}{H_1+H_2}$ = ...

(A) $\frac{A_1A_2}{G_1G_2}$ (B) $\frac{G_1G_2}{A_1A_2}$ (C) $\frac{G_1G_2}{H_1H_2}$ (D) $\frac{H_1H_2}{G_1G_2}$

ઉકેલ : અહીં a, A_1, A_2, b સમાંતર શ્રેણી રચે.

$\therefore\ A_1 = \frac{a+A_2}{2},\ A_2 = \frac{A_1+b}{2}$

$\therefore\ A_1 + A_2 = \frac{a+A_1+A_2+b}{2}$

$\therefore\ A_1 + A_2 = a + b$ (1)

આ જ રીતે, a, G_1, G_2, b સમગુણોત્તર શ્રેણીમાં હોવાથી $G_1 = \sqrt{aG_2}$ અને $G_2 = \sqrt{bG_1}$

$\therefore\ G_1G_2 = \sqrt{abG_1G_2}$ આથી $G_1G_2 = ab$ (2)

તથા a, H_1, H_2, b સ્વરિત શ્રેણીમાં હોવાથી $\frac{1}{a}, \frac{1}{H_1}, \frac{1}{H_2}, \frac{1}{b}$ સમાંતર શ્રેણીમાં થાય.

$\therefore\ \frac{1}{H_1} + \frac{1}{H_2} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b}.$ (3)

આથી $\frac{H_1+H_2}{H_1H_2} = \frac{a+b}{ab} = \frac{A_1+A_2}{G_1G_2}$

$\therefore\ \frac{A_1+A_2}{H_1+H_2} = \frac{G_1G_2}{H_1H_2}$ ((2) પરથી) **જવાબ :** (C)

(54) જો બે ધન વાસ્તવિક સંખ્યાઓ a અને b ના સ્વરિત મધ્યક અને સમગુણોત્તર મધ્યકનો ગુણોત્તર 4:5 હોય તો તે બે સંખ્યાઓનો ગુણોત્તર ...... મળે.

(A) 1 : 4 (B) 4:1 (C) 3:4 (D) 4:3

ઉકેલ : અહીં સ્વરિત મધ્યક $H = \frac{2ab}{a+b}$ તથા ગુણોત્તર મધ્યક $G = \sqrt{ab}$ છે.

વળી, $\frac{2ab}{\sqrt{ab}\,(a+b)} = \frac{4}{5}$

$\therefore\ \frac{2\sqrt{ab}}{a+b} = \frac{4}{5}.$ આથી $2a - 5\sqrt{ab} + 2b = 0$

$\therefore\ (\sqrt{a} - 2\sqrt{b})(2\sqrt{a} - \sqrt{b}) = 0$

$\therefore\ \frac{a}{b} = 4$ અથવા $\frac{1}{4}$

બીજી રીત :

$\frac{A}{G} = \frac{5}{4}$ $\left(\frac{A}{G} = \frac{G}{H}\right)$

$\therefore\ \frac{a+b}{2\sqrt{ab}} = \frac{5}{4}$

$\therefore\ 4(a+b)^2 = 25ab$

$\therefore\ 4a^2 - 17ab + 4b^2 = 0$

$\therefore\ (4a - b)(a - 4b) = 0$

$\therefore\ \frac{a}{b} = 4$ or $\frac{1}{4}$

જવાબ : (A), (B)

(55) જો a, b, c સમગુણોત્તર શ્રેણીમાં હોય અને x એ a તથા b નો સમાંતર મધ્યક હોય તથા y એ b અને c નો સમાંતર મધ્યક હોય તો $\frac{1}{x} + \frac{1}{y}$ = ...

(A) $\frac{1}{2}$ (B) 2 (C) $\frac{2}{a}$ (D) $\frac{2}{b}$

ઉકેલ : a, b, c સમગુણોત્તર શ્રેણીમાં છે. આથી $b^2 = ac$ (1)

હવે x એ a તથા b નો સમાંતર મધ્યક છે. આથી $x = \frac{a+b}{2}$ (2)

તેમજ y એ b તથા c નો સમાંતર મધ્યક છે. આથી $y = \frac{b+c}{2}$ (3)

હવે $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{x+y}{xy} = \frac{\frac{a+b}{2}+\frac{b+c}{2}}{\left(\frac{a+b}{2}\right)\left(\frac{b+c}{2}\right)}$

$$= \frac{2(a+2b+c)}{(ab+ac+bc+b^2)} = \frac{2(a+c+2b)}{(ab+b^2+bc+b^2)}$$ ((1) પરથી)

$$= \frac{2(a+c+2b)}{(ab+bc+2b^2)} = \frac{2(a+c+2b)}{b(a+c+2b)}$$

$\therefore \quad \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{2}{b}$ **જવાબ :** (D)

બીજી રીત :

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{2}{a+b}+\frac{2}{b+c} = \frac{2}{a+\sqrt{a}\sqrt{c}}+\frac{2}{\sqrt{a}\sqrt{c}+c}$$

$$= \frac{2}{\sqrt{a}\left(\sqrt{a}+\sqrt{c}\right)}+\frac{2}{\sqrt{c}\left(\sqrt{a}+\sqrt{c}\right)}$$

$$= \frac{2\left(\sqrt{a}+\sqrt{c}\right)}{\sqrt{a}\sqrt{c}\left(\sqrt{a}+\sqrt{c}\right)} = \frac{2}{\sqrt{ac}} = \frac{2}{b}$$ **જવાબ :** (D)

(56) જો સંખ્યાઓ 1 અને $\frac{1}{a}$ વચ્ચે $H_1, H_2, H_3 .... H_{10}$ સ્વરિત મધ્યકો હોય, તો $\frac{H_1}{H_{10}}$ = ...

(A) $\frac{10+a}{10a+1}$ (B) $\frac{10+a}{a+1}$ (C) $\frac{10a+1}{10+a}$ (D) $\frac{10-a}{10a-1}$

ઉકેલ : અહીં $1, H_1, H_2, H_3 ..., H_{10}, \frac{1}{a}$ સ્વરિત શ્રેણીમાં છે.

$\therefore 1, \frac{1}{H_1}, \frac{1}{H_2}, ..., \frac{1}{H_{10}}, a$ સમાંતર શ્રેણીમાં છે, જ્યાં $d = \frac{a-1}{11}$

અહીં $H_1 = \frac{1}{1+d}, H_2 = \frac{1}{1+2d}, ..., H_{10} = \frac{1}{1+10d}$

$$\therefore \frac{H_1}{H_{10}} = \frac{1+10d}{1+d} = \frac{1+10\left(\frac{a-1}{11}\right)}{1+\left(\frac{a-1}{11}\right)} = \frac{11+10a-10}{11+a-1} = \frac{1+10a}{10+a}$$ **જવાબ :** (C)

(57) બે સંખ્યાઓ a અને b વચ્ચેનો એક સમાંતર મધ્યક A હોય તથા p અને q તે બે સંખ્યાઓ a અને b વચ્ચેના બે ગુણોત્તર મધ્યકો હોય, તો 2A = ...

(A) $\frac{p^3 - q^3}{pq}$ (B) $\frac{p^3 + q^3}{pq}$ (C) $\frac{p^2 + q^2}{pq}$ (D) $\frac{p+q}{2}$

ઉકેલ : a, p, q, b સમગુણોત્તર શ્રેણીમાં હોવાથી,

$\sqrt{aq} = p$ તથા $q = \sqrt{pb}$ $\Rightarrow aq = p^2$ અને $q^2 = pb$

$\therefore a = \frac{p^2}{q}$ અને $b = \frac{q^2}{p}$ (1)

હવે A સમાંતર મધ્યક હોવાથી, $A = \frac{a+b}{2}$

$\therefore 2A = a + b = \frac{p^2}{q} + \frac{q^2}{p} = \frac{p^3 + q^3}{pq}$ **જવાબ :** (B)

(58) બે ધન વાસ્તવિક સંખ્યાઓ a અને b વચ્ચેના બે સમાંતર મધ્યકો p તથા q હોય અને G ગુણોત્તર મધ્યક હોય, તો G^2 = ...

(A) $(2p - q)(p - 2q)$ (B) $(2p - q)(2q + p)$ (C) $(2p + q)(2q + p)$ (D) $(2p - q)(2q - p)$

ઉકેલ : p તથા q સમાંતર મધ્યકો હોવાથી, બે ધન વાસ્તવિક સંખ્યાઓ a તથા b માટે, a, p, q, b સમાંતર શ્રેણી રચે.

$\therefore p = \frac{a+q}{2}, q = \frac{b+p}{2}$

$\therefore a = 2p - q, b = 2q - p$ (1)

હવે $G^2 = ab$ (G ગુણોત્તર મધ્યક છે.)

$\therefore G^2 = (2p - q)(2q - p)$ ((1) પરથી) **જવાબ :** (D)

(59) જો $p = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$, $q = \sum_{n=0}^{\infty} y^n$, $r = \sum_{n=0}^{\infty} (xy)^n$ હોય (જ્યાં $|x|, |y| < 1$) તો નીચેનામાંથી કયું સત્ય બને ?

(A) $pq - r = pr - qr$ (B) $pq + r = pr + qr$ (C) $pr + q = pq + qr$ (D) $qr + p = pr + pq$

ઉકેલ : અહીં $p = \sum_{n=0}^{\infty} x^n = (1 + x + x^2 + x^3 + ...) = \frac{1}{1-x}$

$q = \sum_{n=0}^{\infty} y^n = (1 + y + y^2 + y^3 + ...) = \frac{1}{1-y}$

$r = \sum_{n=0}^{\infty} (xy)^n = (1 + xy + x^2y^2 + x^3y^3 + ...) = \frac{1}{1-xy}$

હવે $pq = \frac{1}{(1-x)(1-y)} = \frac{1}{1-x-y+xy}$

$\therefore pq + r = \frac{1}{1-x-y+xy} + \frac{1}{1-xy} = \frac{1-xy+1-x-y+xy}{(1-xy)(1-x-y+xy)}$

$= \frac{2-x-y}{(1-x)(1-y)(1-xy)}$ (1)

$pr = \frac{1}{(1-x)(1-yx)}$ તથા $qr = \frac{1}{(1-y)(1-xy)}$

$$\therefore\ pr + qr = \frac{1}{(1-x)\,(1-xy)} + \frac{1}{(1-y)\,(1-xy)}$$

$$= \frac{1-y+1-x}{(1-x)\,(1-y)\,(1-xy)}$$

$$= \frac{2-x-y}{(1-x)\,(1-y)\,(1-xy)} \qquad (2)$$

$\therefore$ (1) તથા (2) પરથી, $pq + r = pr + qr$ **જવાબ :** (B)

(60) શ્રેઢી $(1^2 - 2^2) + (3^2 - 4^2) + (5^2 - 6^2) + ...$ માટે $S_n = ...$

(A) $-n\,(n+1)$ (B) $-2n\,(n+1)$ (C) $-n\,(2n+1)$ (D) $2n+1$

ઉકેલ : અહીં $(1^2 - 2^2) + (3^2 - 4^2) + (5^2 - 6^2) + ...$ n પદ સુધી

$= (1^2 + 3^2 + 5^2 + ...$ n પદ સુધી$) - (2^2 + 4^2 + 6^2 + ...$ n પદ સુધી$)$

$= \sum [1 + (n-1)2]^2 - 2^2\,[1^2 + 2^2 + 3^2 + ...$ n પદ સુધી$]$

$= \sum\ (2n-1)^2 - 4\,(\sum n^2)$

$= \sum\ (4n^2 - 4n + 1) - 4\,(\sum n^2)$

$= 4\Sigma n^2 - 4\Sigma n + \Sigma 1 - 4\,\Sigma n^2$

$= -\,4\Sigma n + \Sigma 1 = \dfrac{-4n(n+1)}{2} + n$

$= -2n\,(n+1) + n = n\,(-2n - 2 + 1)$

$= -n\,(2n+1)$

બીજી રીત :

$$\sum\left[(2n-1)^2 - (2n)^2\right] = \sum(-4n+1)$$

$$= \frac{-4n(n+1)}{2} + n$$

$$= -2n^2 - n = -n\,(2n+1)$$ **જવાબ :** (C)

ત્રીજી રીત : $(1^2 - 2^2) + (3^2 - 4^2) + (5^2 - 6^2) + ...+[(2n-1)^2 - (2n)^2]$

$= (-1)[1 + 2 + 3 + 4 + ...+ 2n - 1 + 2n\,]$

$= \dfrac{(-1)2n(2n+1)}{2} = -\,n\,(2n+1)$

(61) શ્રેણી $i, -2, -3i, 4, 5i$ ... નાં પ્રથમ 50 પદોનો સરવાળો ...... થાય.

(A) $25 + 25i$ (B) $-25 + 25i$ (C) $-26 - 25i$ (D) $-26 + 25i$

ઉકેલ : $i, -2, -3i, 4, 5i$ ... $= i, 2i^2, 3i^3, 4i^4, ...$

$\therefore$ 50 મું પદ $50i^{50}$ થાય.

$\therefore\ S_{50} = i + 2i^2 + 3i^3 + 4i^4 + 5i^5 + ... + 50i^{50}$ (1)

$\therefore\ iS_{50} = i^2 + 2i^3 + 3i^4 + 4i^5 + 5i^6 + ... + 50i^{51}$ (2)

$\therefore$ (1) તથા (2) પરથી,

$$S_{50} - iS_{50} = i + [i^2 + i^3 + i^4 + ... + i^{50}] - 50i^{51}$$

$$\therefore S_{50}(1-i) = i + \frac{i^2(1-i^{49})}{(1-i)} - 50i^{51}$$

$$= i - \frac{(1-i^{48}\cdot i)}{(1-i)} - 50i^{51} = i - \frac{(1-i)}{(1-i)} - 50i^{48}.\ i^2 .\ i$$

$$\therefore S_{50}(1-i) = i - 1 + 50i = -1 + 51i$$

$$\therefore S_{50} = \frac{-1+51i}{1-i} = \frac{-1+51i}{(1-i)} \times \frac{(1+i)}{(1+i)}$$

$$= \frac{-1-i+51i+51i^2}{1-i^2} = \frac{-52+50i}{2} = -26 + 25i$$

જવાબ : (D)

(62) શ્રેણી 20, $19\frac{1}{3}$, $18\frac{2}{3}$, ... નો મહત્તમ સરવાળો ...... મળે.

(A) 300 (B) 310 (C) 320 (D) 340

ઉકેલ : 20, $19\frac{1}{3}$, $18\frac{2}{3}$, ...

$= \frac{60}{3}, \frac{58}{3}, \frac{56}{3}$, ... નું n મું પદ ધન હોય તો તમામ પદોનો સરવાળો મહત્તમ થાય અને $(n+1)$મું પદ ઋણ થાય.

$\therefore a = \frac{60}{3}$, $d = \frac{-2}{3}$ લેતાં,

$$t_n = \frac{60}{3} + (n-1)\left(\frac{-2}{3}\right)$$

$$= \frac{60}{3} - \frac{2n}{3} + \frac{2}{3}$$

$$= \frac{62}{3} - \frac{2n}{3}$$

હવે $t_n \geq 0$ લેતાં, $62 - 2n \geq 0$. આથી $62 \geq 2n$

$\therefore n \leq 31$

$\therefore$ મહત્તમ સરવાળા માટે 31 પદની જરૂર પડે.

$$\therefore S_{31} = \frac{31}{2}\left[2(20) + (31-1)\left(\frac{-2}{3}\right)\right] = \frac{31}{2}[40 - 20] = 310$$

જવાબ : (B)

(63) શ્રેઢી $\frac{1}{1+1^2+1^4} + \frac{2}{1+2^2+2^4} + \frac{3}{1+3^2+3^4} + ...$ ના n પદોનો સરવાળો ...... મળે.

(A) $\frac{n^2+1}{n^2+n+1}$ (B) $\frac{n(n+1)}{2(n^2+n+1)}$ (C) $\frac{n+1}{n^2+n+1}$ (D) $\frac{n-1}{2n^2+n+3}$

ઉકેલ : અહીં $\frac{1}{1+1^2+1^4} + \frac{2}{1+2^2+2^4} + \frac{3}{1+3^2+3^4} + ...$ આપેલ છે, જેનું n મું પદ $\frac{n}{1+n^2+n^4}$ મળે.

હવે આ તમામ પદોનો સરવાળો $S_n = \sum \frac{n}{1+n^2+n^4}$

$$= \sum \frac{n}{(n^2+1-n)(n^2+1+n)}$$

$$= \frac{1}{2}\sum \frac{2n}{(n^2+n+1)(n^2-n+1)}$$

$$\therefore S_n = \frac{1}{2}\sum \left[\frac{(n^2+n+1)-(n^2-n+1)}{(n^2+n+1)(n^2-n+1)}\right]$$

$$= \frac{1}{2}\sum \left[\frac{1}{n^2-n+1} - \frac{1}{n^2+n+1}\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[\left(1-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{7}\right)+\left(\frac{1}{7}-\frac{1}{13}\right)+\ldots+\left(\frac{1}{1+n(n-1)}-\frac{1}{1+n(n+1)}\right)\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[1-\frac{1}{1+n(n+1)}\right] = \frac{1}{2}\left[\frac{1+n^2+n-1}{1+n(n+1)}\right] = \frac{n(n+1)}{2(1+n^2+n)}$$

જવાબ : (B)

(64) $\frac{1}{2}+\frac{3}{4}+\frac{7}{8}+\frac{15}{16}+\frac{31}{32}+\ldots$ નાં n પદોનો સરવાળો ...... થાય. (IIT : 1988)

(A) $2^{-n}+n-1$ (B) 2^{-n} (C) $2^n \cdot n - 2^n + 1$ (D) $2^n - n + 1$

ઉકેલ : $\frac{1}{2}+\frac{3}{4}+\frac{7}{8}+\frac{15}{16}+\frac{31}{32}+\ldots$ n પદ સુધી

$= \left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(1-\frac{1}{4}\right)+\left(1-\frac{1}{8}\right)+\left(1-\frac{1}{16}\right)+\left(1-\frac{1}{32}\right)+\ldots$ n પદ સુધી

$$= \left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(1-\frac{1}{2^2}\right)+\left(1-\frac{1}{2^3}\right)+\ldots+\left(1-\frac{1}{2^n}\right)$$

$$= \sum\left(1-\frac{1}{2^n}\right) = \Sigma 1 - \Sigma 2^{-n}$$

$= n - \left[\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\ldots n \text{ પદ સુધી}\right] = n - \left[\frac{\frac{1}{2}\cdot\left(1-\frac{1}{2^n}\right)}{1-\frac{1}{2}}\right] = n-(1-2^{-n}) = 2^{-n}+n-1$ **જવાબ :** (A)

(65) જો $1^3+2^3+3^3+\ldots+n^3 = 2025$ હોય, તો $n =$ ......

(A) 8 (B) 9 (C) 10 (D) 11

ઉકેલ : અહીં $1^3+2^3+3^3+\ldots+n^3 = 2025$

$\therefore \Sigma n^3 = 2025$

$$\therefore \frac{n^2(n+1)^2}{4} = 2025$$

$\therefore \dfrac{n(n+1)}{2} = 45$

$\therefore n^2 + n - 90 = 0.$ આથી $(n + 10)(n - 9) = 0.$ આથી $n = 9$ **જવાબ :** (B)

(66) $\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{i}\sum_{k=1}^{j} 1 = \ldots\ldots$

(A) $\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ (B) $\dfrac{n(n+1)}{2}$ (C) $\dfrac{n(n+1)(n+2)}{6}$ (D) $\dfrac{n^2(n+1)^2}{4}$

ઉકેલ : $\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{i}\sum_{k=1}^{j} 1$

$\displaystyle = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{i} j$ ($\Sigma 1 = n$ અને $n = j$)

$\displaystyle = \sum_{i=1}^{n} \frac{i(i+1)}{2} = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} i(i+1)$

$\displaystyle = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}(i^2+i) = \frac{1}{2}\left[\Sigma n^2 + \Sigma n\right]$

$\displaystyle = \frac{1}{2}\left[\frac{n\cdot(n+1)(2n+1)}{6} + \frac{n(n+1)}{2}\right]$

$\displaystyle = \frac{n(n+1)}{4}\left[\frac{2n+1}{3}+1\right] = \frac{n(n+1)}{4}\left(\frac{2n+4}{3}\right) = \frac{n(n+1)(n+2)}{6}$ **જવાબ :** (C)

(67) જો $S_n = 1 + (1+2) + (1+2+3) + (1+2+3+4) + \ldots$ n કૌંસ સુધી હોય, તો $S_n = \ldots\ldots$

(A) $\dfrac{n(n+1)(n+2)}{6}$ (B) $\dfrac{n^2-n+1}{12}$ (C) $\dfrac{n(2n+1)(2n-1)}{12}$ (D) $\dfrac{n^2+4n+1}{6}$

ઉકેલ : અહીં $t_n = 1 + 2 + 3 + 4 + \ldots + n = \Sigma n = \dfrac{n(n+1)}{2}$ મળે.

$\displaystyle S_n = \Sigma t_n = \sum \frac{n(n+1)}{2}$

$\displaystyle = \frac{1}{2}\sum n(n+1)$

$\displaystyle = \frac{1}{2}\left(\sum n^2 + \Sigma n\right) = \frac{n(n+1)(2n+1)}{12} + \frac{n(n+1)}{4} = \frac{n(n+1)(n+2)}{6}$ **જવાબ :** (A)

(68) $\forall\, n \in N$, $1 \cdot n + 2 \cdot (n-1) + 3 \cdot (n-2) + \ldots n \cdot (1)$ નો સરવાળો ...... મળે.

(A) $\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ (B) $\dfrac{n(n+1)(2n-1)}{6}$ (C) $\dfrac{n(n+1)(n+2)}{6}$ (D) $\dfrac{n(n-1)(n-2)}{6}$

ઉકેલ : અહીં $1 \cdot n + 2 \cdot (n-1) + 3 \cdot (n-2) + \ldots n \cdot (1)$ આપેલ છે.

જ્યાં દરેક પદમાં પ્રથમ અવયવ 1, 2, 3... n છે જ્યારે દ્વિતીય અવયવ n, $(n-1)$, $(n-2)$...1 છે.

આથી શ્રેણીનું r મું પદ $t_r = r\,[n - (r-1)]$ મળે.

$$\therefore \sum_{r=1}^{n} t_r = \sum_{r=1}^{n} r\,(n-r+1)$$

$$= (n+1)\sum_{r=1}^{n} r - \sum_{r=1}^{n} r^2$$

$$= (n+1)\cdot\frac{n(n+1)}{2} - \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$= \frac{n(n+1)}{6}\left[3(n+1)-(2n+1)\right]$$

$$= \frac{n(n+1)(n+2)}{6}$$

જવાબ : (C)

(69) $\forall\, n \in N$, $\dfrac{1\cdot2^2+2\cdot3^2+3\cdot4^2+...+n \text{ પદ સુધી}}{1^2\cdot2+2^2\cdot3+3^2\cdot4+...+n \text{ પદ સુધી}} = ...$

(A) $\dfrac{5n+3}{5n-1}$ (B) $\dfrac{5n+1}{5n+3}$ (C) $\dfrac{3n+5}{3n+1}$ (D) $\dfrac{3n+1}{3n+5}$

ઉકેલ : અહીં $1\cdot2^2 + 2\cdot3^2 + 3\cdot4^2 + ... + n$ પદ સુધી $= \sum n(n+1)^2$

તથા $1^2\cdot2 + 2^2\cdot3 + 3^2\cdot4 + ... + n$ પદ સુધી $\sum n^2(n+1)$

$$\therefore \frac{1\cdot2^2+2\cdot3^2+3\cdot4^2+....+n \text{ પદ સુધી}}{1^2\cdot2+2^2\cdot3+3^2\cdot4+....+n \text{ પદ સુધી}} = \frac{\Sigma n(n+1)^2}{\Sigma n^2(n+1)}$$

$$= \frac{\Sigma n(n^2+2n+1)}{\Sigma\,(n^3+n^2)}$$

$$= \frac{\Sigma\,(n^3+2n^2+n)}{\Sigma\,(n^3+n^2)}$$

$$= \frac{\frac{n^2(n+1)^2}{4}+\frac{2\cdot n(n+1)(2n+1)}{6}+\frac{n(n+1)}{2}}{\frac{n^2(n+1)^2}{4}+\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}}$$

$$= \frac{\frac{n(n+1)}{2}\left[\frac{n(n+1)}{2}+\frac{2(2n+1)}{3}+1\right]}{\frac{n(n+1)}{2}\left[\frac{n(n+1)}{2}+\frac{2n+1}{3}\right]}$$

$$= \frac{3n(n+1)+4(2n+1)+6}{3n(n+1)+2(2n+1)}$$

$$= \frac{3n^2+11n+10}{3n^2+7n+2}$$

$$= \frac{(3n+5)(n+2)}{(3n+1)(n+2)} = \frac{3n+5}{3n+1}$$ **જવાબ :** (C)

(70) $1^3 + \frac{1^3+2^3}{1+3} + \frac{1^3+2^3+3^3}{1+3+5} + ... + n$ પદ સુધીનો સરવાળો ...... હોય.

(A) $\frac{2n^2+9n+13}{12}$ (B) $\frac{n(2n^2+9n+13)}{12}$ (C) $\frac{n(2n+9)(3n+2)}{24}$ (D) $\frac{n(2n^2+9n+13)}{24}$

ઉકેલ : $1^3 + \frac{1^3+2^3}{1+3} + \frac{1^3+2^3+3^3}{1+3+5} + ... + n$ પદ સુધીનો સરવાળો લેતાં,

$$t_n = \frac{1^3+2^3+3^3+...+n^3}{1+3+5+...+(2n-1)} = \frac{\Sigma n^3}{\Sigma(2n-1)} = \frac{n^2(n+1)^2}{4n^2} = \frac{n^2+2n+1}{4}$$

$$\therefore S_n = \Sigma t_n = \frac{1}{4}\sum(n^2+2n+1)$$

$$= \frac{1}{4}\left[\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + \frac{2n(n+1)}{2} + n\right]$$

$$= \frac{n}{4}\left[\frac{2n^2+3n+1+6(n+1)+6}{6}\right]$$

$$= \frac{n(2n^2+9n+13)}{24}$$ **જવાબ :** (D)

(71) 2 + 12 + 36 + 80 + 150 + ... નાં પ્રથમ 20 પદોનો સરવાળો ...... મળે.

(A) 64970 (B) 64790 (C) 49670 (D) 46970

ઉકેલ : અહીં 2 + 12 + 36 + 80 + 150 + ... 20 પદ સુધીનો સરવાળો લેવા, માટે 2 + 12 + 36 + 80 + 150 + ... n પદ સુધીનો સરવાળો શોધી $n = 20$ મૂકવું પડે.

$S_n = 1^2 \cdot 2 + 2^2 \cdot 3 + 3^2 \cdot 4 + 4^2 \cdot 5 + 5^2 \cdot 6 + ... + n^2(n+1)$

$\therefore S_n = \Sigma n^2(n+1) = \Sigma (n^3+n^2)$

$$\therefore S_{20} = \sum_{i=1}^{20} i^3 + \sum_{i=1}^{20} i^2 = \left[\frac{n^2(n+1)^2}{4} + \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\right]_{n=20}$$

$$= \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]_{n=20} \left[\frac{n(n+1)}{2} + \frac{2n+1}{3}\right]_{n=20}$$

$$= \frac{20(21)}{2}\left[\frac{20(21)}{2} + \frac{41}{3}\right]$$

$$= \frac{210}{6}[1260+82] = \frac{210(1342)}{6} = 70(671) = 46970$$ **જવાબ :** (D)

(72) $1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + 3 \cdot 3! + ... + n \cdot n! = ...$

(A) $(n+1)! - n$ (B) $(n+1)! - 1$ (C) $n! - 1 + n$ (D) $n! + 1 - n$

ઉકેલ : $1\cdot 1! + 2 \cdot 2! + 3 \cdot 3! + ... + n \cdot n!$

$= \Sigma [(n + 1) - 1]\, n!$

$= \Sigma (n + 1) \cdot n\,! - \Sigma\, n\,!$

$= \Sigma (n + 1)! - \Sigma (n!)$

$= (2! - 1!) + (3! - 2!) + ... + ((n +1)! - n!)$

$= (n + 1)! - 1$

જવાબ : (B)

(73) $\frac{3}{1^2} + \frac{5}{1^2+2^2} + \frac{7}{1^2+2^2+3^2} + ...$ n પદ સુધીનો સરવાળો ...... મળે.

(A) $\frac{6n^2}{n+1}$ (B) $\frac{6n}{n+1}$ (C) $\frac{6(2n-1)}{n+1}$ (D) $\frac{3(n^2+1)}{n+1}$

ઉકેલ : અહીં 3, 5, 7, ... સમાંતર શ્રેણીમાં છે.

$\therefore t_n = 2n + 1$

શ્રેઢીનું n મું પદ $t_n = \frac{2n+1}{1^2+2^2+...+n^2} = \frac{2n+1}{\Sigma n^2}$

$= \frac{(2n+1)\,6}{n(n+1)(2n+1)} = \frac{6}{n(n+1)}$

હવે n પદોનો સરવાળો $= \Sigma\, t_n$

$= 6\, \Sigma\, \frac{1}{n(n+1)}$

$= 6\, \Sigma \left(\frac{n+1-n}{n(n+1)}\right) = 6\, \Sigma \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right)$

$= 6 \left[\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+...+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)\right]$

$= 6 \left[1-\frac{1}{n+1}\right] = \frac{6n}{n+1}$

જવાબ : (B)

(74) $\frac{1}{3} + \frac{2}{3^2} + \frac{1}{3^3} + \frac{2}{3^4} + \frac{1}{3^5} + \frac{2}{3^6} + ... \infty$ સુધીનો સરવાળો ...... મળે.

(A) $\frac{1}{8}$ (B) $\frac{3}{8}$ (C) $\frac{5}{8}$ (D) $\frac{7}{8}$

ઉકેલ : $\frac{1}{3} + \frac{2}{3^2} + \frac{1}{3^3} + \frac{2}{3^4} + \frac{1}{3^5} + \frac{2}{3^6} + ... \infty$

$= \left(\frac{1}{3}+\frac{1}{3^3}+\frac{1}{3^5}+...\infty\right) + 2\left(\frac{1}{3^2}+\frac{1}{3^4}+\frac{1}{3^6}+...\infty\right)$

$= \frac{\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{3^2}} + 2\left(\frac{\frac{1}{3^2}}{1-\frac{1}{3^2}}\right) = \frac{\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{9}} + 2\left(\frac{\frac{1}{9}}{1-\frac{1}{9}}\right) = \frac{3}{8} + \frac{2}{8} = \frac{5}{8}$

જવાબ : (C)

(75) $1 + 3\cdot 2 + 5\cdot 2^2 + 7\cdot 2^3 + ...$ ના n પદ સુધીનો સરવાળો ...... મળે.

(A) $n \cdot 2^{n+1} - 2^n + 1$ (B) $(n - 1)\, 2^{n+1} - 2^n + 3$

(C) $(n + 1)\, 2^n - 2^{n-1} + 1$ (D) $2^{n-1}\, n - n \cdot 2^n + 3$

ઉકેલ : અહીં આપેલ શ્રેઢીના પ્રથમ અવયવો 1, 3, 5, 7, ... સમાંતર શ્રેણીમાં છે.

$\therefore t_n = 1 + (n-1)2 = 2n - 1$

તથા દ્વિતીય અવયવો $2^0, 2^1, 2^2, 2^3$ ... છે. જ્યાં $r = 2$ છે. આથી $t'_n = 2^{n-1}$ મળે.

આમ આપેલ શ્રેઢી માટે $T_n = (2n-1) \cdot 2^{n-1}$ થાય.

$S_n = 1 + 3{\cdot}2 + 5{\cdot}2^2 + 7{\cdot}2^3 + ... + (2n-1) \cdot 2^{n-1}$ (1)

(1) ને 2 વડે ગુણતાં,

$2S_n = 1{\cdot}2 + 3{\cdot}2^2 + 5{\cdot}2^3 + 7{\cdot}2^4 + ... + (2n-3) \cdot 2^{n-1} + (2n-1) \cdot 2^n$ (2)

(1)માંથી (2) બાદ કરતાં,

$-S_n = 1 - 1{\cdot}2 + 3{\cdot}2 + 5{\cdot}2^2 - 3{\cdot}2^2 + 7{\cdot}2^3 - 5{\cdot}2^3 + ... + (2n-1) \cdot 2^{n-1} - (2n-3) \cdot 2^{n-1} - (2n-1) \cdot 2^n$

$\therefore -S_n = 1 + 2{\cdot}2 + 2{\cdot}2^2 + 2{\cdot}2^3 + ... + 2{\cdot}2^{n-1} - (2n-1) \cdot 2^n$

$\therefore -S_n = 1 + 2\,[2 + 2^2 + 2^3 + ... + 2^{n-1}] - (2n-1) \cdot 2^n$

$= 1 + 2\left[\frac{2(2^{n-1}-1)}{2-1}\right] - (2n-1) \cdot 2^n$

$= 1 + 2^2\,(2^{n-1} - 1) - (2n-1) \cdot 2^n$

$= 1 + 2^{n+1} - 4 - n \cdot 2^{n+1} + 2^n$

$= (1-n) \cdot 2^{n+1} + 2^n - 3$

$\therefore S_n = (n-1)\, 2^{n+1} - 2^n + 3$ **જવાબ :** (B)

બીજી રીત :

આપેલ શ્રેઢી સમાંતર-સમગુણોત્તર શ્રેઢી છે.

જ્યાં $t_n = [a + (n-1)d]r^{n-1}$ છે તથા $S_n = \frac{a}{1-r} + \frac{d\,r(1-r^{n-1})}{(1-r)^2} - \frac{[a+(n-1)d]r^n}{(1-r)}$ છે

અહીં $a = 1$, $d = 2$ તથા $r = 2$ છે.

$\therefore S_n = \frac{1}{1-2} + \frac{2{\cdot}2(1-2^{n-1})}{(1-2)^2} - \frac{[1+(n-1)2]\cdot 2^n}{(1-2)}$

$\therefore S_n = -1 + 4\,(1 - 2^{n-1}) + (2n-1)2^n$

$= -1 + 4 - 2^{n+1} + n \cdot 2^{n+1} - 2^n$

$= 3 + (n-1)\,2^{n+1} - 2^n$

$\therefore S_n = (n-1)\,2^{n+1} - 2^n + 3$

(76) શ્રેઢી $3{\cdot}5 + 7{\cdot}5^2 + 11{\cdot}5^3 + ...$ નાં પ્રથમ 20 પદોનો સરવાળો ...... થાય.

(A) $\frac{2}{5}\,(1 + 20{\cdot}5^{39})$ (B) $\frac{5}{2}\,(20 + 39^5)$ (C) $\frac{5}{2}\,(1 + 39{\cdot}5^{20})$ (D) $\frac{1}{2}\,(1 + 39{\cdot}5^{21})$

ઉકેલ : અહીં આપેલ શ્રેઢી $3 \cdot 5 + 7 \cdot 5^2 + 11 \cdot 5^3 + ...$ એ સમાંતર-સમગુણોત્તર શ્રેઢી છે. તેના પ્રથમ અવયવો 3, 7, 11...સમાંતર શ્રેણીમાં છે, જ્યાં $a = 3$, $d = 4$ તથા દ્વિતીય અવયવો $5, 5^2, 5^3...$ સમગુણોત્તર શ્રેણીમાં છે, જ્યાં $a = 5$, $r = 5$.

$\therefore$ સમાંતર શ્રેણીનું n મું પદ $= t_n = 3 + (n-1)(4) = 4n - 1$ તથા સમગુણોત્તર શ્રેણીનું n મું પદ $= t_n = 5^n$ છે.

$\therefore$ શ્રેઢી નું n મું પદ $t_n = (4n-1)5^n$ મળે.

આથી, $S_n = 3 \cdot 5 + 7 \cdot 5^2 + 11 \cdot 5^3 + ... + (4n-1)\, 5^n$ (1)

$5S_n = 3 \cdot 5^2 + 7 \cdot 5^3 + 11 \cdot 5^4 + ... + (4n-5)\, 5^n + (4n-1)\, 5^{n+1}$ (2)

(1)માંથી (2) બાદ કરતાં,

$-4S_n = 3 \cdot 5 + 7 \cdot 5^2 - 3 \cdot 5^2 + 11 \cdot 5^3 - 7 \cdot 5^3 + ... + (4n-1)\, 5^n - (4n-5)\, 5^n - (4n-1)5^{n+1}$ મળે.

$= 3 \cdot 5 + 4 \cdot 5^2 + 4 \cdot 5^3 + ... + 4 \cdot 5^n - (4n-1)\, 5^{n+1}$

$= 15 + 4\, [5^2 + 5^3 + ... + 5^n] - (4n-1)\, 5^{n+1}$

$$= 15 + 4\left[\frac{25\,(5^{n-1}-1)}{4}\right] - (4n-1)\, 5^{n+1}$$

$= 15 + 25\,(5^{n-1}-1) - (4n-1)\, 5^{n+1}$

$$\therefore S_n = \frac{-15}{4} - \frac{25}{4}(5^{n-1}-1) + \frac{(4n-1)}{4} 5^{n+1}$$

$n = 20$ લેતાં,

$$S_{20} = \frac{-15}{4} - \frac{25}{4}(5^{19}-1) + \frac{79}{4} 5^{21}$$

$$= \frac{-15}{4} - \frac{1}{4} 5^{21} + \frac{25}{4} + \frac{79}{4} 5^{21}$$

$$= \frac{10}{4} + \frac{78}{4} \cdot 5^{21} = \frac{5}{2} + \frac{39}{2} \cdot 5^{21}$$

$$= \frac{5}{2}\,(1 + 39 \cdot 5^{20})$$

જવાબ : (C)

(77) $1 \cdot x + 4 \cdot x^2 + 7 \cdot x^3 + ...$ નાં પ્રથમ 10 પદોનો સરવાળો ...... થાય.

(A) $28\, x^{16} + 31\, x^{10} - 2x + 1$ (B) $\frac{28x^{10} - x^9 + 1}{x-1}$

(C) $\frac{82x^9 + 29x + 1}{(x-1)^2}$ (D) $\frac{28x^{11} - 31x^{10} + 2x + 1}{(x-1)^2}$

ઉકેલ : $1 \cdot x + 4 \cdot x^2 + 7 \cdot x^3 + ...$ એ સમાંતર-સમગુણોત્તર શ્રેણીમાં છે.

જ્યાં $a = 1$, $d = 3$, $r = x$ તથા $n = 10$ છે.

$$\therefore S_{10} = \frac{1}{1-x} + \frac{3 \cdot x(1-x^{10-1})}{(1-x)^2} - \frac{[1 + (10-1)3]x^{10}}{1-x}$$

$$= \frac{1}{1-x} + \frac{3x\,(1-x^9)}{(1-x)^2} - \frac{28x^{10}}{(1-x)}$$

$$= \frac{(1-x) + 3x(1-x^9) - 28x^{10}(1-x)}{(1-x)^2}$$

$$= \frac{1 - x + 3x - 3x^{10} - 28x^{10} + 28x^{11}}{(1-x)^2}$$

$$= \frac{28x^{11} - 31x^{10} + 2x + 1}{(x-1)^2}$$

જવાબ : (D)

(78) કોઈ સમગુણોત્તર શ્રેણીનું ત્રીજું પદ 4 છે, તો તેનાં પ્રથમ પાંચ પદોનો ગુણાકાર ...... હોય. (IIT : 1982)

(A) 64 (B) 1024 (C) 256 (D) 16

ઉકેલ : ધારો કે a, ar, ar^2 ... સમગુણોત્તર શ્રેણી છે.

જ્યાં $ar^2 = 4$ છે.

આ શ્રેણીનાં પ્રથમ 5 પદોનો ગુણાકાર $= (a)(ar)(ar^2)(ar^3)(ar^4)$

$= a^5(r^{10}) = (ar^2)^5 = 4^5 = 1024$ **જવાબ :** (B)

(79) જો a, b, c, d સ્વરિત શ્રેણીમાં હોય, તો નીચેનામાંથી કયું સત્ય બને? (IIT : 1970)

(A) $a + b > c + d$ (B) $a + c > b + d$ (C) $a + d > b + c$ (D) $b + d > a + c$

ઉકેલ : a, b, c, d સ્વરિત શ્રેણીમાં હોવાથી, b એ a તથા c નો સ્વરિત મધ્યક છે તથા c એ b તથા d નો સ્વરિત મધ્યક છે.

હવે a તથા c નો સમાંતર મધ્યક એ તેના સ્વરિત મધ્યક કરતાં મોટો જ હોય.

$\therefore \frac{a+c}{2} > b$

આ જ રીતે, $\frac{b+d}{2} > c$

$\therefore a + c > 2b$ તથા $b + d > 2c$ થાય.

$\therefore a + b + c + d > 2b + 2c$

$\therefore a + d > b + c$ **જવાબ :** (C)

(80) જો a, b, c, d સ્વરિત શ્રેણીમાં હોય, તો નીચેનામાંથી કયું સત્ય બને? $a, b, c, d \in R^+$ (IIT : 1970)

(A) $ab > cd$ (B) $ac > bd$ (C) $ad > bc$ (D) $bc = ad$

ઉકેલ : અહીં b એ a તથા c નો સ્વરિત મધ્યક છે. તથા c એ b તથા d નો સ્વરિત મધ્યક છે.

વળી, a તથા c નો ગુણોત્તર મધ્યક એ તેના સ્વરિત મધ્યક કરતાં મોટો જ હોય.

$\therefore \sqrt{ac} > b.$ આથી $ac > b^2$ (1)

આ જ રીતે, $\sqrt{bd} > c.$ આથી $bd > c^2$ (2)

(1) તથા (2) પરથી, $abcd > b^2c^2.$ આથી $ad > bc$ **જવાબ :** (C)

(81) જો a, b, c, d ભિન્ન વાસ્તવિક સંખ્યાઓ એવી મળે કે જેથી $(a^2 + b^2 + c^2)p^2 - 2p(ab + bc + cd) + (b^2 + c^2 + d^2) \leq 0$ થાય તો a, b, c, d ...... શ્રેણીમાં હોય. (IIT : 1981)

(A) સમાંતર (B) સમગુણોત્તર (C) સ્વરિત (D) સમાંતર-સમગુણોત્તર

ઉકેલ : અહીં $(a^2 + b^2 + c^2)p^2 - 2p(ab + bc + cd) + (b^2 + c^2 + d^2) \leq 0$

$\therefore (a^2p^2 - 2pab + b^2) + (b^2p^2 - 2pbc + c^2) + (p^2c^2 - 2pcd + d^2) \leq 0$

$\therefore (ap - b)^2 + (bp - c)^2 + (cp - d)^2 \leq 0$

આ $(ap - b)^2 + (bp - c)^2 + (cp - d)^2 = 0$ માટે જ સત્ય હોય.

$\therefore ap = b\ ;\ bp = c;\ cp = d$ આથી $\frac{b}{a} = \frac{c}{b} = \frac{d}{c} = p$

$\therefore$ a, b, c, d સમગુણોત્તર શ્રેણીમાં છે. **જવાબ :** (B)

(82) $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ માટે, જો $x = \sum_{n=0}^{\infty} cos^{2n}\theta$, $y = \sum_{n=0}^{\infty} sin^{2n}\theta$, $z = \sum_{n=0}^{\infty} cos^{2n}\theta\, sin^{2n}\theta$ હોય, તો નીચેનામાંથી કયું સત્ય બને ? (IIT : 1993)

(A) $xyz = xz + y$ (B) $xyz = xy + z$ (C) $xyz = x + y + z$ (D) $xyz = yz + x$

ઉકેલ : અહીં $x = \sum_{n=0}^{\infty} cos^{2n} \theta$

$= 1 + cos^2 \theta + cos^4 \theta + cos^6 \theta + ... = \frac{1}{1-cos^2\theta} = cosec^2 \theta$ (1)

આ જ રીતે, $y = \sum_{n=0}^{\infty} sin^{2n} \theta = 1 + sin^2 \theta + sin^4 \theta + sin^6 \theta + ... = \frac{1}{1-sin^2\theta} = sec^2 \theta$ (2)

$z = \sum_{n=0}^{\infty} cos^{2n} \theta \, sin^{2n} \theta = 1 + sin^2 \theta \, cos^2 \theta + sin^4 \theta \, cos^4 \theta + ...$

$\therefore z = \frac{1}{1-sin^2\theta cos^2\theta} = \frac{1}{1-\frac{1}{x}\cdot\frac{1}{y}} = \frac{xy}{xy-1}$

$\therefore xyz - z = xy$, આથી $xyz = xy + z$

હવે $x + y = \frac{1}{sin^2\theta} + \frac{1}{cos^2\theta} = \frac{1}{sin^2\theta cos^2\theta}$

$\therefore x + y = xy$ છે.

(1) અને (2) પરથી

$xyz = x + y + z$ **જવાબ :** (B),(C)

(83) જો વિધેય $f(x)$ એ $f(x+y) = f(x) \cdot f(y)$; $\forall \, x, y \in N$ નું સમાધાન કરે. અને $f(1) = 3$ અને $\sum_{x=1}^{n} f(x) = 120$ હોય, તો $n = ...$ (IIT : 1992)

(A) 4 (B) 5 (C) 6 (D) 8

ઉકેલ : $f(x + y) = f(x) \cdot f(y); \forall \, x, y \in N$ (1)

અહીં $x = y = 1$ લેતાં

$f(1+1) = f(2) = f(1) \cdot f(1) = f(1)^2$ મળે.

વળી, $f(1+2) = f(3) = f(1) \cdot f(2) = f(1) \cdot f(1)^2 = f(1)^3$ મળે.

આ જ રીતે ક્રમશઃ આગળ વધતાં, $f(x) = [f(1)]^x$ મળે.

$\therefore f(x) = 3^x$ $(f(1) = 3)$

હવે $\sum_{x=1}^{n} f(x) = 120$

$\therefore 3 + 3^2 + 3^3 + ... + 3^n = 120$

$\therefore \frac{3[3^n-1]}{3-1} = 120$. આથી $3^n = 81 = 3^4$

$\therefore n = 4$ **જવાબ :** (A)

(84) જો પ્રથમ n પ્રાકૃતિક સંખ્યાઓનો સરવાળો એ તેમના વર્ગોના સરવાળાથી $\frac{1}{5}$ ગણો હોય, તો $n = ...$ (IIT : 1992)

(A) 5 (B) 6 (C) 7 (D) 8

ઉકેલ : અહીં $\Sigma n = \frac{1}{5} \Sigma n^2$

$\therefore\ 5\ \Sigma n = \Sigma n^2$ આથી $\dfrac{5n(n+1)}{2} = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

$\therefore\ 2n + 1 = 15$

$\therefore\ n = 7$ **જવાબ :** (C)

(85) $\log_3 2, \log_6 2, \log_{12} 2$, એ ...... શ્રેણીમાં છે. (IIT : 1993)

(A) સમાંતર (B) સમગુણોત્તર (C) સ્વરિત (D) સમાંતર-સમગુણોત્તર

ઉકેલ : $\log_2 6 = \log_2 (3 \times 2) = \log_2 3 + \log_2 2 = 1 + \log_2 3$

તથા $\log_2 12 = \log_2 (4 \times 3) = \log_2 (2^2 \times 3) = 2 \log_2 2 + \log_2 3 = 2 + \log_2 3$ મળે.

$$\therefore\ \log_2 3 + \log_2 12 = \log_2 3 + 2 + \log_2 3 = 2 + 2 \log_2 3 = 2(1 + \log_2 3) = 2 \log_2 6$$

$\therefore\ \log_2 3, \log_2 6, \log_2 12$ સમાંતર શ્રેણીમાં છે.

$\therefore\ \log_3 2, \log_6 2, \log_{12} 2$ સ્વરિત શ્રેણીમાં છે. **જવાબ :** (C)

નોંધ : $\log_2 3 + \log_2 12 = \log_2 36 = 2\log_2 6$. આથી, $\log_2 3, \log_2 6, \log_2 12$ સમાંતર શ્રેણીમાં છે.

(86) ધન વાસ્તવિક સંખ્યાઓની સમગુણોત્તર શ્રેણીનું n મું પદ a_n છે. ધારો કે $\sum_{n=1}^{100} a_{2n} = \alpha$ તથા $\sum_{n=1}^{100} a_{2n-1} = \beta$ એવા મળે કે જેથી $\alpha \ne \beta$ હોય, તો સામાન્ય ગુણોત્તર ...... થાય. (IIT : 1992)

(A) $\dfrac{\alpha}{\beta}$ (B) $\dfrac{\beta}{\alpha}$ (C) $\sqrt{\dfrac{\alpha}{\beta}}$ (D) $\sqrt{\dfrac{\beta}{\alpha}}$

ઉકેલ : ધારો કે સમગુણોત્તર શ્રેણીનું પ્રથમ પદ a તથા સામાન્ય ગુણોત્તર r છે.

હવે $\alpha = \sum_{n=1}^{100} a_{2n}$.

આથી $\alpha = a_2 + a_4 + a_6 + ... + a_{200}$

$\therefore\ \alpha = ar + ar^3 + ar^5 + ... + ar^{199} = ar(1 + r^2 + r^4 + ... + r^{198})$ (1)

અને $\beta = \sum_{n=1}^{100} a_{2n-1}$

$\therefore\ \beta = a_1 + a_3 + a_5 + ... + a_{199} = a + ar^2 + ar^4 + ... + ar^{198}$

$= a(1 + r^2 + r^4 + ... + r^{198})$

$\therefore\ \beta = a\left(\dfrac{\alpha}{ar}\right)$ ((1) પરથી)

$\therefore\ \beta = \dfrac{\alpha}{r}$ આથી $r = \dfrac{\alpha}{\beta}$ **જવાબ :** (A)

(87) ચાર સંખ્યાઓમાંથી પ્રથમ ત્રણ સંખ્યાઓ સમગુણોત્તર શ્રેણીમાં હોય તથા છેલ્લી ત્રણ સંખ્યાઓ સમાંતર શ્રેણીમાં છે, જેનો સામાન્ય તફાવત 6 છે. જો પ્રથમ તથા ચોથી સંખ્યાઓ સમાન હોય, તો પ્રથમ સંખ્યા ...... હોય. (IIT : 1974)

(A) 2 (B) 4 (C) 6 (D) 8

ઉકેલ : ધારો કે ચાર સંખ્યાઓ $a, b, b + 6, b + 12$ છે.

$b^2 = a(b + 6)$ તથા $b + 12 = a$

$(a - 12)^2 = a(a - 12 + 6)$

$\therefore a^2 - 24a + 144 = a^2 - 6a$

$\therefore 18a = 144$

$\therefore a = 8$ **જવાબ :** (D)

(88) જો a, b અને c સમગુણોત્તર શ્રેણીમાં હોય તથા $a^{\frac{1}{x}} = b^{\frac{1}{y}} = c^{\frac{1}{z}}$ હોય, તો x, y, z ...... શ્રેણીમાં હોય. (IIT :1970)

(A) સમાંતર (B) સમગુણોત્તર (C) સ્વરિત (D) સમાંતર-સમગુણોત્તર

ઉકેલ : અહીં a, b અને c સમગુણોત્તર શ્રેણીમાં છે.

$\therefore b^2 = ac$ (1)

ધારો કે $a^{\frac{1}{x}} = b^{\frac{1}{y}} = c^{\frac{1}{z}} = k,$

$\therefore a = k^x, b = k^y, c = k^z$ મળે.

$\therefore$ (1) પરથી, $(k^y)^2 = k^x \cdot k^z$ આથી $k^{2y} = k^{x+z}$

$\therefore 2y = x+z$ આથી x, y, z સમાંતર શ્રેણીમાં છે. **જવાબ :** (A)

(89) જો કોઈ સમગુણોત્તર શ્રેણીનાં n પદોનો સરવાળો S; ગુણાકાર p તથા તમામ પદોના વ્યસ્તનો સરવાળો R હોય તો $p^2 =$ ...... (IIT : 1981)

(A) $\frac{S}{R}$ (B) $\frac{R}{S}$ (C) $\left(\frac{R}{S}\right)^n$ (D) $\left(\frac{S}{R}\right)^n$

ઉકેલ : ધારો કે $a, ar, ar^2, ..., ar^{n-1}$ એ કોઈ સમગુણોત્તર શ્રેણીનાં n પદો છે.

$$\therefore S = a + ar + ar^2 + ... + ar^{n-1} = \frac{a(r^n - 1)}{r-1} \quad (1)$$

હવે, $p = (a)(ar)(ar^2)...(ar^{n-1})$ છે.

$$\therefore p = a^n \cdot r^{1+2+3+...+(n-1)} = a^n \cdot r^{\frac{n(n-1)}{2}} \quad (2)$$

તથા $\frac{1}{a}, \frac{1}{ar}, \frac{1}{ar^2}, ... \frac{1}{ar^{n-1}}$ નો સરવાળો R છે.

$$\therefore R = \frac{1}{a} + \frac{1}{ar} + \frac{1}{ar^2} + ... + \frac{1}{ar^{n-1}}$$

$$= \frac{1}{a}\left[1 + \frac{1}{r} + \frac{1}{r^2} + ... + \frac{1}{r^{n-1}}\right]$$

$$= \frac{1}{a}\left(\frac{1-(r^{-1})^n}{1-\frac{1}{r}}\right)$$

$$= \frac{1}{a}\left(\frac{(r^n-1)r}{r^n(r-1)}\right)$$

$$= \frac{1}{a}\cdot\left(\frac{S}{a}\cdot r^{1-n}\right) \qquad \text{((1) પરથી)}$$

$$\therefore a^2 \cdot r^{n-1} = \frac{S}{R} \qquad (3)$$

હવે $p^2 = \left(a^n \cdot r^{\frac{n(n-1)}{2}}\right)^2 = a^{2n} \cdot r^{n(n-1)} = [a^2\, r^{(n-1)}]^n$

$\therefore p^2 = \left(\frac{S}{R}\right)^n$ **જવાબ :** (D)

(90) બે સંખ્યાઓનો સ્વરિત મધ્યક 4 છે, તેમનો સમાંતર મધ્યક A તથા સમગુણોત્તર મધ્યક G છે. જો $2A + G^2 = 27$ હોય, તો તે સંખ્યાઓ ...... છે. (IIT : 1979)

(A) 5, 4 (B) 6, 4 (C) 6, 3 (D) 8, 6

ઉકેલ : ધારો કે બે સંખ્યાઓ a તથા b છે.

અહીં $H = \frac{2ab}{a+b} = 4$ છે. આથી $a + b = \frac{ab}{2}$ (1)

$2A = a + b$ તથા $G^2 = ab$ છે.

વળી, $2A + G^2 = 27$

$\therefore a + b + ab = 27$

$\therefore \frac{ab}{2} + ab = 27.$ આથી $\frac{3}{2}ab = 27$ ((1) પરથી)

$\therefore ab = 18$

$\therefore a + b = 9$ ((1) પરથી)

(નોંધ : આપેલ વિકલ્પોમાં વિકલ્પ (C)માં જ સંખ્યાઓનો ગુણાકાર 18 તથા સરવાળો 9 મળે છે આથી વિકલ્પ (C) સાચો જવાબ છે.)

$\therefore a + \frac{18}{a} = 9$ આથી $a^2 - 9a + 18 = 0$ આથી $a = 6$ કે $a = 3$

$\therefore$ બે સંખ્યાઓ 6 અને 3 મળે. **જવાબ :** (C)

(91) વિધેય $f(x)$ એ દ્વિઘાત બહુપદી $ax^2 + bx + c$ હોય તથા જો $f(1) = f(-1)$ અને a, b, c સમાંતર શ્રેણીમાં હોય તો $f'(a), f'(b)$ અને $f'(c)$ ...... શ્રેણીમાં હોય. (AIEEE 2003)

(A) સમાંતર (B) સમગુણોત્તર (C) સ્વરિત (D) સમાંતર-સમગુણોત્તર

ઉકેલ : ધારો કે દ્વિઘાત બહુપદી $f(x) = ax^2 + bx + c$ છે.

વળી, a, b, c સમાંતર શ્રેણીમાં છે. આથી, $2b = a + c$

વળી, $f(1) = f(-1)$ આપેલ છે.

$\therefore f(1) = a + b + c$ તથા $f(-1) = a - b + c$

આથી, $a + b + c = a - b + c$

$\therefore 2b = 0.$ આથી $b = 0$ આથી $c = -a$

હવે, $f(x) = ax^2 - a$

$\therefore f'(x) = 2ax$

$\therefore f'(a) = 2a^2, f'(b) = 2ab = 0,$

$f'(c) = 2ac = -2a^2$

$\therefore f'(a), f'(b), f'(c)$ સમાંતર શ્રેણીમાં છે. **જવાબ :** (A)

(92) સંખ્યાઓ x_1, x_2, x_3 અને y_1, y_2, y_3 સમગુણોત્તર શ્રેણીમાં હોય તથા બંને શ્રેણીમાં ગુણોત્તર સમાન હોય, તો બિંદુઓ A (x_1, y_1), B (x_2, y_2), C (x_3, y_3) ...... હોય. (AIEEE : 2003)

(A) એક જ રેખા પર આવેલાં બિંદુઓ (B) વર્તુળ પર આવેલાં બિંદુઓ

(C) ઉપવલય પર આવેલાં બિંદુઓ (D) ત્રિકોણનાં શિરોબિંદુઓ

ઉકેલ : ધારો કે બંને શ્રેણી માટે સામાન્ય ગુણોત્તર r હોય તો $x_2 = rx_1$, $x_3 = r^2x_1$, તથા $y_2 = ry_1$ અને $y_3 = r^2y_1$ મળે.

હવે A (x_1, y_1), B (x_2, y_2) તથા C (x_3, y_3) બિંદુઓ અનુક્રમે (x_1, y_1), (rx_1, ry_1), (r^2x_1, r^2y_1) થી દર્શાવાય.

$$\Delta = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_1 r & y_1 r & 1 \\ x_1 r^2 & y_1 r^2 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= x_1 y_1 \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ r & r & 1 \\ r^2 & r^2 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$\therefore$ A, B, C સમરેખ બિંદુઓ છે. **જવાબ :** (A)

(93) Δ ABC માટે જો $a \cos^2 \frac{c}{2} + c \cos^2 \frac{A}{2} = \frac{3b}{2}$ હોય, તો ત્રિકોણની બાજુઓ ...... (AIEEE : 2003)

(A) સમાંતર શ્રેણીમાં હોય (B) સમગુણોત્તર શ્રેણીમાં હોય

(C) સ્વરિત શ્રેણીમાં હોય (D) $a + b = c$નું સમાધાન કરે.

ઉકેલ : અહીં $a \cos^2 \frac{c}{2} + c \cos^2 \frac{A}{2} = \frac{3b}{2}$ આપેલ છે.

$$\therefore a\left(\frac{1+\cos C}{2}\right) + c\left(\frac{1+\cos A}{2}\right) = \frac{3b}{2}$$

$$\therefore \frac{a}{2} + \frac{1}{2}(a \cos C) + \frac{c}{2} + \frac{1}{2}(c \cos A) = \frac{3b}{2}$$

$$\therefore \frac{a}{2} + \frac{c}{2} + \frac{1}{2}(a \cos C) + \frac{1}{2}(c \cos A) = \frac{3b}{2}$$

$$\therefore \frac{a}{2} + \frac{c}{2} + \frac{1}{2}(a \cos C + c \cos A) = \frac{3b}{2}$$

$$\therefore \frac{a+c}{2} + \frac{b}{2} = \frac{3b}{2}$$ (પ્રક્ષેપ સૂત્ર)

$$\therefore b = \frac{a+c}{2}$$

$\therefore a, b, c$ સમાંતર શ્રેણીમાં છે. **જવાબ :** (A)

(94) વિધેય $f : R \to R$, $f(x+y) = f(x) + f(y)$, $\forall x, y \in$ R તથા $f(1) = 7$ હોય, તો $\sum_{r=1}^{n} f(r) =$ ......

(AIEEE : 2003)

(A) $\frac{7n}{2}$ (B) $\frac{7(n+1)}{2}$ (C) $7n(n+1)$ (D) $\frac{7n(n+1)}{2}$

ઉકેલ : અહીં $f(1) = 7$ છે. આથી $f(1) = 1 \times 7$

$f(2) = f(1+1) = f(1) + f(1) = 7 + 7 = 14 = 2 \times 7$

$f(3) = f(2+1) = f(2) + f(1) = 14 + 7 = 21 = 3 \times 7$ $(f(x+y) = f(x) + f(y))$

આ જ રીતે ક્રમશ: આગળ વધતાં, $f(n) = n \times 7$ મળે.

$$\therefore \sum_{r=1}^{n} f(r) = f(1) + f(2) + f(3) + ... + f(n) = \frac{7n(n+1)}{2}$$ **જવાબ :** (D)

(95) બે સંખ્યાઓનો સમાંતર મધ્યક તથા સમગુણોત્તર મધ્યક અનુક્રમે 9 તથા 4 છે તથા આ બે સંખ્યાઓ કોઈ દ્વિઘાત સમીકરણનાં બીજ હોય તો તે દ્વિઘાત સમીકરણ ...... હોય. $(k \neq 0)$ (AIEEE : 2004)

(A) $k(x^2 + 18x + 16) = 0$ (B) $k(x^2 - 18x - 16) = 0$

(C) $k(x^2 + 18x - 16) = 0$ (D) $k(x^2 - 18x + 16) = 0$

ઉકેલ : ધારો કે બે સંખ્યાઓ a તથા b કોઈ દ્વિઘાત સમીકરણનાં બીજ છે.

હવે $A = \frac{a+b}{2} = 9$

$\therefore a + b = 18 =$ બે બીજનો સરવાળો

વળી, $G = \sqrt{ab} = 4$

$\therefore ab = 16 =$ બે બીજનો ગુણાકાર

$\therefore$ માંગેલ દ્વિઘાત સમીકરણ $k(x^2 - 18x + 16) = 0$, $k \neq 0$ **જવાબ :** (D)

(96) જો કોઈ સમાંતર શ્રેણીનું પ્રથમ પદ a, સામાન્ય તફાવત d તથા r મું પદ T_r હોય તથા કોઈ ધન પૂર્ણાંકો m અને n (જ્યાં $m \neq n$) માટે, $T_m = \frac{1}{n}$ તેમજ $T_n = \frac{1}{m}$ હોય તો $a - d = ...$ (AIEEE : 2004)

(A) 1 (B) 0 (C) $\frac{1}{mn}$ (D) $\frac{1}{m} + \frac{1}{n}$

ઉકેલ : અહીં $T_n = a + (n-1)d = \frac{1}{m}$ તથા $T_m = a + (m-1)d = \frac{1}{n}$ છે.

$\therefore ma + (n-1)md = 1$ તેમજ $na + (m-1)nd = 1$ મળે

$\therefore (m-n)a = [(m-1)n - (n-1)m]d$

$\therefore (m-n)a = (m-n)d$

$\therefore a = d$ $(m \neq n \Rightarrow (m-n) \neq 0)$

$\therefore a - d = 0$ **જવાબ :** (B)

(97) $\frac{1}{2!} + \frac{1}{4!} + \frac{1}{6!} + ... = ...$ (AIEEE : 2004)

(A) $\left(\frac{e^2-1}{2}\right)$ (B) $\frac{e^2-1}{2e}$ (C) $\frac{(e-1)^2}{2e}$ (D) $\frac{e^2-1}{e}$

(**સૂચન :** $\frac{e^x + e^{-x}}{2} = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^6}{6!} + ...$ નો ઉપયોગ કરો.)

ઉકેલ : $\frac{e^x + e^{-x}}{2} = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^6}{6!} + ...$ માં $x = 1$ લેતાં,

$$\frac{e + \frac{1}{e}}{2} = 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{4!} + \frac{1}{6!} + ...$$

$\therefore\ \dfrac{e^2+1}{2e} - 1 = \dfrac{1}{2!}+\dfrac{1}{4!}+\dfrac{1}{6!}+...$

$\therefore\ \dfrac{e^2+1-2e}{2e} = \dfrac{1}{2!}+\dfrac{1}{4!}+\dfrac{1}{6!}+...$

$\therefore\ \dfrac{1}{2!}+\dfrac{1}{4!}+\dfrac{1}{6!} = \dfrac{(e-1)^2}{2e}$ **જવાબ :** (C)

(98) Δ ABC નાં શિરોબિંદુઓ A, B તથા C માંથી સામેની બાજુઓ પર લંબ દોરવામાં આવે તથા લંબની લંબાઈના માપ સ્વરિત શ્રેણીમાં હોય, તો *sin* A, *sin* B, *sin* C ...... શ્રેણીમાં હોય. (AIEEE : 2005)

(A) સમગુણોત્તર (B) સ્વરિત (C) સમાંતર (D) સમાંતર-સમગુણોત્તર

ઉકેલ : ધારો કે $\overline{AD}$, $\overline{BE}$ તથા $\overline{CF}$ એ Δ ABC નાં શિરોબિંદુઓ A, B તથા C માંથી સામેની બાજુઓ $\overline{BC}$, $\overline{AC}$ તથા $\overline{AB}$ પર દોરેલા લંબ છે. તેમનાં માપ અનુક્રમે p_1, p_2 તથા p_3 છે. તથા AB = c, BC = a, AC = b છે.

હવે, Δ ABC નું ક્ષેત્રફળ $= \Delta = \frac{1}{2} p_1 \cdot a$; $\Delta = \frac{1}{2} p_2 \cdot b$; તેમજ $\Delta = \frac{1}{2} p_3 \cdot c$ લેતાં,

$p_1 = \dfrac{2\Delta}{a}$, $p_2 = \dfrac{2\Delta}{b}$, $p_3 = \dfrac{2\Delta}{c}$ મળે. (1)

હવે p_1, p_2, p_3 સ્વરિત શ્રેણીમાં છે.

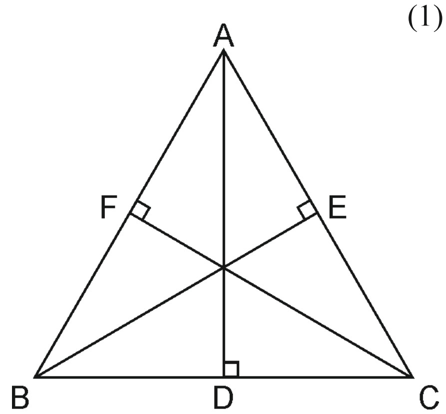
$\therefore\ \dfrac{1}{p_1}, \dfrac{1}{p_2}, \dfrac{1}{p_3}$ સમાંતર શ્રેણીમાં છે.

$\therefore\ \dfrac{a}{2\Delta}, \dfrac{b}{2\Delta}, \dfrac{c}{2\Delta}$ સમાંતર શ્રેણીમાં છે.

$\therefore\ a, b, c$ સમાંતર શ્રેણીમાં છે.

$\therefore\ \dfrac{a}{2R}, \dfrac{b}{2R}, \dfrac{c}{2R}$ સમાંતર શ્રેણીમાં છે.

$\therefore$ *sin* A , *sin* B, *sin* C સમાંતર શ્રેણીમાં છે.



આકૃતિ 7.1

જવાબ : (C)

(99) $a_1, a_2, a_3, ...$ સમાંતર શ્રેણીમાં છે. જો $\dfrac{a_1+a_2+a_3+...+a_p}{a_1+a_2+a_3+...+a_q} = \dfrac{p^2}{q^2}$ જ્યાં $p \neq q$ હોય, તો $\dfrac{a_6}{a_{21}} = ...$ (AIEEE : 2006)

(A) $\dfrac{41}{11}$ (B) $\dfrac{11}{41}$ (C) $\dfrac{2}{7}$ (D) $\dfrac{7}{2}$

ઉકેલ : અહીં $\dfrac{a_1+a_2+a_3+...+a_p}{a_1+a_2+a_3+...+a_q} = \dfrac{p^2}{q^2}$ આપેલ છે.

$\therefore\ \dfrac{S_p}{S_q} = \dfrac{p^2}{q^2}$ આથી $\dfrac{\frac{p}{2}[2a_1+(p-1)d]}{\frac{q}{2}[2a_1+(q-1)d]} = \dfrac{p^2}{q^2}$

$\therefore\ \dfrac{2a_1+(p-1)d}{2a_1+(q-1)d} = \dfrac{p}{q}$ આથી $\dfrac{a_1+\left(\frac{p-1}{2}\right)d}{a_1+\left(\frac{q-1}{2}\right)d} = \dfrac{p}{q}$ (1)

હવે $\frac{a_6}{a_{21}} = \frac{a+5d}{a+20d}$ આથી (1) પરથી, $\frac{p-1}{2} = 5$ તથા $\frac{q-1}{2} = 20$ લઈ શકાય.

$\therefore p = 11$ તથા $q = 41$ થાય. આથી $\frac{a_6}{a_{21}} = \frac{p}{q} = \frac{11}{41}$ **જવાબ :** (B)

(100) $\frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} - \frac{1}{5!} + ... = ...$ (AIEEE 2007)

(A) $\frac{1}{e^2}$ (B) $\frac{1}{e}$ (C) $\frac{1}{\sqrt{e}}$ (D) $\sqrt{e}$

[**સૂચન :** $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + ...$ નો ઉપયોગ કરો.]

ઉકેલ : $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + ...$ માં $x = -1$ લેતાં,

$\therefore \frac{1}{e} = 1 - 1 + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} - \frac{1}{5!} + ...$

$\therefore \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} - \frac{1}{5!} + ... = \frac{1}{e}$ **જવાબ :** (B)

(101) ધન વાસ્તવિક સંખ્યાઓને સમાવતી સમગુણોત્તર શ્રેણીનું દરેક પદ એ ત્યાર પછી આવતાં બે પદોના સરવાળા જેટલું હોય, તો તે શ્રેણીનો સામાન્ય ગુણોત્તર ...... મળે. (AIEEE : 2007)

(A) $\frac{1-\sqrt{5}}{2}$ (B) $\frac{\sqrt{5}}{2}$ (C) $\sqrt{5}$ (D) $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$

ઉકેલ : ધારો કે $a_1, a_2, a_3, ... a_{n-2}, a_{n-1}, a_n$ જેવાં ધન પદો ધરાવતી સમગુણોત્તર શ્રેણીમાં બે ક્રમિક પદોનો સામાન્ય ગુણોત્તર r છે. $r > 0$

હવે $a_{n-2} = a_{n-1} + a_n$ આપેલ છે.

$\therefore a_1 \cdot r^{n-3} = a_1 \cdot r^{n-2} + a_1 \cdot r^{n-1}$

$\therefore r^{n-3} = r^{n-3} \cdot r + r^{n-3} \cdot r^2$

$\therefore 1 = r + r^2$

$\therefore r^2 + r - 1 = 0$

$\therefore r = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$. પરંતુ $r > 0$

$\therefore r = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$ **જવાબ :** (D)

(102) કોઈ સમગુણોત્તર શ્રેણીનાં પ્રથમ બે પદોનો સરવાળો 12 છે તથા તે જ સમગુણોત્તર શ્રેણીનાં ત્રીજા તથા ચોથા પદનો સરવાળો 48 છે. આ શ્રેણીનાં પદો ક્રમશઃ ઋણ, ધન છે, તો તે શ્રેણીનું પ્રથમ પદ ...... હોય. (AIEEE : 2008)

(A) –4 (B) 4 (C) –12 (D)12

ઉકેલ : ધારો કે સમગુણોત્તર શ્રેણીનું પ્રથમ પદ a તથા સામાન્ય ગુણોત્તર r છે. $a_2 = ar$, $a_3 = ar^2$, $a_4 = ar^3$ મળે.

હવે $a + ar = 12$. આથી $a(1 + r) = 12$ આથી $1 + r = \frac{12}{a}$ (1)

વળી $ar^2 + ar^3 = 48$. આથી $ar^2 (1 + r) = 48$ આથી $1 + r = \frac{48}{ar^2}$ મળે. (2)

(1) તથા (2) પરથી, $\frac{12}{a} = \frac{48}{ar^2}$. આથી $r^2 = 4$

$\therefore r = \pm 2$

વળી, પદો ક્રમશઃ ધન, ઋણ છે. આથી $r = -2$ લેવો પડે કારણ કે $\frac{t_2}{t_1} = \frac{ar}{a} = r < 0$

$\therefore r = -2$ લેતાં, $a + ar = 12$ પરથી $a = -12$

$\therefore$ પ્રથમ પદ $= -12$ **જવાબ :** (C)

(103) એક માણસને 4500 ચલણી નોટો ગણવાની છે. તથા a_n એ n મિનિટમાં ગણાયેલી ચલણી નોટોની સંખ્યા દર્શાવવાની છે. જો $a_1 = a_2 = a_3 = ... = a_{10} = 150$ હોય તથા $a_{10}, a_{11}, a_{12}...$ સમાંતર શ્રેણીમાં હોય કે જેથી સામાન્ય તફાવત -2 થાય, તો તે માણસને તમામ ચલણી નોટો ગણતાં લાગતો સમય ...... મિનિટ હોય. (AIEEE : 2010)

(A) 34 (B) 125 (C) 24 (D) 135

ઉકેલ : અહીં $a_1 = a_2 = a_3 = ... = a_{10} = 150$ છે.

હવે $a_{10}, a_{11}, a_{12}...$ સમાંતર શ્રેણીમાં છે, જ્યાં $d = -2$ છે.

$\therefore a_{11} - a_{10} = -2$

$\therefore a_{11} - 150 = -2$ આથી $a_{11} = 148$

વળી, $a_1 + a_2 + a_3 ... + a_{10} = 10\,(150) = 1500$

$\therefore$ 10 મિનિટમાં ગણાયેલી નોટોની સંખ્યા = 1500 હોવાથી, ગણવાની બાકી રહેલી નોટોની સંખ્યા $= 4500 - 1500 = 3000$

$\therefore a_{11} + a_{12} + a_{13} + ... + a_n = 3000$

$\therefore \frac{(n-10)}{2}\,[2\,(a_{11}) + (n-11)\,(-2)] = 3000$

$\therefore \frac{(n-10)}{2}\,[2(148) - 2(n-11)] = 3000$

$\therefore (n-10)\,(159-n) = 3000$

$\therefore n^2 - 169\,n + 4590 = 0$

$\therefore (n-135)\,(n-34) = 0$

$\therefore n = 34$ કે $n = 135$

પરંતુ $n = 135$ લેતાં, n મું પદ ઋણ થાય, જે અશક્ય છે.

$\therefore n = 34$

$\therefore$ માણસને ચલણી નોટો ગણતાં લાગતો સમય 34 મિનિટ છે. **જવાબ :** (A)

(104) સમાંતર શ્રેણી 2, 5, 8, 11... ના પ્રથમ $2n$ પદોનો સરવાળો એ અન્ય સમાંતર શ્રેણી 57, 59, 61... ના પ્રથમ n પદોના સરવાળા જેટલો હોય, તો $n =$ ...... (IIT Screening : 2001)

(A) 10 (B) 11 (C) 12 (D) 13

ઉકેલ : સમાંતર શ્રેણી 2, 5, 8, 11... માટે $a = 2$; $d = 3$; $N = 2n$ લેતાં,

$$S_N = \frac{2n}{2}\,[2(2) + (2n-1)3] = n\,(6n+1)$$

હવે સમાંતર શ્રેણી 57, 59, 61... માટે, $a = 57$, $d = 2$, $N = n$ લેતાં,

$$S'_N = \frac{n}{2}[2(57) + (n-1)2]$$

$$= n\,(56+n)$$

વળી, $S_N = S'_N$ આપેલ છે.

$\therefore n\,(6n+1) = n(56+n)$ આથી $6n + 1 = 56 + n.$ આથી $5n = 55$

$\therefore n = 11$ **જવાબ :** (B)

(105) જો કોઈ સમાંતર શ્રેણીનાં n પદોનો સરવાળો cn^2 હોય, તો આ તમામ પદોનાં વર્ગોનો સરવાળો ...... મળે. (IIT : 2009)

(A) $\frac{n(4n^2-1)c^2}{6}$ (B) $\frac{nc^2(4n^2+1)}{3}$ (C) $\frac{nc^2(4n^2-1)}{3}$ (D) $\frac{nc^2(4n^2+1)}{6}$

ઉકેલ : અહીં $S_n = cn^2$ આપેલ છે.

$\therefore S_{n-1} = c\,(n-1)^2$

$\therefore$ $t_n = S_n - S_{n-1} = cn^2 - c(n-1)^2 = c(2n-1)$ $\qquad n \geq 2,\ t_1 = c$

હવે આ તમામ n પદોના વર્ગોનો સરવાળો શોધવો છે.

$\therefore$ શ્રેણી $(c)^2, (3c)^2, (5c)^2, (7c)^2 \ldots ((2n-1)c)^2$ મળે.

$\therefore$ $t_n = (2n-1)^2 \cdot c^2$

$$\begin{aligned}\therefore \Sigma t_n &= \Sigma c^2 (2n-1)^2 \\ &= c^2 \Sigma (2n-1)^2 \\ &= c^2 \Sigma (4n^2 - 4n + 1) \\ &= 4c^2 \Sigma n^2 - 4c^2 \Sigma n + c^2 \Sigma 1 \\ &= 4c^2 \left[\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\right] - 4c^2 \frac{n(n+1)}{2} + nc^2 \\ &= nc^2 \left[\frac{2(2n^2+3n+1)}{3} - 2(n+1) + 1\right] \\ &= nc^2 \left(\frac{4n^2+6n+2-6n-6+3}{3}\right) = \frac{nc^2(4n^2-1)}{3}\end{aligned}$$

જવાબ : (C)

(106) જો 1, $\log_9 (3^{1-x} + 2)$, $\log_3 (4 \cdot 3^x - 1)$ સમાંતર શ્રેણીમાં હોય તો x = ... (AIEEE : 2002)

(A) $\log_3 4$ (B) $1 - \log_4 3$ (C) $\log_4 3$ (D) $1 - \log_3 4$

ઉકેલ : અહીં 1, $\log_9 (3^{1-x} + 2)$, $\log_3 (4 \cdot 3^x - 1)$ સમાંતર શ્રેણીમાં છે.

$\therefore 2 \log_9 (3^{1-x} + 2) = \log_3 (4 \cdot 3^x - 1) + 1$

$\therefore \dfrac{2\log_3 (3^{1-x} + 2)}{\log_3 9} = \log_3 (4 \cdot 3^x - 1) + \log_3 3$

$\therefore \dfrac{2\log_3 (3^{1-x} + 2)}{\log_3 3^2} = \log_3 [3 \cdot (4 \cdot 3^x - 1)]$

$\therefore \log_3 (3^{1-x} + 2) = \log_3 [3 \cdot (4 \cdot 3^x - 1)]$

$\therefore 3^{1-x} + 2 = 12 \cdot 3^x - 3$

$\therefore \dfrac{3}{3^x} + 5 = 12 \cdot 3^x$

$\therefore 12 (3^x)^2 - 5 \cdot 3^x - 3 = 0$

$\therefore (3 \cdot 3^x + 1)(4 \cdot 3^x - 3) = 0$

$\therefore 3 \cdot 3^x = -1$ કે $4 \cdot 3^x = 3$

$\therefore 3^x = \dfrac{-1}{3} < 0$ અશક્ય છે.

$\therefore 3^x = \dfrac{3}{4}$

$\therefore x = \log_3 \dfrac{3}{4} = \log_3 3 - \log_3 4$. આથી $x = 1 - \log_3 4$ **જવાબ :** (D)

(107) કોઈ માણસ તેની નોકરીના પગારમાંથી પ્રથમ ત્રણ મહિના પૈકી પ્રત્યેક મહિને ₹ 200 ની બચત કરે છે. ત્યાર પછીના દરેક મહિને તેની બચતમાં ₹ 40 નો વધારો થાય છે. નોકરી શરૂ થઈ ત્યારથી ...... મહિના સુધીની તેની બચત ₹ 11,040 થશે. (AIEEE : 2011)

(A) 18 (B) 19 (C) 20 (D) 21

ઉકેલ : કોઈ માણસ તેની નોકરીના પગારમાંથી પ્રથમ ત્રણ મહિના પૈકી પ્રત્યેક મહિને ₹ 200 ની બચત કરે છે.

$\therefore$ ત્રણ મહિનાની કુલ બચત = ₹ 600

ત્રણ મહિના પછી દર મહિને તેની બચતમાં ₹ 40 વધારો થાય છે. આથી, 240, 280, 320,... જેથી સમાંતર શ્રેણી રચાશે.

તેનો સરવાળો 11040 – 600 = 10440 થશે.

$\therefore\ a = 240,\ d = 40,\ S_n = 10440$

$\therefore\ S_n = \frac{n}{2}\ [2a + (n-1)\ d]$ પરથી,

$10440 = \frac{n}{2}\ [2\ (240) + (n-1)\ 40]$

$\therefore\ 10440\ =\ n\ [240 + 20\ (n-1)]\ =\ 20n^2 + 220n$

$\therefore\ n^2 + 11n - 522 = 0$

$\therefore\ (n + 29)\ (n - 18) = 0.$ હવે $n = -29 < 0$ અશક્ય છે.

$\therefore\ n = 18$

$\therefore$ 18 મહિના પછીની બચત ₹ 10440 થશે.

$\therefore$ 18 + 3 = 21 મહિના પછી ₹10440 + ₹600 = ₹11040 ની બચત થાય.

$\therefore\ n = 21$ **જવાબ :** (D)

(108) જો $x = \sum_{n=0}^{\infty} a^n$; $y = \sum_{n=0}^{\infty} b^n$; $z = \sum_{n=0}^{\infty} c^n$ જ્યાં a, b, c સમાંતર શ્રેણીમાં છે તથા $|a| < 1,\ |b| < 1,\ |c| < 1$ હોય, તો x, y, z ...... શ્રેણીમાં છે. (AIEEE : 2005)

(A) સમાંતર (B) સમગુણોત્તર (C) સ્વરિત (D) સમાંતર-સમગુણોત્તર

ઉકેલ : અહીં $x = \sum_{n=0}^{\infty} a^n = 1 + a + a^2 + ... = \frac{1}{1-a}$ ($|a| < 1$)

$\therefore\ 1 - a = \frac{1}{x}.$ આથી $a = 1 - \frac{1}{x}.$ આ જ રીતે $b = 1 - \frac{1}{y};$ $c = 1 - \frac{1}{z}$ મળે.

હવે a, b, c સમાંતર શ્રેણીમાં છે.

$\therefore\ a - 1,\ b - 1,\ c - 1$ સમાંતર શ્રેણીમાં છે.

$\therefore -\frac{1}{x}, -\frac{1}{y}, -\frac{1}{z}$ સમાંતર શ્રેણીમાં છે.

$\therefore \frac{1}{x}, \frac{1}{y}, \frac{1}{z}$ સમાંતર શ્રેણીમાં છે.

$\therefore\ x, y, z$ સ્વરિત શ્રેણીમાં છે. **જવાબ :** (C)

(109) $a_1, a_2, a_3, ..., a_n$ સ્વરિત શ્રેણીમાં હોય, તો $a_1a_2 + a_2a_3 + .. + a_{n-1}a_n = ...$ (AIEEE : 2006)

(A) $n(a_1 - a_n)$ (B) $(n-1)\ (a_1 - a_n)$ (C) $n\ a_1\ a_n$ (D) $(n-1)\ a_1a_n$

ઉકેલ : $a_1, a_2, a_3, ...\ a_n$ સ્વરિત શ્રેણીમાં છે.

$\therefore\ \frac{1}{a_1}, \frac{1}{a_2}, \frac{1}{a_3}, ..., \frac{1}{a_n}$ સમાંતર શ્રેણીમાં છે.

$\therefore\ \frac{1}{a_2} - \frac{1}{a_1} = \frac{1}{a_3} - \frac{1}{a_2} = ... = \frac{1}{a_n} - \frac{1}{a_{n-1}} = d$ ધારતાં,

$\therefore\ \frac{a_1 - a_2}{d} = a_1a_2;\ \frac{a_2 - a_3}{d} = a_2a_3;\ ...,\ \frac{a_{n-1} - a_n}{d} = a_{n-1}\ a_n$

$\therefore\ a_1a_2 + a_2a_3 + ... + a_{n-1}\ a_n\ = \frac{a_1 - a_2}{d} + \frac{a_2 - a_3}{d} + ... + \frac{a_{n-1} - a_n}{d}$

$= \frac{1}{d}\ [a_1 - a_2 + a_2 - a_3 + ... + a_{n-1} - a_n]$

$= \frac{1}{d}\ (a_1 - a_n)$ (1)

હવે, $\frac{1}{a_n} = \frac{1}{a_1} + (n-1)d$

$\therefore\ \frac{a_1 - a_n}{a_1a_n} = (n-1)d$

$\therefore\ d = \frac{a_1 - a_n}{(n-1)\ a_1a_n}$

$\therefore$ (1) પરથી, $a_1a_2 + a_2a_3 + ... + a_{n-1}\ a_n = \dfrac{a_1 - a_n}{\dfrac{(a_1 - a_n)}{(n-1)\ a_1a_n}} = (n-1)a_1a_n$ **જવાબ :** (D)

(110) શ્રેણી 0.7 + 0.77 + 0.777 નાં પ્રથમ 20 પદોનો સરવાળો ...... હોય. (JEE : 2013)

(A) $\frac{7}{81}\ (179 - 10^{-20})$ (B) $\frac{7}{9}\ (99 - 10^{-20})$ (C) $\frac{7}{81}\ (179 + 10^{-20})$ (D) $\frac{7}{9}\ (99 + 10^{-20})$

ઉકેલ : 0.7 + 0.77 + 0.777 + ... + 0.777... 7 (20 વખત)

= 7 [0.1 + 0.11 + 0.111 + ... + 0.111.... 1 (20 વખત)]

$= \frac{7}{9}$ [(1 – 0.1) + (1 – 0.01) + (1 – 0.001) + ... + (1 – 0.000 ... 0 (19 વખત)1]

$= \frac{7}{9}$ [(1 + 1 + 1 + 20 વખત) – $\left(\frac{1}{10}+\frac{1}{100}+\frac{1}{1000}+...+\frac{1}{10^{20}}\right)$]

$$= \frac{7}{9}\left[20 - \frac{\frac{1}{10}\left(1-\left(\frac{1}{10}\right)^{20}\right)}{1-\frac{1}{10}}\right]$$

$$= \frac{7}{9}\left[20 - \frac{1}{9}(1-10^{-20})\right]$$

$$= \frac{7}{9}\left[\frac{179}{9}+\frac{1}{9}\cdot 10^{-20}\right]$$

$$= \frac{7}{81}(179 + 10^{-20})$$

જવાબ : (C)

(111) જો x, y, z સમાંતર શ્રેણીમાં હોય અને $tan^{-1}x$, $tan^{-1}y$ તથા $tan^{-1}z$ પણ સમાંતર શ્રેણીમાં હોય, તો ...... સત્ય બને. $0 < x, y, z < 1$ (JEE : 2013)

(A) $x = y = z$ (B) $2x = 3y = 6z$ (C) $6x = 3y = 2z$ (D) $6x = 4y = 3z$

ઉકેલ : અહીં x, y, z સમાંતર શ્રેણીમાં છે.

$\therefore\ 2y = x + z$ (1)

વળી, $tan^{-1}x$, $tan^{-1}y$, $tan^{-1}z$ પણ સમાંતર શ્રેણીમાં છે.

$\therefore\ 2tan^{-1}y = tan^{-1}x + tan^{-1}z$

$\therefore\ tan^{-1}y + tan^{-1}y = tan^{-1}\left(\frac{x+z}{1-xz}\right)$

$\therefore\ tan^{-1}\left(\frac{2y}{1-y^2}\right) = tan^{-1}\left(\frac{x+z}{1-xz}\right)$

$\therefore\ \frac{2y}{1-y^2} = \frac{x+z}{1-xz}$

$\therefore\ \frac{x+z}{1-y^2} = \frac{x+z}{1-xz}$ ((1) પરથી,)

$\therefore\ 1 - y^2 = 1 - xz$ આથી $y^2 = xz$

$\therefore$ x, y, z સમગુણોત્તર શ્રેણીમાં છે.

$x = y = z$ મળે.

અહીં x, y, z સમાંતર તથા સમગુણોત્તર શ્રેણીમાં હોવાથી $x = y = z$ થાય. **જવાબ :** (A)

(112) p તથા q ધન વાસ્તવિક સંખ્યાઓ એવી મળે કે જેથી $p^2 + q^2 = 1$ હોય, તો $(p + q)$ ની મહત્તમ કિંમત ...... મળે. (AIEEE : 2007)

(A) 2 (B) $\frac{1}{2}$ (C) $\frac{1}{\sqrt{2}}$ (D) $\sqrt{2}$

ઉકેલ : અહીં સમાંતર મધ્યક (A) ≥ ગુણોત્તર મધ્યક (G) લેતાં,

$\frac{p+q}{2} \geq \sqrt{pq}$

$\therefore\ p^2 + 2pq + q^2 \geq 4pq$

$\therefore\ 1 + 2pq \geq 4pq.$ આથી $1 \geq 2pq.$ આથી $2pq \leq 1$ (1)

હવે $(p + q)^2 = p^2 + 2pq + q^2 \leq 1 + 1$ (($p^2 + q^2 = 1$) તથા (1) પરથી)

$\therefore\ p + q \leq \sqrt{2}$

$\therefore$ $p + q$ ની મહત્તમ કિંમત $\sqrt{2}$ મળે.

નોંધ : (1) $p = \frac{1}{\sqrt{2}}$, $q = \frac{1}{\sqrt{2}}$ લેતાં $p^2 + q^2 = 1$ પણ થાય અને $p + q = \sqrt{2}$ પણ થાય

(2) ધારો કે $p = cos\theta$, $q = sin\theta$. $0 < \theta < \frac{}{2}$, હોય તો $p^2 + q^2 = 1$.

$\therefore$ $cos\theta + sin\theta$ નો વિસ્તાર = $(0, \sqrt{2}\,]$. જો $\theta = \frac{\pi}{4}$, તો મહત્તમ કિંમત $\sqrt{2}$. **જવાબ :** (D)

(113) કોઈ સમાંતર શ્રેણીનાં 100 મા પદના 100 ગણા એ તે જ શ્રેણીના 50 મા પદના 50 ગણા જેટલું હોય તો તે શ્રેણીનું 150 મું પદ ...... મળે. (AIEEE : 2012)

(A) –150 (B) 0 (C) 150 (D) 50મા પદના 150 ગણા જેટલું

ઉકેલ : અહીં $100\ t_{100} = 50\ t_{50}$ આપેલ છે.

$\therefore\ 100\ [a + (99)\ d] = 50\ [a + 49d]$

$\therefore\ 2\ (a + 99\ d) = a + 49d$

$\therefore\ a + 149\ d = 0$

$\therefore t_{150} = 0$ **જવાબ :** (B)

(114) કોઈ ત્રણ ધન સંખ્યાઓ વધતી સમગુણોત્તર શ્રેણી રચે છે. જો આ શ્રેણીનું મધ્યમ પદ બમણું કરતાં મળતી નવી સંખ્યાઓ સમાંતર શ્રેણીમાં હોય, તો તે સમગુણોત્તર શ્રેણીનો સામાન્ય ગુણોત્તર ...... હોય. (JEE 2014)

(A) $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ (B) $3 + \sqrt{2}$ (C) $2 - \sqrt{3}$ (D) $2 + \sqrt{3}$

ઉકેલ : ધારો કે ત્રણ ધન સંખ્યાઓ a, b, c સમગુણોત્તર શ્રેણી રચે છે તથા બે ક્રમિક સંખ્યાઓ વચ્ચેનો ગુણોત્તર r છે.

અહીં, a, ar, ar^2 સમગુણોત્તર શ્રેણીમાં છે.

હવે મધ્યમ પદ બમણું કરવામાં આવે છે.

$\therefore$ $a, 2ar, ar^2$ સમાંતર શ્રેણી રચે.

$\therefore\ 2ar = \dfrac{a+ar^2}{2}$

$\therefore\ r^2 - 4r + 1 = 0$ $(a \neq 0)$

$\therefore\ r = \dfrac{4 \pm \sqrt{16-4(1)(1)}}{2} = \dfrac{4 \pm \sqrt{12}}{2} = 2 \pm \sqrt{3}$

પરંતુ વધતી સમગુણોત્તર શ્રેણી હોવાથી ગુણોત્તર $2 + \sqrt{3}$ મળે. **જવાબ :** (D)

(115) બે ભિન્ન વાસ્તવિક સંખ્યાઓ l અને n $(l, n > 1)$ નો સમાંતર મધ્યક m હોય તથા આ બે સંખ્યાઓ વચ્ચે G_1, G_2, G_3 ત્રણ સમગુણોત્તર મધ્યક હોય તો $G_1^4 + 2G_2^4 + G_3^4 =$ ...... (JEE 2015)

(A) $4l^2 mn$ (B) $4lm^2n$ (C) $4lmn^2$ (D) $4l^2m^2n^2$

ઉકેલ : સંખ્યાઓ l તથા n નો સમાંતર મધ્યક m આપેલ છે.

$\therefore\ m = \dfrac{l+n}{2}$ (1)

હવે l તથા n ની વચ્ચે ત્રણ ગુણોત્તર મધ્યકો G_1, G_2, G_3 છે.

$\therefore\ l$, G_1, G_2, G_3, n સમગુણોત્તર શ્રેણી રચે છે. $\dfrac{G_1}{l} = \dfrac{G_2}{G_1} = \dfrac{G_3}{G_2} = \dfrac{n}{G_3} = r$ લેતાં

$\therefore G_1 = lr;\ G_2 = lr^2,\ G_3 = lr^3,\ n = lr^4$

$\therefore\ r^4 = \dfrac{n}{l}$. આથી $r = \left(\dfrac{n}{l}\right)^{\frac{1}{4}}$ (2)

હવે, $G_1^4 + 2G_2^4 + G_3^4 = l^4r^4 + 2\,(l^4r^8) + l^4r^{12} = l^4r^4\,(1 + 2r^4 + r^8)$

$\therefore\ G_1^4 + 2G_2^4 + G_3^4 = l^4 \left(\dfrac{n}{l}\right) \left[1+2\left(\dfrac{n}{l}\right)+\left(\dfrac{n}{l}\right)^2\right] = nl^3 \left[1+\dfrac{n}{l}\right]^2 = nl\,(n+l)^2 = 4m^2ln$ **જવાબ :** (B)

(116) $1^3 + \dfrac{1^3+2^3}{1+3} + \dfrac{1^3+2^3+3^3}{1+3+5} + \ldots$ નાં પ્રથમ 9 પદોનો સરવાળો ..... હોય. (JEE : 2015)

(A) 71 (B) 96 (C) 142 (D) 192

ઉકેલ : અહીં $t_n = \dfrac{1^3+2^3+3^3+\ldots+n^3}{1+3+\ldots+(2n-1)} = \dfrac{\frac{n^2(n+1)^2}{4}}{\frac{2n(n+1)}{2}-n} = \dfrac{\frac{n^2(n+1)^2}{4}}{n^2} = \dfrac{(n+1)^2}{4}$

હવે $S_9 = \sum\limits_{n=1}^{9} t_n = \sum\limits_{n=1}^{9} \dfrac{(n+1)^2}{4}$

$= \dfrac{1}{4} \sum\limits_{n=1}^{9} (n+1)^2$

$= \dfrac{1}{4}\ [2^2 + 3^2 + \ldots + 10^2]$

$= \dfrac{1}{4}\ [1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + 10^2 - 1^2]$

$= \dfrac{1}{4}\left[\dfrac{10(11)(21)}{6} - 1\right] = \dfrac{1}{4}\ (384) = 96$ **જવાબ :** (B)

(117) $\log_3 2, \log_3 (2^x - 5), \log_3 \left(2^x - \frac{7}{2}\right)$ સમાંતર શ્રેણીમાં હોય તો x = ...

(A) 2 (B) 3 (C) 4 (D) 5

ઉકેલ : અહીં $\log_3 2, \log_3 (2^x - 5), \log_3 \left(2^x - \frac{7}{2}\right)$ સમાંતર શ્રેણીમાં છે.

$\therefore 2 \log_3 (2^x - 5) = \log_3 2 + \log_3 \left(2^x - \frac{7}{2}\right)$

$\therefore \log_3 (2^x - 5)^2 = \log_3 \left[2 \cdot \left(2^x - \frac{7}{2}\right)\right]$

$\therefore (2^x - 5)^2 = 2 \cdot \left(2^x - \frac{7}{2}\right)$

$\therefore (2^x)^2 - 10 \cdot 2^x + 25 = 2 \cdot 2^x - 7$

$\therefore (2^x)^2 - 12 \cdot 2^x + 32 = 0$

$\therefore (2^x - 8)(2^x - 4) = 0$

$\therefore 2^x = 8$ અથવા $2^x = 4$

$\therefore x = 3$ અથવા $x = 2$

હવે $x = 2$ લેતાં, $\log_3 (2^x - 5) = \log_3(-1)$ મળે જે અશક્ય છે કારણ કે log વિધેયનો પ્રદેશ R^+ હોય

આથી $x = 3$ **જવાબ :** (B)

એક કરતાં વધુ સાચા વિકલ્પ હોય તેવા પ્રશ્નો

(118) જો બે સંખ્યાઓ $5 - d$ તથા $5 + 2d$ નો સ્વરિત મધ્યક 4 હોય, તો $|2d|$ = ... હોય. (JEE advanced : 2015)

(A) 2 (B) 3 (C) 4 (D) 5

ઉકેલ : ધારો કે $a = 5 - d, b = 5 + 2d$ છે.

હવે $H = \frac{2ab}{a+b} = 4$ આપેલ છે.

$\therefore (5 - d)(5 + 2d) = 2[(5 - d) + (5 + 2d)]$

$\therefore 25 + 5d - 2d^2 = 20 + 2d$

$\therefore 2d^2 - 3d - 5 = 0$

$\therefore (d + 1)(2d - 5) = 0$

$\therefore d = -1$ અથવા $d = \frac{5}{2}$

$\therefore |2d| = |-2| = 2$ અથવા $|2d| = 5$ **જવાબ :** (A), (D)

પૂર્ણાંક જવાબ હોય તેવા બહુવિકલ્પી પ્રશ્નો

(119) કોઈ એક શહેરની હદની બહાર એક વિશ્રામગૃહ આવેલ છે. આ વિશ્રામગૃહના રસ્તા પર બંને બાજુએ કિલોમીટર દર્શાવતા પથ્થર (માઈલસ્ટોન) મૂકેલ છે. કોઈ એક માણસ આ વિશ્રામગૃહથી 1 કિમી.ના અંતરે 1 કિમી લખેલ પથ્થરને લોડિંગ રીક્સામાં લઈ જઈને મૂકે છે અને પછી પાછો આવે છે. ત્યાર બાદ 2 કિમી.ના અંતરે તે પથ્થરને મૂકીને પાછો આવે છે. આ રીતે તે માણસ રસ્તાની બંને બાજુએ અંતિમ પથ્થર ગોઠવીને પાછો આવે ત્યારે તેણે કાપેલ અંતર 210 કિમી હોય તો તેણે કેટલા કિમી સુધી રસ્તાની બંને બાજુએ પથ્થર ગોઠવ્યા હશે ?

(A) 8 (B) 9 (C) 10 (D) 12

ઉકેલ : માણસે કાપેલ અંતર (એક બાજુએ) $1 \cdot 2 + 2 \cdot 2 + 3 \cdot 2 + ... + n \cdot 2$ છે.

જ્યારે બીજી બાજુએ $1 \cdot 2 + 2 \cdot 2 + 3 \cdot 2 + ... + (n-1) \cdot 2 + n$ છે.

કારણ કે છેલ્લા પથ્થરેથી ઘર તરફ પ્રયાણ કરે છે.

$\therefore$ કુલ અંતર $= 2(1 + 2 + 3 + ... + n) + 2(1 + 2 + 3 + ... + n) - n$

$$210 = 4(1 + 2 + 3 + ... + n) - n = \frac{4n(n+1)}{2} - n$$

$$= 2n(n+1) - n$$

$$\therefore 210 = 2n^2 + n$$

$\therefore 2n^2 + n - 210 = 0$

$\therefore (2n + 21)(n - 10) = 0$

$\therefore n = 10$ અથવા $n = \frac{-21}{2} < 0$ અશક્ય છે.

$\therefore n = 10$

$\therefore$ રસ્તાની બંને બાજુએ 10 કિલોમીટર સુધી પથ્થર ગોઠવ્યા હશે. **જવાબ** : (C)

(120) $1 + \frac{2}{3} + \frac{6}{3^2} + \frac{10}{3^3} + \frac{14}{3^4} + ... = ...$ (AIEEE-2009)

(A) 6 (B) 3 (C) 2 (D) 4

ઉકેલ : અહીં $S = 1 + \frac{2}{3} + \frac{6}{3^2} + \frac{10}{3^3} + \frac{14}{3^4} + ... \infty$ (1)

$\therefore \frac{1}{3} S = \frac{1}{3} + \frac{2}{3^2} + \frac{6}{3^3} + \frac{10}{3^4} + ... \infty$ (2)

(1) માંથી (2) બાદ કરતાં,

$$\therefore \frac{2}{3} S = 1 + \frac{1}{3} + \frac{4}{3^2} + \frac{4}{3^3} + \frac{4}{3^4} + ... \infty$$

$$= \frac{4}{3} + \frac{4}{3^2} + \frac{4}{3^3} + ... \infty$$

$$= \frac{\frac{4}{3}}{1-\frac{1}{3}} = \frac{\frac{4}{3}}{\frac{2}{3}} = 2.$$ આથી $S = 3$ **જવાબ** : (B)

નિષ્કર્ષ તથા કારકના પ્રશ્નો

આ પ્રકારના પ્રશ્નોમાં ચાર વિકલ્પો અને બે વિધાનો આપેલાં હોય છે. **વિધાન 1** નિષ્કર્ષ તથા **વિધાન 2** કારક કહેવાય છે. વિકલ્પો (A), (B), (C) તથા (D) નીચે મુજબ હોય છે.

(A) વિધાન 1 તથા વિધાન 2 બંને સત્ય છે તથા વિધાન 2 એ વિધાન 1ની સમજૂતી માટે પર્યાપ્ત છે.

(B) વિધાન 1 તથા વિધાન 2 બંને સત્ય છે તથા વિધાન 2 એ વિધાન 1ની યોગ્ય સમજૂતી માટે પર્યાપ્ત નથી.

(C) વિધાન 1 સત્ય છે તથા વિધાન 2 અસત્ય છે.

(D) વિધાન 1 અસત્ય છે તથા વિધાન 2 સત્ય છે.

(121) **વિધાન 1 :** 1, 2, 4, 8 ... સમગુણોત્તર શ્રેણી છે.

4, 8, 16, 32 ... સમગુણોત્તર શ્રેણી છે.

1 + 4, 2 + 8, 4 + 16, 8 + 32 ... પણ સમગુણોત્તર શ્રેણી છે.

વિધાન 2 : ધારો કે કોઈ એક સમગુણોત્તર શ્રેણીનો સામાન્ય ગુણોત્તર r છે.

તથા સામાન્ય પદ T_{k+1} છે તેમજ બીજી સમગુણોત્તર શ્રેણીનું સામાન્ય પદ T'_{k+1} તેમજ

$T''_{k+1} = T'_{k+1} + T_{k+1}$ એ અન્ય સમગુણોત્તર શ્રેણીનું સામાન્ય પદ હોય, જ્યાં r સામાન્ય ગુણોત્તર છે.

ઉકેલ : અહીં ધારો કે $T_{k+1} = ar^k$ તથા $T'_{k+1} = br^k$ છે.

$\therefore T''_{k+1} = T'_{k+1} + T_{k+1}$

$= ar^k + br^k$

$= (a + b)r^k$

$\therefore T''_{k+1}$ એ કોઈ સમગુણોત્તર શ્રેણીનું સામાન્ય પદ છે.

$\therefore$ કહી શકાય કે બંને વિધાન સત્ય છે.

તથા વિધાન 2 એ વિધાન 1ની યોગ્ય સમજૂતી માટે પર્યાપ્ત છે. **જવાબ :** (A)

(122) **વિધાન 1 :** 1 + (1 + 2 + 4) + (4 + 6 + 9) + (9 + 12 + 16) + ... + (361 + 380 + 400) નો સરવાળો 8000 છે. (AIEEE-2012)

વિધાન 2 : $\sum_{k=1}^{n}(k^3-(k-1)^3) = n^3, \forall\, n \in N$

ઉકેલ : આપેલ શ્રેઢીમાં દરેક કૌંસમાં ક્રમશઃ બે સંખ્યાનો વર્ગ તથા તે બે સંખ્યાના ગુણાકારનો સરવાળો દર્શાવેલ છે. જેમાં અંતિમ કૌંસમાં $19^2 + (19)(20) + (20)^2$ છે.

અહીં કુલ 20 પદ છે, જેમનો સરવાળો 1 + (1 + 2 + 4) + (4 + 6 + 9) + (9 + 12 + 16) + ... + (361 + 380 + 400) = 8000 જોઈએ છે.

વળી, સ્પષ્ટ છે કે, $k^3 - (k-1)^3 = (k - (k - 1))\,(k^2 + k(k - 1) + (k - 1)^2)$

$= k^2 + k\,(k - 1) + (k - 1)^2$

$\therefore \sum_{k=1}^{n}(k^3-(k-1)^3) = \sum_{k=1}^{20}(k^2+k(k-1)+(k-1)^2) = 20^3 = 8000$

આથી વિધાન 1 સત્ય છે.

$\therefore \sum_{k=1}^{n}(k^3-(k-1)^3) = n^3$ એ વિધાન 1 ની સમજૂતી માટે પર્યાપ્ત છે.

$\therefore$ વિધાન 1 તથા વિધાન 2 બંને સત્ય છે તથા વિધાન 2 એ વિધાન 1ની સમજૂતી માટે પર્યાપ્ત છે. **જવાબ :** (A)

(123) **વિધાન 1 :** $\forall\, n, n \geq 2, n \in N, \frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + ... + \frac{1}{\sqrt{n}} > \sqrt{n}$ (AIEEE : 2008)

વિધાન 2 : $\forall\, n \in N, n \geq 2, \sqrt{n(n+1)} < n+1$

ઉકેલ : $P(n) : \frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + ... + \frac{1}{\sqrt{n}}$ માં $n = 2$ લેતાં,

P(2) : $\frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} > \sqrt{2}$ કારણ કે $\frac{1}{\sqrt{1}} > \sqrt{2} - \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$

ધારો કે P(k) : $\frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \ ... + \frac{1}{\sqrt{k}} > \sqrt{k}$ સત્ય છે. $\forall\ k \in N,\ k \geq 2$ (1)

$\therefore\ \frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \ ... + \frac{1}{\sqrt{k}} + \frac{1}{\sqrt{k+1}} > \sqrt{k} + \frac{1}{\sqrt{k+1}}$ ((1) પરથી,)

$= \frac{\sqrt{k^2+k}+1}{\sqrt{k+1}} > \frac{\sqrt{k^2}+1}{\sqrt{k+1}}$

$\therefore$ P(k + 1) : $\frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \ ... + \frac{1}{\sqrt{k}} + \frac{1}{\sqrt{k+1}} > \frac{k+1}{\sqrt{k+1}} = \sqrt{k+1}$

આથી વિધાન 1 સત્ય છે.

હવે, $n < n + 1$

$\therefore\ n(n + 1) < (n + 1)^2$

$\therefore\ \sqrt{n(n+1)} < n + 1$

આથી વિધાન 2 પણ સત્ય છે.

$\therefore$ વિધાન 2 એ વિધાન 1 ની યોગ્ય સમજૂતી માટે પર્યાપ્ત નથી. **જવાબ :** (B)

●